This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

Digitized by Google

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK GENT

Digitized by Google

Digitized by Google

aik. 209.

Math. 209

Digitized by Google

# CHRISTIANI HUGENII

# OPERA GEOMETRICA.

*TOMUS SECUNDUS.*

Digitized by Google

## Tomi ſecundi contenta.


THEOREMATA DE QUADRATURA HYPERBOLES, ELLIPSIS ET CIRCULI, ex dato portionum gravitatis centro. Quibus ſubjuncta eſt Ἐξέτασις Cyclometriæ Cl. Viri GREGORII à S. VINCENTIO, editæ Anno CIↃIↃCLVII. 309.

EPISTOLA AD C. V. FRANC. XAVERIUM AINSCOM. S. I. qua diluuntur ea quibus Ἐξέτασις Cyclometriæ GREGORII à S. VINCENTIO impugnata fuit. 341.

DE CIRCULI MAGNITUDINE INVENTA. Accedunt ejuſdem Problematum quorundam illuſtrium Conſtructiones. 351.

DE CIRCULI ET HYPERBOLÆ QUADRATURA CONTROVERSIA. 405.

GEOMETRICA VARIA. 483.


Digitized by Google

# CHRISTIANI HUGENII
## A ZULICHEM,
*Dum viveret Zelhemi Toparchæ,*

# OPERA VARIA.

## VOLUMEN SECUNDUM.




LUGDUNI BATAVORUM,
Apud JANSSONIOS VANDER AA,
Bibliopolas. MDCCXXIV.

Digitized by Google

Digitized by Google

# CHRISTIANI HUGENII,

CONST. F.

THEOREMATA

DE

# QUADRATURA

## HYPERBOLES, ELLIPSIS ET CIRCULI,

EX DATO

PORTIONUM GRAVITATIS CENTRO.

*Quibus ſubjuncta eſt*

Ἐξέτασις Cyclometriæ Cl. Viri GREGORII à S. VINCENTIO, editæ Anno cIↃ IↃcxlvii.



Digitized by Google

# AD LECTOREM.

DE Conicis Sectionibus & Circulo novi quid adferimus, Amice Lector, ſi tamen ita vocari queat, quod æternâ lege definitum conſtitutumque, quale nunc eſt, perpetuò fuit. Sic quod recens effoditur, novum quis aurum dicat. Sic ſtellas in cœlo novas, quæ ſuperioribus ſæculis incognitæ, noſtrorum artificio deteguntur. Neque verò his Geometricum Theorema ullum vetuſtate cedit, ſed nos novitatem ſingulis tribuimus, prout quæque ſeſe nobis offerunt fiuntque manifeſta. Itaque & inſcripti trigoni Parabola ante Archimedem ſeſquitertia fuiſſe dicenda eſt; neque illa minùs immutabili veritate reliquarum Sectionum Circulique portionibus ſemper inerant, quæ nunc circa eas prodimus, licet antehac nemini, de quo quidem ad nos pervenerit, comperta fuiſſe conſtet vel determinata. Damus autem non iſti, quam retulimus, Archimedeæ ſimilem determinationem, neque vel ipſa rerum natura, poſt tot ſubtiliſſimorum hominum deluſos conatus, ſpem reliquiſſe videtur tale quid unquam de figuris, quas tractandas ſumpſimus, expectandi: Verùm id præſtitiſſe profitemur, quod in ipſa

quoque inſcriptione expreſſum eſt, & paulò quid amplius, ſi Lectoris æqui judicium prævenire permittitur. Namque ex datis gravitatum centris Hyperbolas, Ellipſes & Circulos ad quadrata redigere non finis eſt horum Theorematum, ſed conſequentia duntaxat; eoque nomine potiſſimum placere debent, quòd aliquatenus certam trium Portionum ad inſcripta triangula rationem demonſtrant. Eam in Hyperbola primum mihi deprehendere contigit, viâ deſtinatâ planè, ſed impeditâ difficilique; quâ deinde breviorem exquirens, in hanc incidi quæ ad Ellipſin & Circulum quoque pertineret, commodùmque obvenit conſenſus ille in cognatis figuris mirabiliſque convenientia. Quæ quidem univerſim in omnibus hiſce quum minus locum habeat, ſola facit Propoſitionum novitas; ſupernumeraria illa quaſi, atque ultra propoſitum adſcita, cujuſque hoc ſolum mihi tribui par eſt, quod ex præcedentibus ipſam non ineleganti ratione comprobari poſſe oſtendi. Dudum enim hic nos prævenit, egregiumque Theorema ante annos undeviginti demonſtratum dedit acutiſſimus Geometra P. Della Faille; felix, meâ quidem ſententiâ, quod ante alios perſpexerit, quomodo à ſectorum gravitatis centro Quadratura dependeret: cumque illum in Circulo præcipuam laudem promeruiſſe agnoſcam, non æquè gaviſus ſum detectâ in reliquis hujus ſegmentis ſimili connexio-

ne, quam cum eandem in Hyperboles portionibus obſervaſſem, illudque inveniſſem de quo tantus Vir non potuit non & ipſe cogitaſſe. Raros alioqui ſemper hæc figura, ſi cum Circulo conferatur, ſui contemplatores nacta eſt; ejuſque rei vel effectum vel indicium habemus, quod cum varia ſint inſpecta quibus datis Quadraturam quoque Circuli dari neceſſe ſit; cujuſmodi ſunt exacta perimetri longitudo, Helicis Archimedeæ contingens, Quadratricis Dinoſtrati terminus, vel tangens quoque ejuſdem Quadratricis ad terminum alterum, (ſicut aliquando me demonſtraſſe memini) & alia nonnulla quæ recentioribus debentur; nihil interea à quoquam definitum extet, quo vel ſub ulla conditione Hyperbole cum ſpatio rectis comprehenſo lineis comparari poſſit. Noſtrâ ſanè ætate, paucíſque abhinc annis Vir Clariſſ. D. Gregorius à S. Vincentio, de quo mihi deinceps dicendum reſtat, exquiſitâ prorſus novâque methodo utramque Quadraturam aggreſſus eſt, & credidit eâdem ſe propemodum demonſtratione abſolviſſe. At ego cum ampliſſima quæ de hiſce volumina emiſit, perſcriptis jam Theorematis meis, diligentius evolverem, (certus, ſi quod intenderat obtineret, ſaltem gravitatis me centra exhibiturum,) intellexi tandem, majori ſubtilitate quàm ſucceſſu rem arduam tentatam fuiſſe, ratione quoque repertâ quâ id clariſſime oſtendi poſſe confido.

Et

Et quando inter tot eximios hoc ævo Geometras nondum licuit animadvertere qui ſibi hanc provinciam delegerit, ac proinde fieri poſſet ut longa porro dubitatio maneret circa demonſtrationes, quas certiſſimas eſſe oportet; arbitratus ſum me facturum quod & in publicum utile eſſet & à propoſiti argumenti ratione non alienum, ſi ſimul hîc prodire ſinerem, quæ novam in re obſcura lucem allatura videbantur. Nulla autem temeritate ad elevandam Viri gravis & eruditi auctoritatem acceſſi, ſed cauſæ bonitate adductus, putavi quæ compereram liberè citraque offenſam proponi poſſe. Majori quoque fiduciâ, poſteaquam is ſeſe ipſum per literas, quarum aliquod inter nos commercium eſt, auctorem hortatoremque candidè præbuit, ut ſiqua commentatus eſſem, ea cum univerſis communicarem. Ingenuitatem hanc inſignem lubenti gratoque uti meretur animo accepi, & ſpero modeſtâ reprehenſione ſatis me declaraſſe, quanti æſtimem Doctiſſ. Viro haberi amicus. Cujus invicem ſumma, quâ me uſque adhuc excepit, humanitas facit ne quid aliud exſpectem, niſi ut vel moderatè & ſine ulla acerbitate ad mea reſpondeat, ſi quid iis reponendum eſſe duxerit, vel rationibus evidentiſſimis perſuaſus, æquè lubens noſtra quam alterius poſthac opera veriora ſentiat & amplectatur.

CHRI-

# CHRISTIANI HUGENII,

## CONST. F.

## THEOREMATA DE QUADRATURA HYPERBOLES, ELLIPSIS, ET CIRCULI, EX DATO PORTIONUM GRAVITATIS CENTRO.

### THEOREMA I.

*Portioni hyperboles, vel ellipſis vel circuli portioni, dimidiâ ellipſi dimidiove circulo non majori, circumſcribi poteſt figura ex parallelogrammis æqualem latitudinem habentibus, quæ portionem excedat ſpatio quod minus ſit quovis dato.*

Data ſit portio A B C, cujus diameter B D. TAB. XXXIV. Fig. 1. Super baſin A C conſtituatur parallelogrammum A E, latera duo habens diametro B D parallela & æqualia, quo fiet ut latus reliquum portionem in vertice contingat. Hoc parallelogrammo continuè in duo æqualia ſecto, relinquetur tandem pars quæ

minor erit dato ſpatio; ſit ea parallelogrammum B F, & dividatur baſis A C in partes æquales ipſi D F, punctis G, H, K &c. atque inde ducantur ad ſectionem rectæ G L, H M, K N &c. diametro B D parallelæ, & perficiantur parallelogramma D O, G P, H Q, K R &c. Dico figuram ex omnibus iſtis parallelogrammis compoſitam (quæ impoſterum ordinatè circumſcripta vocabitur) ſuperare portionem A B C minori quàm datum ſit ſpatio.

Jungantur enim A N, N M, M L, L B, B S, &c. eritque hac ratione inſcripta quoque portioni figura quædam rectilinea; majorque erit exceſſus figuræ circumſcriptæ quæ ex parallelogrammis compoſita eſt, ſuper inſcriptam, quàm ſupra portionem A B C. Exceſſus autem circumſcriptæ ſuper inſcriptam ex triangulis conſtat, quorum quæ ſunt ab una diametri parte, ut A R N, N Q M, M P L, L O B, æquantur dimidio parallelogrammi O D vel B F, quia ſingulorum baſes baſi D F æquales ſunt, & omnium ſimul altitudo, parallelogrammi B F altitudini. Eâdem ratione triangula quæ ſunt ab altera diametri parte, æquantur dimidio parallelogrammi B F: Ergo omnia ſimul triangula ſive dictus exceſſus æqualis eſt parallelogrammo B F, eóque minor ſpatio dato. Sed eodem exceſſu adhuc minor erat exceſſus figuræ circumſcriptæ ſupra portionem A B C: igitur hic exceſſus dato ſpatio multo minor eſt. Et apparet fieri poſſe quod proponebatur.

## THEOREMA II.

*Datâ portione hyperboles, vel ellipſis vel circuli portione, dimidiâ ellipſi dimidiove circulo non majore, & dato triangulo qui baſin habeat baſi portionis æqualem; poteſt utrique figura circumſcribi ex parallelogrammis quorum ſit omnium eadem latitudo, ita ut uterque ſimul exceſſus quo figuræ circumſcriptæ portionem & triangulum ſuperant, ſit minor ſpatio quovis dato.*

Da-

Data ſit portio A B C & triangulus D E F, baſibus A C, D F æqualibus; & portionis diameter ſit B G, in triangulo verò ducta à vertice in mediam baſin linea E H. Sint autem utræque B G, E H vel ad baſes rectæ vel æqualiter inclinatæ; & quam rationem habet B G ad E H, in eandem dividatur ſpatium datum; ſintque partes K & L. Circumſcribatur jam ſicut antea portioni A B C figura ordinatè, quæ portionem ſuperet exceſſu minore quàm ſit ſpatium K. Et triangulo D E F circumſcribatur figura quæ totidem parallelogrammis conſtet, quot ſunt in figura portioni A B C circumſcripta. TAB. XXXIV. Fig. 2.

Quoniam igitur baſes portionis & trianguli æquales ſunt, apparet quidem omnium parallelogrammorum eandem fore latitudinem. Hinc quum parallelogrammum B M ſit ad E R ut B G ad E H, id eſt ut K ad L, ſitque B M minus quam K [1], erit quoque E R minus quam L [2]. Verùm omnia triangula quibus conſtat exceſſus figuræ circumſcriptæ ſupra triangulum D E F, æqualia ſunt parallelogrammo E R, ergo minor eſt idem exceſſus ſpatio L. Sed & exceſſus quo figura circumſcripta portionem A B C ſuperat, minor eſt ſpatio K. Ergo uterque ſimul exceſſus minor erit ſpatio K L dato. Et conſtat fieri poſſe quod proponebatur.

[1] Ex conſtr.
[2] 14. 5. Elem.

## THEOREMA III.

*SI portioni hyperboles, vel ellipſis vel circuli portioni, dimidiâ ellipſi dimidiove circulo non majori, circumſcribatur figura ordinatè; ejus figuræ centrum gravitatis erit in portionis diametro.*

Sit portio quælibet iſtarum A B C, diameter ejus B D; & circumſcribatur ei ut ſupra figura ordinatè. Oſtendendum eſt ejus figuræ centrum gravitatis fore in B D diametro. Ducantur lineæ H K, N R, P S, conjungentes ſuprema latera parallelogrammorum quæ à diametro portionis æqualiter utrinque diſtant. TAB. XXXVI. Fig. 3.



Digitized by Google

Quoniam igitur F H, L K ſunt diametro B D parallelæ, ſuntque D F, D L æquales, oportet lineam H K, quæ duas F H, L K conjungit, à diametro B D bifariam ſecari; quare eadem H K parallela erit baſi A C [1], & E H K G recta linea. Itaque E C parallelogrammum eſt; cujus oppoſita latera quum bifariam dividat diameter B D, erit in ea parallelogrammi centrum gravitatis [2]. Eâdem ratione parallelogramma erunt H M, N O, P Q, & ſingulorum centra gravitatis in linea B D. Ergo & figuræ ex omnibus dictis parallelogrammis compoſitæ centrum gravitatis in eadem B D reperiri neceſſe eſt. Iſta autem figura eadem eſt quæ portioni ordinatè fuerat circumſcripta. Ergo figuræ portioni ordinatè circumſcriptæ centrum gravitatis conſtat eſſe in B D portionis diametro. Quod erat oſtendendum.

[1] 5. lib. 2. Con.

[2] 9. lib. 1. Arch. de Æquipond.

## Theorema IV.

*Portionis hyperboles, ellipſis & circuli, centrum gravitatis eſt in portionis diametro.*

TAB. XXXIV. Fig. 4.

Eſto portio hyperboles, vel ellipſis vel circuli dimidiâ primum figurâ non major, A B C; diameter ejus B D. Oſtendendum eſt, in B D reperiri portionis A B C gravitatis centrum.

Si enim fieri poteſt, ſit extra diametrum in E, & ducatur E H diametro B D parallela. Dividendo itaque D C continuè bifariam, relinquetur tandem linea minor quam D H; ſit ea D F, & circumſcribatur portioni figura ordinatè ex parallelogrammis quorum baſes æquales ſint lineæ D F, & jungantur B A, B C. Figuræ itaque portioni circumſcriptæ centrum gravitatis eſt in B D portionis diametro. Sit hoc K, & jungatur E K, producaturque, & occurrat ei A L parallela B D. Quia autem portio major eſt triangulo A B C, & exceſſus quo figura circumſcripta portionem ſuperat, minor parallelogrammo B F, uti ſupra demonſtratum fuit *; erit major ratio portionis A B C ad dictum exceſſum, quàm trianguli A B C ad B F parallelogrammum, id eſt quàm

* Theor. 1.

A D

A D ad D F; multoque major quam A D ad D H, vel quàm L K ad K E. Sit itaque M K ad K E ſicut portio A B C ad exceſſum quo ipſa ſuperatur à figura ordinatè circumſcripta. Itaquè cum K ſit centrum grav. figuræ portioni circumſcriptæ, & E centrum grav. ipſius portionis; erit M centrum gravitatis omnium ſpatiorum quæ eundem exceſſum conſtituunt [1]. Quod eſſe non poteſt; Nam ſi per M linea ducatur diametro B D parallela, erunt ab una parte omnia quæ diximus ſpatia. Manifeſtum eſt igitur, portionis A B C centrum grav. eſſe in B D portionis diametro. [1] 8. lib. 1. Arch. de Æquipond.

Eſto nunc A B C, portio ellipſis vel circuli, dimidiâ figurâ major. Abſolvatur figura, & producatur B D uſque dum ſectioni occurrat in E; erit igitur portionis A E C diameter E D, & B D E diameter totius figuræ. Et quoniam in B D E diametro eſt figuræ totius centrum gravitatis, (hoc enim ex prædemonſtratis conſtabit, ſi in duo æqualia tota figura dividatur diametro quæ ipſi A C ſit parallela,) & in eadem centr. gravitatis A E C portionis minoris, ſicut modò oſtenſum fuit; erit quoque centr. gravitatis portionis reliquæ A B C in B D E [2]; quod erat oſtendendum. TAB. XXXIV. Fig. 5. [2] 8. lib. 1. Archim. de Æquipond.

### * LEMMA.

Eſto linea E B, cui ad utrumque terminum adjiciantur æquales duæ E S, B P, & inſuper alia P D. Dico id quo rectangulum E D B excedit E P B, æquari rectangulo S D P. Eſt enim rectangulum E D B æquale iſtis duobus, rectangulo E D P & rectangulo ſub E D, P B: quorum ultimum ſuperat rectangulum E P B rectangulo D P B. Igitur exceſſus rectanguli E D B ſupra rectangulum E P B æqualis eſt duobus iſtis, rectangulo E D P, & D P B. Sed rectangulum E D P addito rectangulo D P B, id eſt rectangulo ſub E S, D P, æquale ſit rectangulo S D P. Manifeſtum eſt igitur, exceſſum rectanguli E D B ſupra E P B; æquari rectangulo S D P. TAB. XXXIV. Fig. 6.

† Eſto rurſus linea E B, cui ad utrumque terminum aufe- TAB. XXXIV. Fig. 7.

 ran-

* Idem hoc aliter demonſtratum reperi apud Pappum, lib. 7. Prop. 24.
† Vide eundem, lib. 7. Prop. 57.

Digitized by Google

tantur duæ æquales E S, B P, & inſuper alia P D. Dico iterum, id quo rectangulum E D B excedit E P B, æquari rectangulo S D P. Rectangulum enim E D B æquale eſt iſtis duobus, rectangulo E D P, & rectangulo ſub E D, P B, horum autem E D P rurſus æquale eſt duobus, rectangulo nimirum S D P, & ei quod continetur ſub E S, D P, ſive rectangulo D P B. Igitur rectangulum E D B iſtis tribus æquale eſt rectangulis, S D P, D P B, & rectangulo ſub E D, P B; horum vero duo poſtrema æquantur rectangulo E P B; ergo rectangulum E D B æquale eſt duobus, rectangulo nimirum S D P & E P B, unde apparet exceſſum rectanguli E D B ſupra rectangulum E P B æquari rectangulo S D P.

## THEOREMA V.

*Datâ portione hyperboles, vel ellipſis vel circuli portione, dimidiâ figurâ non majore; ſi ad diametrum conſtituatur triangulus hujuſmodi, qui verticem habeat in centro figuræ, & baſin portionis baſi æqualem & parallelam; eam verò quæ deinceps à vertice ad mediam baſin pertingit tantam, ut poſſit ipſa rectangulum comprehenſum lineis, quæ inter portionis baſin & terminos diametri figuræ interjiciuntur. Erit magnitudinis, quæ ex portione & præſcripto triangulo componitur, centrum gravitatis punctum idem quòd eſt trianguli vertex, centrum nimirum figuræ.*

TAB. XXXV. Fig. 1. 2. 3. Data ſit portio hyberboles, vel ellipſis vel circuli portio dimidiâ figurâ non major, A B C. Diameter ejus ſit B D, & figuræ diameter B E, in cujus medio centrum figuræ F. Et ſumatur F G quæ poſſit rectangulum B D E, ductâque K G H æquali & parallelâ baſi A C, quæque ad G biſariam

riam dividatur, jungantur K F, F H. * Demonſtrandum eſt, quod magnitudinis compoſitæ ex portione A B C & triangulo K F H, centrum gravitatis eſt punctum F.

Si non eſt in F, ſit ſi fieri poteſt primùm ab ea parte puncti F quæ eſt verſus A B C portionem, atque eſto punctum L, conſtat autem futurum in recta B D G, quum in hac ſint utraque centra gravitatis portionis & trianguli K F H. Jungantur A B, B C, & quam rationem habet G F ad F L, eam habeat magnitudo compoſita ex triangulis A B C, K F H ad ſpatium quoddam M, & circumſcribantur portioni & triangulo K F H figuræ ordinatè, ex parallelogrammis quorum omnium ſit eadem latitudo, ita ut duo ſimul exceſſus quibus iſtæ figuræ ſuperant portionem A B C & triangulum K F H, minores ſint ſpatio M [1]. Igitur duorum ſimul triangulorum A B C, K F H ad dictos duos exceſſus ſive reſidua major erit ratio quàm ad M, id eſt quàm G F ad F L; ac proinde longè major ratio portionis A B C unà cum K F H triangulo ad eadem reſidua quam G F ad F L. Sit itaque N F ad F L, ſicut portio A B C ſimul cum triangulo K F H ad duo reſidua, & cadet terminus N ultra trianguli baſin K H. Jam per F ducatur O Ξ parallela baſi A C vel K H; & duorum quorumcunque parallelogrammorum, quæ in portione & in triangulo K F H æqualiter à diametro diſtabunt, ut ſunt R Q, Σ T, ſint centra gravitatis V & X; per quæ ducatur recta Z Λ Δ Ω, ſecans lineam O Ξ in Υ; & ducatur R P baſi A C parallela, abſciſſæque ad verticem lineæ P B ſumatur æqualis, ex altero diametri figuræ termino, E S.

Quoniam igitur ad diametrum figuræ ordinatim ſunt applicatæ C D & R P, erit ut rectangulum B D E ad rectangulum B P E, ita quadratum C D ad R P quadratum [2]; verùm ut C D ad R P, hoc eſt, ut H G ad Ψ G, ita eſt H F ad Σ F, & ita Z Υ ad Λ Υ; igitur ut C D quadratum ad quadratum R P, id eſt ut rectangulum B D E ad B P E, ita

[1] *Theor. 2. h.*

[2] *21. lib. 1. Con.*

* Notatu dignum quod K F, F H in hyperbole ſunt aſymptoti.

ita eſt quadratum Z Υ ad Λ Υ quadratum. Quare & per converſionem rationis, ſicut rectangulum B D E ad differentiam rectangulorum B D E, B P E, ita quadratum Z Υ ad differentiam quadratorum Z Υ, Λ Υ. Eſt autem differentia rectangulorum B D E, B P E, æqualis rectangulo S D P, ſicut lemmate præmiſſo demonſtratum eſt; differentia verò quadratorum Z Υ, Λ Υ, æqualis quadrato Z Λ & duobus
[3] 4. lib. 2. Elem. rectangulis Z Λ Υ [3], ſive quod idem eſt, rectangulis Z Λ X, Z Λ Υ bis ſumptis, hoc eſt, duplo rectangulo ſub Z Λ, X Υ. Itaque ſicut eſt rectangulum B D E ad rectangulum S D P, ita quadratum Z Υ ad duplum rectangulum ſub X Υ, Z Λ. quare cum rectangulum B D E quadrato F G
[4] Ex conſtr. æquale ſit [4], ideoque & quadrato Z Υ, erit quoque rectan-
[5] 14. 5. Elem. gulum S D P æquale duplo rectangulo ſub X Υ, Z Λ [5]. Quia verò F punctum dividit B E per medium, ſuntque æquales B P, E S, etiam F P, F S æquales erunt, unde additâ utrique F D, erit S D æqualis toti P F D id eſt Δ Υ Ω: ſed Δ Υ Ω dupla eſt lineæ V Υ, quia bis continet utramque Υ Δ, Δ V in hyperbole, in ellipſi verò & circulo bis utramque V Ω & Ω Υ; ergo & S D dupla V Υ, ideoque rectangulum S D P æquale duplo rectangulo ſub Υ V, Ω Δ. Sed idem rectangulum S D P æquale oſtenſum fuit duplo rectangulo ſub X Υ, Z Λ; ergo æquale eſt rectangulum ſub Υ V, Ω Δ, rectangulo ſub X Υ, Z Λ. Eſt itaque
[6] 16. l. 6. Elem. Υ V ad Υ X, ut Λ Z ad Ω Δ [6]; verùm ut Λ Z ad Ω Δ, ita eſt parallelogrammum Σ T ad R Q; itaque & Υ V eſt ad Υ X ut parallelogrammum Σ T ad R Q parallelogr. Sunt autem puncta X & V centra gravitatis dictorum parallelogrammorum; ergo magnitudinis ex utroque parallelogram-
[7] 7. lib. 1. Archim. de Æquip. mo compoſitæ centrum gravitatis eſt punctum Υ [7]. Eâdem ratione oſtendi poteſt de reliquis omnibus parallelogrammis, quod duorum quorumlibet oppoſitorum centrum gravitatis eſt in lineâ O Ξ. Ergo totius magnitudinis quæ ex duabus figuris utrimque ordinatè circumſcriptis componitur, centr. gravitatis in eadem O Ξ reperiri neceſſe eſt. Sed ejuſdem compoſitæ magnitudinis centrum gravit. eſt quoque in recta

BDG,

B D G, quoniam in ea ſunt centra gravitatis utriusque figuræ circumſcriptæ [8]; igitur magnitudinis ex dictis figuris compoſitæ centrum grav. eſt ipſum punctum F. Poſitum autem fuit L punctum centrum gravitatis ejus magnitudinis quæ ex portione A B C & K F H triangulo componitur; igitur magnitudinis reliquæ, compoſitæ ex duobus reſiduis, quæ in figuris circumſcriptis remanent, erit centr. grav. in producta L F, ubi ea ſic terminatur, ut pars adjecta habeat ad F L eandem rationem quam portio A B C ſimul cum K F H triangulo ad dicta duo reſidua [9]: is autem terminus eſt N; itaque N punctum eſt centrum gravitatis duorum reſiduorum. Quod fieri nequit; Nam ſi per N ducatur recta baſi K H parallela, erunt ab una parte ſpatia omnia è quibus utrumque reſiduum conſtat. Non eſt igitur L punctum centrum gravitatis magnitudinis ex portione A B C & K F H triangulo compoſitæ. Sed neque erit ab altera parte puncti F. Namque hoc ſi dicatur, planè ſimili demonſtratione eò devenietur ut duorum reſiduorum quæ demptâ portione A B C & K F H triangulo, in circumſcriptis figuris ſupererunt, centrum gravitatis ſit ultra portionem A B C; quod eſt æquè abſurdum. Reliquum eſt igitur ut ſit ipſum punctum F; quod erat oſtendendum.

8 Theor. 3. h.

9 8. lib. 1. Archim. de Æquipond.

## Theorema VI.

*Omnis hyperboles portio ad triangulum inſcriptum, eandem cum ipſa baſin habentem eandemque altitudinem, hanc habet rationem; quam ſubſeſquialtera duarum, lateris tranſverſi & diametri portionis, ad eam quæ ex centro ſectionis ducitur ad portionis centrum gravitatis.*

Eſto hyperboles portio, & inſcriptus ei, qualem diximus, triangulus A B C; diameter autem portionis ſit B D, & latus tranſverſum ſive diameter ſectionis B E, in cujus medio centrum ſectionis F. Et ponatur centrum gravitatis in

TAB. XXXIV. Fig. 8.

 portione

Digitized by Google

portione punctum L. Dico portionem ad inſcriptum triangulum A B C eam habere rationem, quam duæ tertiæ totius E D ad F L.

Conſtituatur enim ad diametrum, ut in præcedentibus, triangulus K F H; ſcilicet ut quadratum F G æquetur rectangulo E D B, & ut baſis K H ſit baſi A C æqualis & parallela: ejuſque trianguli ſit centrum gravitatis M, ſumptâ nimirum F M æquali duabus tertiis lineæ F G [1].

[1] 14. lib. 1. Arch. de Æquip.

Eſt itaque triangulus K F H ad A B C triangulum, ut F G ad B D: verùm ut F G ad B D, ita eſt E D ad F G, quia quadratum F G æquale eſt rectangulo E D B; & ut E D ad F G, ita ſunt duæ tertiæ E D ad duas tertias F G, id eſt F M; ergo triangulus K F H ad triangulum A B C, ut duæ tertiæ E D ad F M. Eſt autem portio hyperboles ad triangulum K F H, ut F M ad F L [2], quoniam æquilibrium portionis & trianguli K F H eſt in puncto F [3], & centra gravitatis ſingulorum puncta L & M; ex æquali igitur in proportione perturbata, erit portio ad triangulum A B C, ut duæ tertiæ lineæ E D ad F L [4]: quod erat demonſtrandum.

[2] 7. lib. 1. Archim. de Æquipond.

[3] Theor. 5. h.

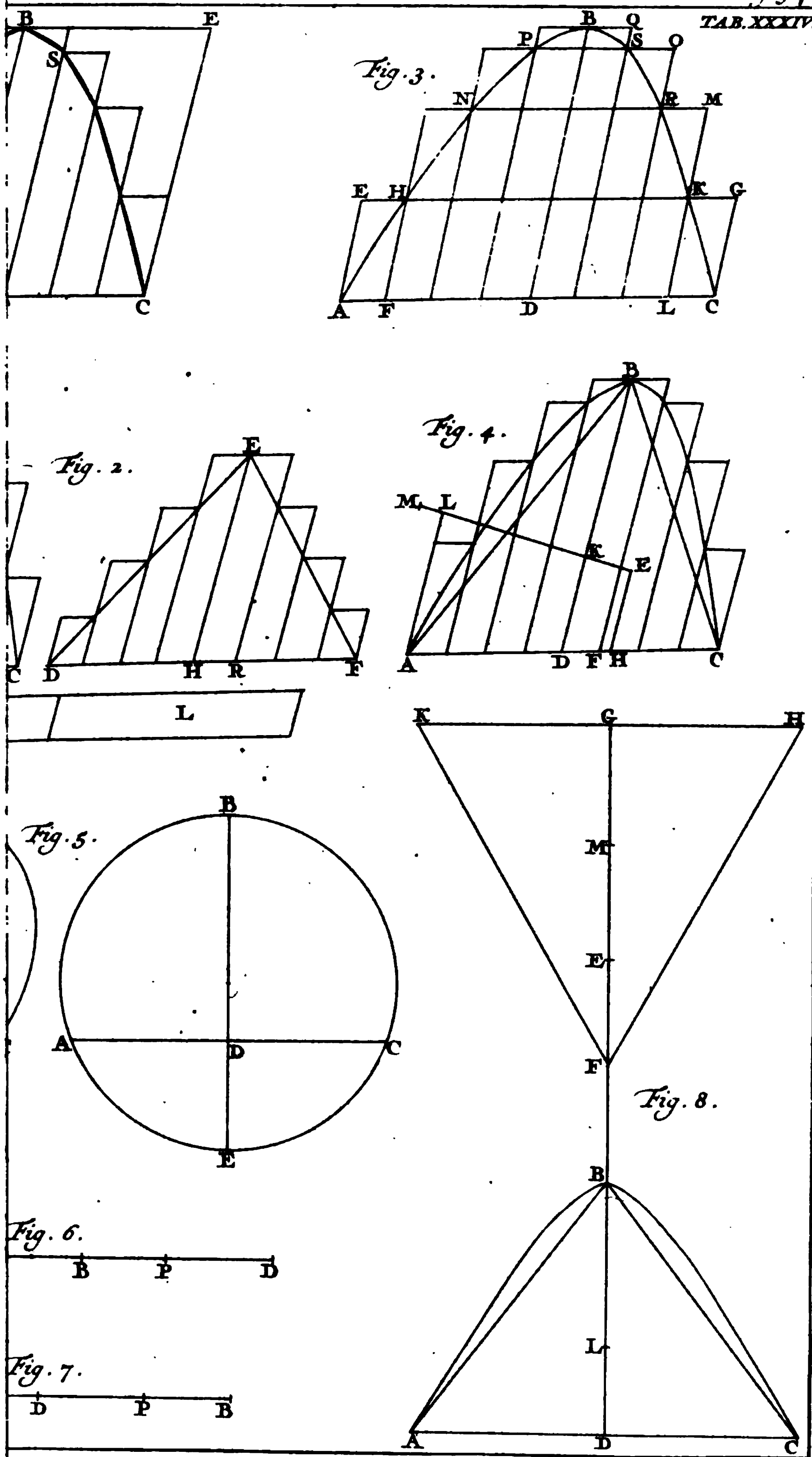
[4] 23. lib. 5. Elem.

## THEOREMA VII.

*Omnis ellipſis vel circuli portio ad triangulum inſcriptum, eandem cum ipſa baſin habentem eandemque altitudinem, hanc habet rationem; quam ſubſeſquialtera diametri portionis reliquæ, ad eam quæ ex figuræ centro ducitur ad centrum gravitatis in portione.*

TAB. XXXV. Fig. 4. 5.

Eſto ellipſis vel circuli portio primùm dimidiâ figurâ non major, & inſcriptus ei triangulus A B C, eandem cum portione baſin habens, eandemque altitudinem; diameter autem portionis ſit B D, quæ producatur, & manifeſtum eſt quod tranſibit per centrum figuræ; ſit hoc F, & diameter portionis reliquæ D E. Et ponatur centrum gravitatis in portione




Digitized by Google

Digitized by Google

tione A B C punctum L. Dico igitur portionem ad inſcriptum ſibi triangulum A B C eam habere rationem, quam duæ tertiæ E D ad F L. Conſtituatur enim ut ſupra triangulus K F H, cujus nimirum baſis K H ſit baſi A C æqualis & parallela, & F G quæ à vertice ad mediam baſin pertingit poſſit rectangulum B D E: & centrum gravitatis trianguli K F H ſit M punctum, ſumptâ ſcilicet F M æquali duabus tertiis lineæ F G [1].

[1] 14. lib. 1. Arch. de Æquip.

Triangulus igitur K F H eſt ad triangulum A B C, ut F G ad B D; ut autem F G ad B D, ſic eſt E D ad F G, quia quadratum F G æquale eſt B D E rectangulo; & ut E D ad F G, ſic ſunt duæ tertiæ E D ad duas tertias F G, id eſt, ad F M. Ergo triangulus K F H ad triangulum A B C, ſicut duæ tertiæ E D ad F M. Portio autem A B C eſt ad triangulum K F H, ut F M ad F L [2], quoniam æquilibrium eorum eſt in F [3], & centra gravitatis ſingulorum puncta L & M; Ergo ex æquali in proportione perturbata, erit portio A B C ad A B C triangulum, ſicut duæ tertiæ E D ad F L [4].

[2] 7. lib. 1. Archim. de Æquipond.
[3] Theor. 5. h.
[4] 23. lib. 5. Elem.

Sit nunc portio A B C dimidiâ figurâ major. Dico eam rurſus ad inſcriptum triangulum eam habere rationem, quam duæ tertiæ E D ad F L.

TAB. XXXVI. Fig. 1. 2.

Ponatur enim portionis reliquæ A E C centrum gravitatis H punctum, & jungantur A E, E C. Igitur per ea quæ jam oſtendimus, erit portio A E C ad A E C triangulum, ut duæ tertiæ B D ad F H; verùm ut triangulus A E C ad triangulum A B C, ſic eſt E D ad B D, ſive duæ tertiæ E D ad duas tertias B D; ex æquali igitur in proportione perturbata, erit ſicut portio A E C ad triangulum A B C, ita duæ tertiæ E D ad F H [5]. Sed ut portio A B C ad A E C portionem, ita eſt F H ad F L [6], quoniam totius figuræ centrum gravitatis eſt F, centraque dictarum portionum L & H; Ergo iterum ex æquali in proportione perturbata, erit portio A B C ad A B C triangulum, ut duæ tertiæ E D ad F L. Omnis igitur Ellipſis vel circuli portio &c. Quod erat demonſtrandum.

[5] 23. lib. 5. Elem.
[6] 8. lib. 1. Arch. de Æquipond.



Digitized by Google

## Theorema VIII.

*IN ſemicirculo & quolibet circuli ſectore, habet arcus ad duas tertias rectæ ſibi ſubtenſæ hanc rationem, quam ſemidiameter ad eam, quæ ex centro ducitur ad ſectoris centrum gravitatis.*

TAB. XXXVI. Fig. 3. Eſto primùm ſemicirculus A B C, deſcriptus centro D, ſectuſque bifariam rectâ B D, in qua centrum gravitatis ſemicirculi ſit E [1]. Dico arcum A B C eſſe ad duas tertias A C, ſicut B D ad D E. Jungantur enim A B, B C. Igitur, ut ſemicirculus ad triangulum A B C, ſic ſunt duæ tertiæ B D ad D E [2], eſt enim B D æqualis diametro portionis reliquæ. Verùm etiam ut ſemicirculus, id eſt, ut triangulus habens baſin æqualem arcui A B C & altitudinem B D, ad A B C triangulum, ita eſt arcus A B C ad A C rectam; ergo ut arcus A B C ad A C, ita ſunt duæ tertiæ B D ad D E, & permutando, ut arcus A B C ad duas tertias B D, ita A C ad D E, ſive ita $\frac{2}{3}$ A C ad $\frac{2}{3}$ D E, unde rurſus permutando, ut arcus A B C ad $\frac{2}{3}$ A C, ita $\frac{2}{3}$ B D ad $\frac{2}{3}$ D E, ſive ita, B D ad D E.

TAB. XXXVI. Fig. 4. Sit deinde ſector D A B C, ſemicirculo minor, bifariam ſectus rectâ D B, in qua ſectoris centrum gravitatis ponatur E punctum, & ducatur ſubtenſa A C. Dico rurſus, arcum A B C ad duas tertias rectæ A C eam habere rationem, quam B D ad D E. Jungantur enim A B, B C, & totius circuli ſit diameter K D B, quæ producatur in Q, ut fiat Q F, ad B F, ſicut portio A C B ad A B C triangulum, & jungantur A Q, Q C; erit jam triangulus A Q C portioni A C B æqualis. Ponantur deinde centra gravitatis, G trianguli A C D, & H portionis A C B; & ſicut D Q ad Q F, ita ſit H D ad D R.

Quia igitur ſicut portio A C B ſive triangulus A Q C ad triangulum A B C, id eſt, ut Q F ad B F, ita $\frac{2}{3}$ K F ad D H [3], erit rectangulum ſub Q F, D H, æquale duabus tertiis

[1] Theor. 4. h.
[2] Theor. 7. h.
[3] Theor. 7. h.

Digitized by Google

TAB. XXXV.

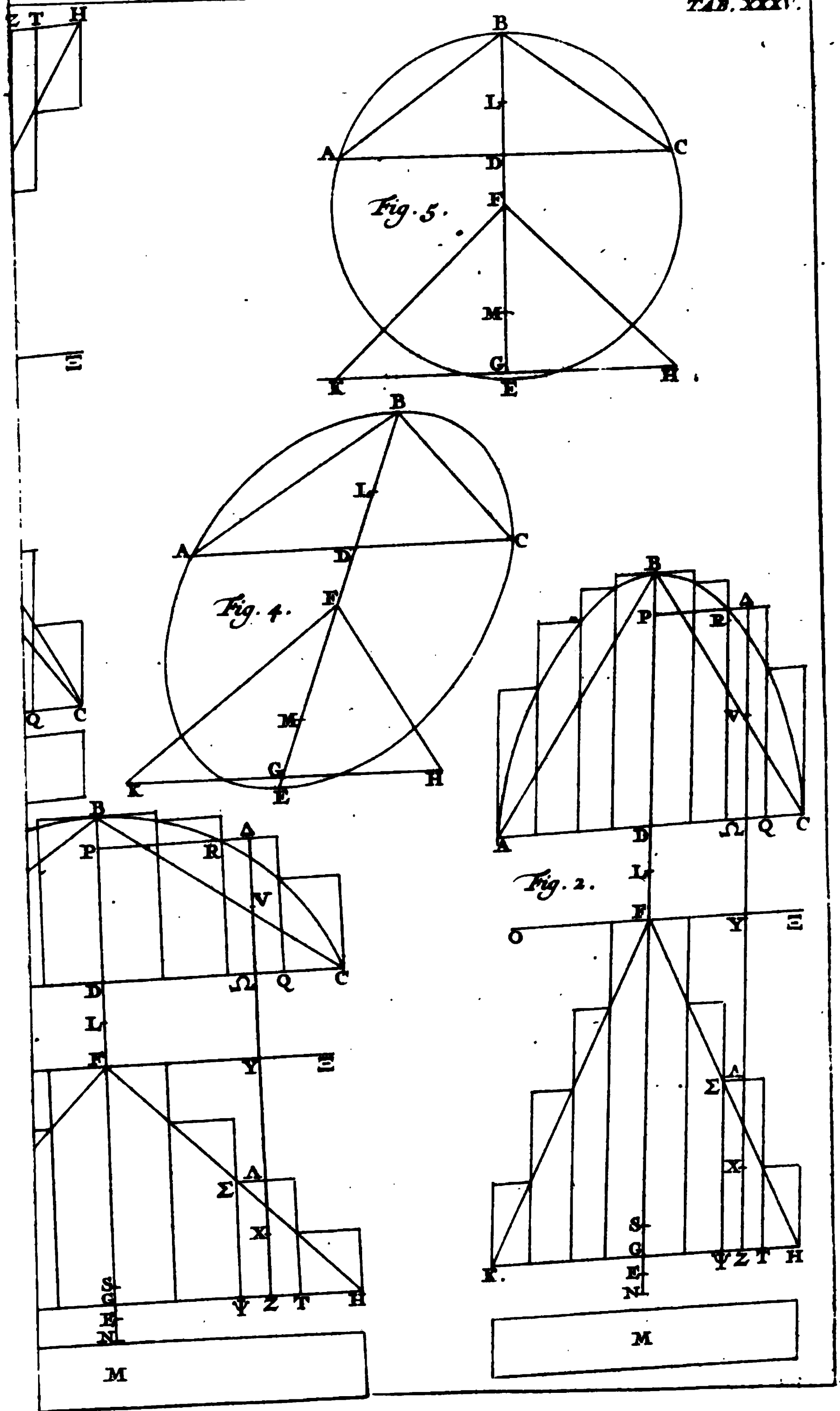


Fig. 5.

Fig. 4.

Fig. 2.

Digitized by Google

tertiis rectanguli K F B [4], id eſt, duabus tertiis quadrati A F; ſed idem rectangulum ſub Q F, D H, æquale eſt rectangulo Q D R, quia ut Q D ad Q F, ita fecimus eſſe D H ad D R; ergo rectangulum Q D R æquale duabus tertiis quadrati A F, ideoque ut Q D ad A F ita $\frac{2}{3}$ A F ad D R [5]: ſed ut Q D ad A F, ſic quoque eſt rectangulum ſub Q D, A F, cui æquale quadrilaterum D A Q C, id eſt, ſector D A B C ad A F quadratum; ergo & ſector D A B C ad quadratum A F, ut $\frac{2}{3}$ A F ad D R. Porrò quoniam E centrum gravitatis eſt totius ſectoris, & H centrum grav. portionis A C B, G verò trianguli A C D, conſtat eſſe, ſicut triangulus A C D ad A C B portionem ſive ad triangulum A Q C, id eſt, ut D F ad F Q, ita H E ad E G [6]; quare convertendo & per compoſitionem rationis erit ut D Q ad D F, ita G H, ad H E. Sed quia fecimus ut D Q ad Q F, ita H D ad D R, erit quoque per converſionem rationis, ut D Q ad D F, ita H D ad H R; ergo H D ad H R ut G H ad H E; quare & reliqua G D ad reliquam E R, ut H D ad H R [7], hoc eſt, ut D Q ad D F. Sicut autem D Q ad D F, ita eſt quadrilaterum D A Q C, cui æqualis ſector D A B C ad A C D triangulum; igitur ſector D A B C ad A C D triangulum ut G D ad E R: Eſt autem A C D triangulus ad D F quadratum, ut A F ad D F, ſive ut $\frac{2}{3}$ A F ad $\frac{2}{3}$ D F id eſt D G. Igitur ex æquali in proportione perturbata, ſicut ſector D A B C ad quadratum D F, ita $\frac{2}{3}$ A F ad E R [8]; & convertendo, quadratum D F ad ſectorem D A B C, ut E R ad $\frac{2}{3}$ A F. Fuit autem ante oſtenſum, quadratum A F eſſe ad ſectorem D A B C, ut D R ad $\frac{2}{3}$ A F; igitur duo ſimul quadrata, D F & A F, ſive unum quadratum D A ad ſectorem D A B C ut duæ ſimul E R & R D, id eſt ut tota E D ad $\frac{2}{3}$ A F [9]. Eſt verò etiam quadratum D A ad D A B C ſectorem, ſicut linea D A ad arcum A B, quia nimirum ſector D A B C æqualis eſt rectangulo, baſin habenti æqualem arcui A B & altitudinem D A; ergo ſicut D A ad arcum A B, ita E D ad $\frac{2}{3}$ A F; & permutando, arcus A B ad $\frac{2}{3}$ A F, ſive arcus A B C ad $\frac{2}{3}$ A C, ut D A vel B D ad D E.

[4] 16. lib. 6. Elem.
[5] 16. lib. 6. Elem.
[6] 8. lib. 1. Arch. de Æquipond.
[7] 19. lib. 5. Elem.
[8] 23. lib. 5. Elem.
[9] 24 lib. 5. Elem.



Digitized by Google

TAB. XXXVI. Fig. 5. Eſto jam denique ſector D A B C ſemicirculo major, & ponantur ea quæ priùs, & perficiatur circulus B A F C, & totius diameter ſit B D F, in qua erit quoque centrum grav. ſectoris reliqui D A F C [1], quot ſit G.

Quia igitur circuli totius centrum gravitatis eſt D, & duorum ſectorum centra grav. E & G, erit ſicut ſector D A B C, ad ſectorem D A F C, id eſt, ſicut arcus A B C ad arcum A F C, ita G D ad D E [2]: verùm ut arcus A F C ad $\frac{2}{3}$ A C, ita eſt D F ad D G, ſicuti modò oſtenſum eſt; ergo ex æquali in proportione perturbata, ſicut arcus A B C ad $\frac{2}{3}$ A C, ita erit D F vel B D ad D E [3]. Conſtat itaque quod in ſemicirculo & quolibet circuli ſectore &c. quod erat demonſtrandum.

[1] 8. lib. 1. Arch. de Æquip.

[2] 8. lib. 1. Arch. de Æquip.

[3] 23. lib. 5. Elem.

---

# Ἐ Ξ Έ Τ Α Σ Ι Σ

# CYCLOMETRIÆ

## *CLARISSIMI VIRI*,

## GREGORII à S. VINCENTIO, S. J.

Editæ Anno D. cIↄ Iↄc xlvii.

ANte quinquennium circiter Vir eruditiſſimus & Geometriâ celeberrimus, Gregorius à S. Vincentio, quatuor modos propoſuit quadrandi Circulum, unum verò eorum etiam Quadraturæ Hyperboles applicavit: quem cæteris potiorem ab ipſo exiſtimari ex multis indiciis colligere licet. Unum eſt hoc ipſum quod duas diverſarum figurarum quadraturas per eundem hunc demonſtravit; alterum quod evidentior multò ſit hic modus quàm reliqui tres, ideoque minus errori obnoxius videri debuerit; nonnullum etiam quod primo eum loco produxit; Et denique hoc maximum eſt, quod in iis quæ ad lectorem in principio totius operis præfatur, ubi ſuæ inventionis



Digitized by Google

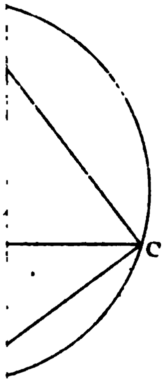
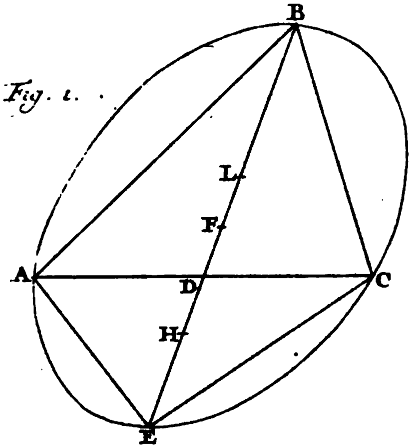



Fig. 1.



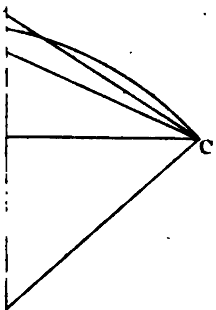




Fig. 3.

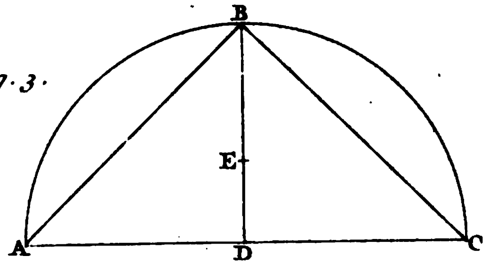
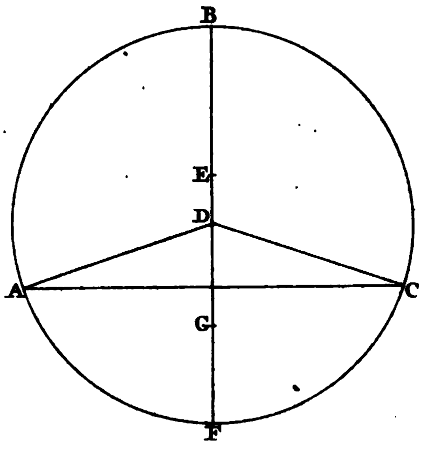



Fig. 5.




Digitized by Google

Digitized by Google

ventionis hiſtoriam & progreſſum paucis expoſuit, nullius modi præter hunc unum meminerit. Potuit autem & aliam rationem habuiſſe tres poſteriores quadraturas illic ſilentio prætereundi, eam videlicet, quod quatuor omnes ſciret ex iiſdem principiis deductas & demonſtratas eſſe. Sed mihi vel alterutra harum conſiderationum ſufficere viſa eſt, ut perſuaderet unam pro omnibus fore diſcuſſionem quæ quadraturam primariam infirmatura eſſet, reliquarum agmen ducentem. Si enim erratum in ea oſtenderimus quæ minus obſcuritatis habet, non video quâ ratione melior ſucceſſus expectandus ſit in tribus ſequentibus, quæ maximâ caligine involvuntur, quaſque Auctor ipſe vel uni illi poſthabere videtur. Principia quæ communia eſſe omnibus quadraturis dixi, ea ſunt nova inventa de Proportionalitatibus Geometricis ſive de Proportionum proportionibus, & de Ductibus plani in planum. Quæ quidem prorſus non impugnabo, nam & ſolida corpora quæcunque in Geometria conſiderare licere exiſtimo, & alia omnia adhiberi poſſe, quæ modò ullo auxilio fore credimus ad inveſtigationem veri. Unum tamen prætermittere nequeo quin dicam, Clar. Virum non ſatis feliciter quædam inventa in materia Proportionalitatum ad Quadraturam applicaſſe, atque hinc, meâ opinione, ipſi extitiſſe erroris cauſam. Primùm omnium id in propoſ. 39. lib. 10. Oper. Geom. * obſervaveram. Poſitis enim numeris fortuitò aſſumptis, 2, 3, 4, 5; deinde horum quadratis 4, 9, 16, 25; & quadratorum quadratis, 16, 81, 256, 625; videbam duodecim hiſce eandem demonſtrationem convenire, quæ in dicta prop. 39. ſcripta eſt de totidem parallelepipedis. Et quum tamen concluſio nullam idoneam admitteret interpretationem, non dubitabam quin æquè ipſius ac mea argumentatio, quam iiſdem verbis formaveram, aliquid abſurdi contineret. Poſterior autem demonſtrationis pars rectè ſe habebat, ideoque arguebat peccatum in

* In hac Propoſ. 39. etiam Carteſius paralogiſmum oſtendit Epiſt. ad Schotenium.

Digitized by Google

in priori. Sed veritus ne intricata & prolixa hinc nobis diſputatio oriretur, ad alias inventiones me converti, & tandem ea ſeſe obtulerunt, quæ paucis hic perſcribere conſtitui. Nulla per hæc propoſitionum Cl. Viri in controverſiam vocabitur; ſed contrà multis earum probatis, atque in uſum meum converſis, eò rem deducam, ut ſi quidem non impoſſibile dicet quadraturam ſuam ad exitum perducere, & per eam reapſe invenire rectilineum circulo æquale, oſtendam qui id facillimè imposterum aſſequatur. Deinde veſtigia ipſius inſiſtens demonſtrabo, quibus hactenus nobis præceſſit, iis nequaquam ad optatum finem perveniri poſſe, ſed eſſe ſubſiſtendum ad concluſiones perquam abſurdas. Atque ut ad rem veniamus.

TAB. XXXVII. Fig. 1. Eſto circulus cujus centrum F, diameter C D. Et diviſo radio F C bifariam in G, ducantur ipſi ad angulos rectos F E, G H. Dico, data ratione ſegmenti C H G ad G H E F ſegmentum, dari quoque rationem circuli ad inſcriptum ſibi hexagonum regulare. Jungantur enim F H, H C, & manifeſtum eſt triangulum F H C fore æquilaterum; item quadrantis arcum C E triplum fore arcus H E. Si ergo data ſit ratio ſegmenti C H G ad G H E F ſegmentum, componendo quoque, data erit ratio quadrantis F E C ad ſegmentum G H E F. Sed data quoque eſt ratio ſectoris F H E ad quadrantem F E C, ergo datur quoque ratio ſegmenti G H E F ad ſectorem F H E; ac proinde dabitur quoque ratio ſegmenti G H E F ad triangulum F H G; quare & ratio ſectoris F H E ad triangulum F H G data erit. Sed huic rationi eadem eſt ratio ſectoris F H C ad triangulum F C H, (quoniam hæc utriuſque præcedentium dupla ſunt;) eademque eſt circuli ratio ad hexagonum regulare ſibi inſcriptum. Ergo & hanc datam eſſe apparet: quod erat demonſtrandum.

TAB. XXXVII. Fig. 1. 2. Sunto nunc lineæ A B, C D, E F, ſingulæ æquales diametro circuli C D: & ſuper unaquaque harum conſtruantur bina quadrata. Deinde verticibus A & B deſcribantur ſemiparabolæ A V G, B T H, quarum baſes ſint quadratorum latera

latera B G, A H. In duobus ſequentibus quadratis ducantur diagonii C I, D K. Sed in poſtremis rurſus ſemiparabolæ deſcribantur E Σ L, F Π M, quarum vertices E & F, axes vero ſint quadratorum latera E Ψ, F Ω, & baſes Ψ L, Ω M. Porro diviſis bifariam ſingulis lineis quæ ab initio poſitæ fuerunt, in N, O, P, & medietatibus rurſus bifariam in Q, R, S, ducantur per diviſionum puncta, quadratorum lateribus parallelæ, T V, X Y; Z Γ, Δ Θ, Π Σ, Λ Ξ.

Oſtendit itaque Cl. V. in demonſtr. prop. 52. lib. 10. Oper. Geom. & veriſſimum eſt, in circulo ſuperiori ſegmentum C H G ad ſegmentum G H E F, eandem habere rationem quam habet hîc ſolidum quod fit ex ductu plani A Y Q in planum A H X Q, ad ſolidum ortum ex ductu plani Q Y V N in planum Q X T N; ſicut enim ille in ſuo ſchemate ſumit æquales lineas *h i*, *k l*, ita nobis æquales ſunt ſumptæ in circulo, C G, G F, & hiſce pares A Q, Q N.

Atque ut ipſa demonſtrandi methodus quoque noſcatur, ea hujuſmodi eſt. In prop. 51. lib. 10. oſtenditur, ſolidum quod fit ex ductu ſemiparabolæ A B G in ſemipar. A B H, æquari ſemicylindro, baſin habenti ſemicirculum C E D & altitudinem C D. Deinde in Corollario ejuſdem prop. idem quoque ſingulis partibus quod totis ſolidis convenire docetur. Nimirum id ſolidum quod fit ex ductu plani Q Y V N in planum Q X T N, æquatur quoque parti dicti ſemicylindri quæ inſiſtit ſegmento G H E F; Itemque ſolidum ex ductu plani A Y Q in pl. A H X Q, æquatur ejuſdem ſemicylindri parti quæ inſiſtit ſegmento C H G. Quorum hoc vel ex eo conſtat, quod alioqui duo iſta ſolida ſimul ſumpta, hoc eſt, ſolidum ex ductu plani A V N in pl. A H T N, æquale non eſſet dimidio ejus quem diximus, ſemicylindri; & conſequenter falſum quoque eſſet quod in confeſſo eſt, nimirum ſolidum ex ductu ſemiparab. A B G in ſemiparab. A B H æquari toti ſemicylindro. Apparet igitur, quoniam dictæ ſemicylindri partes eandem inter ſe rationem



Digitized by Google

habent quam baſes quibus inſiſtunt, certum eſſe quod diximus, ſegmentum circuli C H G ad G H E F, eſſe ut ſolidum ex ductu plani A Y Q in pl. A H X Q ad ſolidum ex ductu plani Q Y V N in pl. Q X T N.

Hæc ita enucleatè ſcribere volui, ne cui ignaro fortaſſe naturæ demonſtrationum quibus Cl. V. utitur, ſcrupulus reſtare poſſet, quod ubi ille in d. prop. 52, lib. 10, duo circuli ſegmenta conſiderat, quale ferè eſt G H E F, ego pro altero eorum ſumpſerim ſegmentum C H G: Quodque in linea A B ab ipſo termino A æquales partes capiam A Q, Q N. Ipſum autem Cl. Virum hæc remorari non poſſunt, neque hîc, neque in ſequentibus; quia cum in d. prop. 52. & 44, lib. 10. præcipit in linea *a b* æquales inter ſe ſumi *h i*, *k l*, ſcit hoc nullam limitationem admittere; ſicut & in ſchemate communi prop. 39, lib. 10, ubivis in linea *a b* ſumitur *i k*, quæ dividitur in duas æquales *i m*, *m k*. Idem contingit in prop. ſequenti 40.

Revertor autem ad propoſitum, & conſtat nunc quidem, ſi detur Ratio ſolidi quod fit ex ductu plani A Y Q in pl. A H X Q, ad ſolidum ex ductu plani Q Y V N in pl. Q X T N, eo ipſo dari quoque rationem ſegmenti C H G ad ſegmentum G H E F, ac proinde continuò tunc inveniri poſſe quam rationem circulus habeat ad inſcriptum hexagonum regulare.

Vocemus autem brevitatis gratia, id quod fieri diximus ex ductu plani A Y Q in planum A H X Q, ſolidum H Y. Item quod fit ex ductu plani Q Y V N in planum Q X T N, ſolidum X V. Similiter quod oritur ex ductu plani C ⊙ R in planum C K Δ R, vocemus ſolidum K Θ; eâdemque brevitate dicamus ſolida Δ Γ, M Ξ, Λ Σ, quibus quæ denotentur jam ſatis intelligitur.

His ſic conſtitutis, ſciendum eſt, omnem ſpem & fundamentum perficiendæ Quadraturæ Cl. Viro in eo poſitum eſſe, quod exiſtimet rationem ſolidi H Y ad ſolidum X V (quam unicam tantum deſiderari jam admonui) facile inveniri poſſe, ſi cognitæ ſint duæ rationes hæ, nimirum ratio ſolidi

M Ξ

M Ξ ad ſol. Λ Σ, & ratio ſolidi K Θ ad ſol. Δ Γ. Sic enim tunc argumentabitur; Nota eſt ratio ſolidi M Ξ ad ſol. Λ Σ, item ratio ſolidi K Θ ad ſol. Δ Γ, ergo notum quoque quoties illa ratio hanc contineat; Quoties autem illa hanc continet toties hæc ipſa, ſcilicet ratio ſolidi K Θ ad ſol. Δ Γ, continet rationem ſolidi H Y ad X V; ergo & hæc ratio nota erit. Quomodo hæc intelligenda ſint paulò inferiùs melius patebit, ubi eandem argumentationem repetemus. Interea certo ſcio, nihil horum quæ dixi mihi à Cl. V. negatum iri, modò conſideret in linea A B, ſumptas eſſe æquales inter ſe partes A Q, Q N, & hiſce pares C R, R O; E S, S P.

Si igitur indicavero ipſi quæ ſit ratio ſolidi M Ξ ad ſol. Λ Σ, item quæ ſit ratio ſolidi K Θ ad ſol. Δ Γ, & ne tum quidem dicere poſſit quam rationem habeat ſolidum H Y ad ſol. X V, fateatur ſane ſe fruſtra utramque Quadraturam tentaſſe, tam Circuli quam Hyperboles. Circuli, quoniam tunc videbit nequaquam procedere Propoſitionem 44. lib. 10. Oper. Geom. quæ vana & inanis erit, niſi ex notis rationibus ſolidi M Ξ ad ſol. Λ Σ, & ſolidi K Θ ad ſol. Δ Γ, innoteſcat ratio ſolidi H Y ad ſol. X V. Hyperboles vero; quoniam prop. 146. ejuſd. lib. 10. cui hæc quadratura innititur, eadem eſt cum dicta prop. 44. & iiſdem verbis Hyperbolæ applicatur.

Sin vero datis iſtis duabus rationibus invenire poſthac potuerit rationem ſolidi H Y ad ſol. X V, tum ſe credat Circulum reverà quadraviſſe. Nota enim ſic erit ratio ſegmenti C H G in circulo ad ſegmentum G H E F, & reliqua facile perficientur.

Dicam autem nunc ipſas Rationes. Et primam quidem, hoc eſt rationem ſolidi M Ξ ad ſol. Λ Σ, ajo eſſe eandem quæ numeri 53 ad 203. Alteram vero, rationem ſolidi K Θ ad ſol. Δ Γ, eam quæ 5 ad 11. atque horum utrumque infrà ſum demonſtraturus.

Prius autem quod ab initio promiſi etiam oſtendam, hiſce Rationibus cognitis, tamen rationem ſol. H Y ad ſol. X V,

per ea quidem quæ nos adhuc docuit V. Cl. inveniri non poſſe. Etenim inventurus ex datis rationibus, ſol. Μ Ξ ad ſol. Λ Σ, & ſolidi Κ Θ ad ſol. Δ Γ, rationem tertiam ſolidi H Y ad ſol. X V, in hunc modum ratiocinabitur, ut videre eſt ex demonſtratione prop. 44. ſuprà citatæ, cui hunc caſum convenire liquidò conſtat. Dicet enim, Notæ ſunt prima & ſecunda ratio, (iſtæ enim ſunt 53 ad 203, & 5 ad 11,) ergo notum quoque quoties prima ſecundam contineat. Sed quoties prima continet ſecundam, toties ſecunda continet tertiam, (hoc aſſerit prop. 40. lib. 10. oper. Geom.) Ergo notum quoque quoties ſecunda tertiam contineat. Quare cum nota ſit ſecunda, etiam tertia nota erit, ea nimirum quam habet ſolidum H Y ad ſol. X V.

Conſequenter hoc nunc definiendum ei incumbet, Quoties Ratio harum prima ſecundam contineat; hoc eſt, quoties ratio 53 ad 203, contineat rationem 5 ad 11. Sed enim quo ſenſu verbum *continere* hîc explicaturus eſt? Num eo, ut idem ſignificet quod alibi *continere per multiplicationem?* utque ratio 53 ad 203 rationem 5 ad 11. multiplicare dicatur vel bis (hoc eſt ut illa hujus ſit duplicata, ita enim *continere* intelligendum videtur in propoſitione 40. lib. 10, modo citata) vel ter, vel quater, vel ſæpiùs etiam. Et hoc quidem eſſe non poteſt; nam ratio 53 ad 203, rationis 5 ad 11, neque duplicata eſt neque triplicata vel ulteriùs multiplex, quum demum ratio 53 ad 256 $\frac{13}{25}$ ſit duplicata rationis 5 ad 11.

An igitur verbum *Continere* in eum ſenſum trahet, quem habet in propoſitione 125. lib. 8. Oper. Geom.? Vix quidem illud ſuſpicari poſſum; ſed etiamſi vellet rurſus inde abſurdum conſequetur. Nam ſecundum interpretationem iſtam; quoties ratio 53 ad 203 continet rationem 5 ad 11, toties hæc ipſa continebit rationem 5075 ad 6413; hoc autem patebit horum numerorum inter ſe rationis examinanti ſecundùm regulam dictæ propoſitionis 125. Eſſet igitur ratio ſolidi H Y ad ſol. X V, hoc eſt, ratio ſegmenti circuli ab initio propoſiti C H G, ad ſegmentum G H E F, eadem quæ

5075.

5075 ad 6413. Quare qualium partium ſegmentum C H G eſſet 5075, talium ſegmentum G H E F eſſet 6413; & proinde quadrans F C E 11488; & ſector F H E (qui quadrantis tertia pars eſt) $3829\frac{1}{3}$: & triangulum G H F $2583\frac{2}{3}$. Sicut autem ſector F H E ad triang. G H F, ita eſt ſector F H C ad triangul. F C H, & ita circulus C D ad inſcriptum ſibi hexagonum regulare. Ergo quoque qualium partium circulus C D eſſet $3829\frac{1}{3}$ talium hexagonum inſcriptum foret $2583\frac{2}{3}$. Qualium autem hexagonum inſcriptum eſt $2583\frac{2}{3}$, talium hexagonum regulare circumſcriptum eſt $3444\frac{8}{9}$; quoniam hoc inſcripti eſt ſeſquitertium: Ergo qualium partium circulus C D eſſet $3829\frac{1}{3}$, talium hexagonum circumſcriptum eſſet $3444\frac{8}{9}$, atque ita eſſet ipſo circulo minus, quod eſt abſurdum.

Manifeſtum igitur fecimus, ex duabus interpretationibus verbi *Continere*, neutram caſui noſtro accommodari poſſe. Aliam autem præter illas nullam in ſuo opere attulit; non docuit igitur modum determinandi, quoties ratio ſol. M Ξ ad ſol. Λ Σ contineat rationem ſol. K Θ ad ſolid. Δ Γ, ac proinde nec determinari poterit quoties hæc ratio contineat rationem ſolidi H Y ad ſolid. X V. Quare liquet, hanc rationem, ne duabus quidem prioribus iſtis datis, per inventa Clariſſ. Viri cognoſci poſſe: ideoque fruſtra ipſum ſperaſſe hoc modo perficere Circuli quadraturam.

Reſtat nunc tantùm ut manifeſta faciam quæ in præcedentibus poſita fuere, dixi enim me demonſtraturum, quod ſolidum M Ξ eſſet ad ſolid. Λ Σ, ut 53 ad 203: item quod ſolidum K Θ rationem haberet ad ſolidum Δ Γ, quam 5 ad 11.

Quoniam autem ad horum primi demonſtrationem neceſſarium eſt, ut notum habeamus, quæ ſit Ratio ungulæ Parabolicæ ad Cylindrum ſuum, qui baſi inſiſtit eidem, & eandem habet altitudinem; idcirco hanc Rationem declarantes, Tractatum Clariſſ. Viri, quem de eadem Ungula, Parte 5. lib. 9. propoſuit, uno egregrio Theoremate auctiorem reddemus, quod miror ipſum non inveniſſe, quum ex iis quæ jam

 oſten-

oſtenderat facili negotio deducatur, ut jam ſtatim apparebit.

TAB. XXXVII. Fig. 3. Repetitâ enim quatenus hîc neceſſe erit figurâ ipſius, quæ eſt in propoſitione 99. lib. 9. Eſto Cylindrus Parabolicus, baſes oppoſitas habens parabolas A B D, V C E; à quo ſit abſciſſa Ungula A B C D, eâdem baſi & altitudine. Dico Cylindrum ad hanc Ungulam habere rationem duplam ſeſquialteram, ſive quam 5 ad 2.

Tranſcriptis enim reliquis ex figura eadem, eſt F B diameter parabolæ A B D: & lineæ rectæ A B, B D. Ductâ porrò B C rectâ in ſuperficie cylindri, ſumptâque ejus quartâ parte C Q, abſcinditur plano P Q N ungula P Q C N & junguntur C A, C D. Denique toti cylindro adjuncta eſt pyramis A D γ C æqualis parti B X D E C, quæ à cylindro abſciſſa eſt plano B D E C. Et hactenus quidem ſufficiet nobis conſtructionem Cl. V. repetiiſſe. Demonſtravit autem hæc duo quæ ſequuntur, ſicut videre eſt in dicta prop. 99. lib. 9. Nimirum quod ungula A B C D eſt ad ungulam P Q C N, ſicut 32 ad 1. Item quod hæc ungula P Q C N eſt ad pyramidem totam A γ D B C, (quæ compoſita eſt ex duabus pyramidibus A D B C & A D γ C) ut 1 ad 30.

Erit igitur ex æquo ungula A B C D ad pyramidem A γ D B C ut 32 ad 30, hoc eſt, ut 16 ad 15. Porrò cùm parabolæ A B D octava pars ſit ſegmentum B D X, erit quoque ſegmentum ſolidum B X D E C vel huic æqualis pyramis A D γ C, octava pars cylindri totius parabolici A V C E D B: ſed pyramis altera A D B C æquatur duabus octavis ſive uni quartæ ejuſdem parabolici cylindri; (eſt enim ipſa tertia pars ſui priſmatis, quod æquale eſt tribus quartis cylindri iſtius, ut ex quadratura parabolæ conſtat) ergo tota pyramis A γ D B C tribus octavis æquatur cylindri parab. A V C E D B. Cylindrus igitur parabolicus A V C E D B erit ad pyramidem A γ D B C, ut 8 ad 3, hoc eſt, ut 40 ad 15; ſed oſtenſum eſt eandem pyramidem A γ D B C eſſe ad ungulam A B C D ut 15 ad 16. Igitur

ex

ex æquo erit cylindrus parabolicus A V C E D B ad ungulam A B C D ut 40 ad 16, hoc eſt, ut 5 ad 2; quod fuit demonſtrandum.

Quæ hîc dixi à Cl. Viro oſtenſa fuiſſe, veriſſima ſunt, ac proinde non eſt quod de veritate hujus Theorematis dubitemus: Cujus aliam quoque demonſtr. adferre poſſem, longe ab iſta diverſam, niſi ad ſequentia properarem.

Repetitâ igitur parte ultimâ ſchematis, quod ſuprà deſcripſimus, ſit oſtendendum, quod ſolidum M Ξ, id eſt, quod oritur ex ductu plani E Ξ S in planum E M Λ S ad ſolidum Λ Σ, id eſt, quod oritur ex ductu plani S Ξ Σ P in planum S Λ Π P, eam habet rationem quam 53 ad 203. Deſcribatur ſuper E F parabola E Π F, axem habens P Π, quam conſtat eſſe quartam partem ipſius E F ſive M E. Erit igitur parabola E Π F eadem quam V. Cl. in prop. 41. & 42. lib. 10. notat literis A R B. Ait autem in dicta prop. 42. & veriſſimum eſt, ſolidum quod producitur ex ductu plani E Σ L F in planum F Π M E æquari ſolido quod fit ex parabola E Π F ducta in ſe ipſam: ſicut illud quoque quod ſubjungit in Coroll. 1. nimirum quod ſolidum ex plano S Ξ Σ P in planum S Λ Π P, æquatur ſolido ex ductu plani S Φ Π P in ſe ipſum; unde ſimiliter ſolidum ex plano E Ξ S in planum E M Λ S æquabitur ſolido ex plano E Φ S in ſe ipſum ducto. TAB. XXXVII. Fig. 2.

Oportet itaque oſtendere ſolidum ortum ex plano E Φ S ad ſolidum ex plano S Φ Π P, utroque in ſe ipſum ducto, eſſe ut 53 ad 203.

Eſto ungula parabolica A E F Π, cujus baſis parabola E Π F repetita ſit ex figura præcedenti, eodemque modo ut iſtic diviſa lineis Π P, Φ S. Sit autem altitudo ungulæ A Π dupla diametri baſis Π P. Erit igitur hæc ea ungula, quam intelligit in prop. dicta 42. lib. 10. ejuſdemque coroll. 2. fieri ex ductu parabolæ E Π F in ſe ipſam. Eâdem nimirum conſideratione uſus quæ eſt in Scholio propoſ. 19. lib. 9. Nam alioqui ex ejuſmodi ductu potius dicendum eſſet geminas ungulas produci, ſingulas altitudine æquales diame- TAB. XXXVII. Fig. 4.

tro

tro Π P. Ducto deinde plano per A Π P, & alio huic parallelo D Φ S ſecundum lineam Φ S, erit jam pars ungulæ hiſce duobus planis terminata, æqualis ſolido quod fit ex ductu plani S Φ Π P in ſe ipſum; & pars ungulæ E D S Φ, æqualis ei ſolido quod fit ex ductu plani E Φ S in ſe ipſum. Quare nunc demonſtrandum erit duntaxat, partem E D S Φ eſſe ad partem Φ A P ut 53 ad 203, Sit Φ N parallela E P, & N C parallela Π A. Ergo quoniam ex proprietate Paraboles, P N eſt $\frac{1}{4}$ Π P, erit quoque P C $\frac{1}{4}$ A P. Verùm & S D æquatur $\frac{1}{4}$ A P, quum ſit huic parallela *, ſitque parabola E A F: Itaque junctâ C D, ea parallela & æqualis erit lineis P S, N Φ. Ducatur ſecundùm D C planum D B C parallelum baſi E Π F, fietque ſemiparabola B D C æqualis & ſimilis ſemiparabolæ Π Φ N; & erit Φ B N dimidius cylindrus parabolicus: D A C B verò dimidiata ungula. Hæc autem æquatur ſicut antea oſtendimus, duabus quintis cylindri dimidiati, baſin habentis D B C & altitudinem B A. Ergo quum ſemicylindrus Φ B N habeat altitudinem B Π triplam ipſius B A, erit ungula dimid. D A C B ad ſemicyl. Φ B N, ut 2 ad 15, hoc eſt, ut 8 ad 60.

* 11. 16. Elem.

Junctâ porro Φ Π, conſtat ſemiparabolam Π Φ N ad triangulum Π Φ N eſſe ut 4 ad 3; ſed triangulus Π Φ N eſt ad rectangulum Φ P ut 1 ad 6, (eſt enim baſis Π N tertia pars ipſius N P) hoc eſt, ut 3 ad 18. Ergo ex æquo erit ſemiparab. Π Φ N ad rectang. Φ P ut 4 ad 18. Itaque & ſemicylindrus Φ B N eſt ad parallelepipedum ejuſdem altitudinis ſuper baſi Φ P, ut 4 ad 18. Dicti autem parallelepipedi dimidium eſt priſma D N S; ergo ſemicylindrus Φ B N eſt ad priſma D N S, ut 4 ad 9, hoc eſt, ut 60 ut 135. Qualium igitur partium dimidiata ungula D A C B erat 8, talium ſemicylindrus parab. Φ B N erat 60, (ut ſuprà oſtenſum eſt) taliumque priſma D N S erit 135. Ac proinde ſolidum A Π S D, quod ex iſtis tribus componitur, erit 203. Eſt autem ungula dimidiata A D C B ad dimidiatam ungulam E A P Π, ut 1 ad 32, ſicut Cl. Vir. demonſtravit in prop. 95. lib. 9. Ergo qualium partium ungula dimid.

A D C B

Digitized by Google

Λ D C B eſt 8, talium erit dimid. ungula E A P Π 256, quoniam ut 1 ad 32, ita eſt 8 ad 256. Diximus autem partem ſol. A Π S D eſſe talium 203. Igitur dim. ungula E A P Π eſt ad partem A Π S D ut 256 ad 203; & dividendo pars reliqua E D S Φ ad partem A Π S D, ut 53 ad 203; quod erat demonſtr. Oſtendimus igitur illud quoque ſolidum, quod ſuprà diximus fieri ex ductu plani E Ξ S in planum E M Λ S, eam habere rationem ad ſolidum ortum ex ductu plani S Ξ Σ P in planum S Λ Π P, quam 53 ad 203.

Tandem ad alterum eorum quæ demonſtrare promiſimus accedamus, repetitâque parte mediâ ſchematis triplicis quod ſuprà deſcriptum fuit, oſtendendum ſit; ſolidum ortum ex ductu plani C Θ R in planum C K Δ R, ad ſolidum ex ductu plani R Θ Γ O in planum R Δ Z O eam habere rationem, quam 5 ad 11. Supra latus C D trianguli C D I, erigatur ad perpendiculum triangulum C K D, & jungatur K I. Erit jam pyramis C D I K illud ſolidum quod intelligitur fieri ex ductu trianguli C D I in triangulum C D K. Etenim ſectâ pyramide plano A Z O Γ ſecundum O Γ, quod rectum ſit ad baſin C D I, erit ſectio quadratum, id eſt, rectangul. quod fit ex lineis Γ O, O Z; eademque ſectio dividet pyramidem bifariam. Secta item plano E Δ R Θ priori parallelo, ſecundùm lineam R Θ, exiſtet inde rectangulum E R, quale continetur lineis Θ R, R Δ. Oportet itaque oſtendere, quòd ſolidum K C R E Δ eſt ad ſolidum Δ A O Θ Δ, ut 5 ad 11. TAB. XXXVII. Fig. 2. Fig. 5.

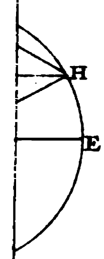
Ducatur ſecundùm E Δ planum Δ E B parallelum baſi C D I; abſcindet illud pyramidem B E Δ K ſimilem toti pyramidi C I D K, quæque proinde erit ad hanc in triplicata ratione laterum homologorum B Δ ad C D. Sed B Δ, cum ſit æqualis ipſi C R, quarta pars eſt lateris C D. Itaque qualium partium pyramis B E Δ K eſt unius, talium pyramis C I D K erit 64: & dimidium hujus, hoc eſt, ſolidum K A O C erit 32. Qualium autem pyramis B E Δ K eſt unius talium quoque priſma B E R eſt 9; quoniam baſin habent communem B E Δ, & priſmatis altitudo B C tri-

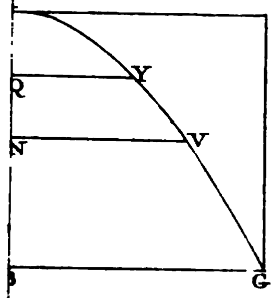
pla eſt ad altitudinem pyramidis B K. Ergo ſolidum K C R E Δ quod ex hiſce duobus componitur, erit partium 10, qualium ſolidum K A O C eſt 32. Apparet igitur hoc eſſe ad illud ut 16 ad 5; ideoque dividendo & convertendo ſolidum K C R E Δ eſſe ad ſolidum Δ A O Θ Δ, ut 5 ad 11: quod erat oſtendendum.

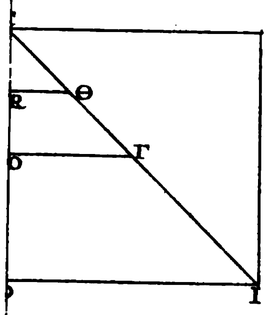
# F I N I S.

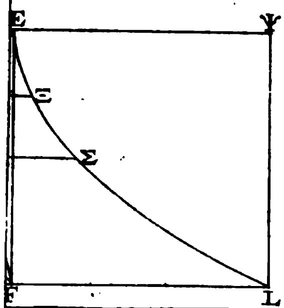
Digitized by Google

TAB. XXXVII.



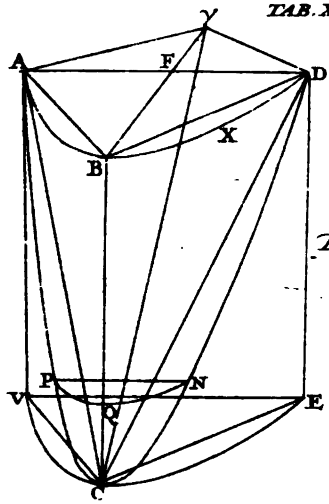




Fig. 3.

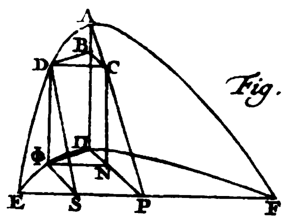



Fig. 4.

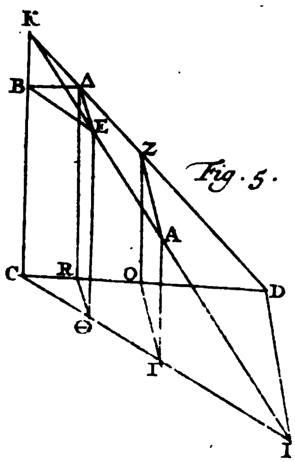



Fig. 5.

# CHRISTIANI HUGENII,
CONST. F.

AD

C. V. FRAN. XAVERIUM
AINSCOM. S.I.

# EPISTOLA,

Qua diluuntur ea quibus Ἐξέτασις Cyclometriæ
*Gregorii à Sto. Vincentio* impugnata fuit.



Digitized by Google

Digitized by Google

# CHRISTIANI HUGENII,
## CONST. F.
## AD
## C. V. FRAN. XAVERIUM AINSCOM. S. I.
# EPISTOLA.

## CL. VIRO D°. XAVERIO AINSCOM CHRISTIANUS HUGENIUS S. D.

LIber ille quem non ita pridem tuo nomine huc miſit Apelles veſter Segerus, tam mihi acceptus fuit, Vir Clariſſ. quam ſolent eſſe ea quorum diutina expectatio deſiderium auget. Jam diu enim intellexeram te Quadraturæ Vincentianæ patrocinium ſuſcepiſſe, noviſſiméque & Lovanio & Româ ſignificatum fuerat opus illud jam penè à te ad umbilicum perductum, in quo pars etiam quædam noſtræ Exetaſi dicata eſſet. Itaque cum avide totum commentarium tuum evolvi, tum accuratius reliquis illa expendi quæ propius ad me pertinebant. De quibus quid viſum fuerit breviter tibi perſcribere conſtitui. Equidem miratus ſum, cum me non ultimum inter eos recenſeas qui cæteris ſolidius in examinanda Quadratura veſtra verſati ſint, poſtea tamen adeo nihili animadverſiones omnes meas, omniáque argumenta prædicare, ut quod convellere nituntur, id ne attingant qûidem. Nempe ego totâ viâ, totoque, quod ajunt, cœlo erravi, quemque refutare volui, ejus mentem minime ſum aſſecutus. Veruntamen Viri Doctiſſimi funditus evertiſſe me commenta veſtra pronunciavere, quorum judiciis, etſi vos fortaſſe non ſtatis, apud intelligentes tamen multo pluris futura reor quam eo-

rum qui vobis de reperta Quadratura gratulantur. E ſocietate veſtra Vir eximius A. Tacquetus, *accurate ſibi lectam eſſe multumque probari Exetaſin noſtram reſcripſit, & recte me urgere autorem Quadraturæ, ut exhibeat, quoties ratio prima contineat ſecundam & ſecunda tertiam, idque niſi præſtet, tertiam incognitam explicaturum nunquam, ac proinde non daturum quadraturam, quæ à notitia tertiæ illius rationis dependet.* Alter item apud vos eſt Clariſſimus Gutſchovius, quem paſſim profiteri ſcio magnos P. Gregorii conatus noſtrâ operâ penitus concidiſſe. Neque aliter ſentit Vir undiquaque Doctiſſimus & in Academia Oxonienſi Mathematum Profeſſor J. Walliſius, idque publice teſtatum fecit in edito nuper ſubtiliſſimo opere de Infinitorum Arithmetica. Poſſemque & alios complures referre quorum pro me facit calculus, ni perſuaſum haberem in re Geometrica rationibus magis quam autoritate agendum. Neque enim dubito quin dicturus ſis, eodem mecum errore ductos qui mihi applaudunt, ipſos quoque nihilo rectius penetraſſe ſenſa autoris tui. Quare id agam potius, ut procul à me ſimul atque illis hanc, ſive inſcitiæ, ſive oſcitantiæ culpam amoliar. Prius autem ad alia quoque nonnulla quæ mihi objicis reſpondendum opinor. Variis allatis conjecturis veriſimile reddere conatus eram, ex quatuor quadraturis eam à vobis præferri quæ prima ponitur. Hoc ita refutas, ut, quod ego præcipuum argumentum dixeram, diſſimules prætereáſque. Verum per me licet ut quo loco vobis viſum erit primam quadraturam habeatis. Ego me abunde præſtitiſſe arbitrabor ſi hanc abſurdam eſſe evincam: cuique hoc planum fecero, eum non puto reliquarum trium confutationem expetiturum, imo, ſi offeratur, ne lecturum quidem. Etenim quod iiſdem omnes principiis innitantur, Proportionalitatum nimirum doctrinæ atque ei quæ eſt de ductibus plani in planum, tam certum eſt, ut negari nulla ratione poſſit. Negas tu tamen hoc, crebroque inculcas, in prima hac quadratura, proportionalitatum conſideratione, non uti autorem tuum. Sed miror qua fronte; cum non ignores utique propoſitionem 12. 39. & 40. libri 10. ex 8<sup>va</sup> ejuſdem libri demonſtrari, hanc vero per 114.
lib.

lib. 8. qui totus eſt de Proportionalitatibus.

Porro ſuperfluam me ais operam ſumpſiſſe, cum priores duas corporum rationes numero exhibui, ex quibus tertia vobis definienda erat; illas enim autor operis Geometrici, ſi credimus, multo antè quàm ego edidiſſem, imo quàm ipſe editus eſſem, perſpectas habuit aliiſque demonſtravit. Quæſo cur non explicuit igitur, noſque ea levavit moleſtia? Nam certum erat plurimum ad abſolvendam quadraturam, ſi modo abſolvi poſſet, eorum notitiam conferre debere, planéque eſſe neceſſariam. Sed vobis cuncta perinde nota dici video quæ cognoſci poſſe aliquâ ſaltem ratione imaginamini, atque ea quæ liquido comperta fuerint. Itaque ad propoſ. 43. lib. 10. me remittis, in qua utramque rationem notam fieri aſſeris. Illa vero non magis ipſas expedit quam propoſitio poſtrema ejuſdem libri, rationem quæ ſit inter circulum & quadratum diametri. Prorſus huic ſimile eſt quod de Parabolica ungula reſpondes. Videlicet jam à triginta annis exploratum habuiſſe autorem tuum, quænam ſit illius ad cylindrum ſuum proportio. Equidem ex iis quæ jam tradiderat, erui illam poſſe faſſus ſum; ipſum vero adhuc cujuſmodi foret neſciviſſe, ſatis evidens argumentum videbatur, quod eam non exprometet. Neque enim credibile, cujus theorematis gratia duodeviginti propoſitiones elucubraſſet, id tanquam ſuperfluum non eſſe adſcripturum, ſi tam nullo negotio inveniri poſſe ſperaret. Parum intererat utrum propoſitione illud dignatus fuiſſet, (quod noluiſſe eum dicis) an corollario tantum. Sed nec in corollario ratio illa uſpiam expreſſa eſt. Nam in eo quod adducis, hoc ſolum legitur, methodum traditam eſſe qua ratio ungulæ ad cylindrum quo continetur, inveſtigari queat, eamque notam fore, ſi quorundam inter ſe corporum rationes inventæ fuerint. Atqui & horum corporum rationes, & ex iis quæ ſit inter ungulam cylindrumque ſuum analogia, lectoribus diſquirenda relinquuntur: idque ipſe non neſcis. Quare non ſatis ingenue hic me diſſimulationis arguis, ubi ipſe contra quam ſentias, ſcribere videaris.

Jam vero de *palmari* errore quem mihi impingis videamus.

mus. Is circa verbum *continere* commiſſus eſt, ex quo non recte percepto factum eſt ſcilicet, ut, cum Quadraturam veſtram oppugnare me crederem, nihil minus egerim, omnesque item, qui me labefeciſſe eam judicarunt, cæcutierint. Ego ſignificationem duplicem ejus verbi quam in opere Geometrico inveneram, adduxi, tuam, quæ & P. Sarraſæ eſt, interpretationem, quoniam adhuc ignorabam, præterii. Igitur hic *palmaris* eſt error meus, quod nec P. Sarraſæ librum, nec tuum Corollarium tum temporis videram. Sed nec fortaſſe ſi ſciviſſem explicationem veſtram, propterea memorandam duxiſſem, cum parum adeo ad rem faciat, ſitque monſtroſa plane atque abſona, uti ex adjecto ſpecimine liquebit: quantum vero ea promoveritis deinde exponam. Propoſitio 40. lib. 10. eſt hujuſmodi. *Iiſdem poſitis, dico rationem ſolidi ex* R S *in* X Y *ad ſolidum ex* T V *in* Z &, *toties continere rationem ſolidi ex* I K *in* N O *ad ſolidum ex* L M *in* P Q, *quoties hæc ipſa ratio continet rationem ſolidi ex* A B *in* E F *ad ſolidum ex* C D *in* G H. Quam propoſitionem *juxta mentem*, ut ais, *autoris*, (variatâ tantum phraſi ſcilicet) ſic nobis enarras. *Iiſdem poſitis, dico rationem ſolidi ex* R S *in* X Y *ad ſolidum ex* T V *in* Z &, *conſtitui ex iis rationibus quæ toties multiplicatæ ſunt illarum rationum ex quibus conſtituitur ratio ſolidi ex* I K *in* N O *ad ſolidum ex* L M *in* P Q, *quoties hæ ipſæ rationes multiplicatæ ſunt earum ex quibus conſtituitur ratio ſolidi ex* A B *in* E F *ad ſolidum ex* C D *in* G H.

Pulchra vero explanatio! quam quia ego pervidere non valui, ſenſum convenientem ratiociniis veſtris non percepi. At cui hoc in mentem veniret, Mathematicum longe aliud ſcribere quam intelligi poſtulet? quiſve magis adhuc intricatum ſenſum theorematibus jam nunc nimium obſcuris affingere vellet? Omnes profecto qui vobis controverſiam moverunt, haud aliter atque ego, verbum *continere* accepiſſe noſti, neque ulli hoc incidiſſe, ut cum de ratione inter duas magnitudines legeret, id ad *partiales* referret, ex quibus *totales* conſtituerentur. Ecce vero ut præter eos quorum animadverſiones ad manus veſtras pervenere, eadem plane quæ nobis,

nobis, circa has propoſitiones & ſignificationem verbi *continere*, opinio fuit Incomparabili Carteſio, quem ſi minus inſignem Geometram quam *Algebriſtam* fuiſſe arbitraris, parum ex vero judicas. Ejus ad amicum epiſtolæ copia mihi facta eſt, cum jam diu exetaſis noſtra prodiiſſet, quâ quoniam non tantum id quod dixi comprobatur, ſed & tota inſuper ad opus Geometricum P. à Sto Vincentio pertinet, integram hic adſcribere viſum eſt. Gallicè ſic habet.

MONSIEUR.

*J'Ay gardé vos livres un peu long temps, pource que je deſirois en vous les renvoyant, vous rendre compte de la Quadrature du cercle pretendue, & j'avois bien de la peine à me reſoudre de feuilleter tout le gros volume qui en traite. En fin j'en ay veu quelque choſe & aſſez ce me ſemble pour pouvoir dire qu'il ne contient rien de bon qui ne ſoit facile, & qu'on ne puſt eſcrire tout en une ou deux pages. Le reſte n'eſt qu'un paralogiſme touchant la Quadrature du cercle, enveloppé en quantité de propoſitions qui ne ſervent qu'à embroüiller la matiere, & ſont treſſimples & facilles pour la pluſpart, bien que la façon dont il les traite, les face paroiſtre un peu obſcures. Pour trouver ſon paralogiſme, j'ai commencé par la* 1134e *page, ou il dit: Nota autem eſt proportio ſegmenti* LMNK *ad ſegmentum* EGHF, *ce qui eſt faux, & la preuve qu'il en donne eſt fondée ſur la* 39e *propoſition en la page* 1121. *du meſme livre, ou il y a une erreur treſmanifeſte, qui conſiſte en ce qu'il veut appliquer à pluſieurs quantitez conjointes ce qu'il a prouvé auparavant des meſmes quantitez diviſées. Car par exemple, ayant les* 4. *ordres de proportionelles*

2, 4, 8,   2, 8, 32.
&
2, 6, 18,   2, 10, 50.

*bien qu'il ſoit vray que* 8. *eſt à* 32. *en raiſon duoblée de ce que* 4. *eſt à* 8. *Et que* 18. *eſt auſſi à* 50. *en raiſon doublée de ce que* 6. *eſt à* 10. *il n'eſt pas vray pour cela que* 8 † 18. *c'eſt à dire* 26. *ſoit à* 32 † 50. *c'eſt à dire* 82. *en raiſon double de celle qui eſt entre* 4 † 6. *c'eſt à dire* 10, & 8 † 10, *c'eſt à dire* 18. *Tous ſes raiſonnements ne ſont fondez que ſur cette faute, & ce qu'il eſcrit de*



Digitized by Google

*Proportionalitatibus & de Ductibus, ne ſert qu' à l'embaraſſer, & ne me ſemble d' aucun uſage, pour ce que fruſtra fit per plura quod poteſt fieri per pauciora.*

Quorum latinè hæc eſt ſententia.

*Libros tuos retinui diutius, quod remittere eos nolebam quin ſimul opinionem meam tibi exponerem de nova iſta quam venditant circuli Quadratura; vix autem à me ipſo impetrare poteram, ut ingentia quibus tractatur volumina evolverem. Tandem tamen nonnullâ in iis delibavi, è quibus ſatis tutò mihi pronunciare poſſe videor, nihil ibi boni inveniri, quod non captu facile ſit; unâque aut alterâ paginâ explicari potuerit. Cætera merum paralogiſmum de quadratura circuli continent, multis propoſitionibus implicitum, quæque hoc tantum efficiunt, ut omnia evadant intricatiora. Pleræque vero ſimpliciſſimæ ſunt & facili ratione conſtant, licet tractandi methodus obſcuriores reddiderit. Paralogiſmum quærere inſtitui, initio facto ad paginam* 1134. *ubi hoc ait: Nota autem eſt proportio ſegmenti* LMNK *ad ſegmentum* EGHF; *quod falſum eſt, pendet enim hujus demonſtratio à propoſitione* 39, *pag.* 1121. *ejuſdem libri, ubi manifeſtus error occurrit, dum pluribus quantitatibus conjunctim applicatur, quod de ſingulis ſeorſim fuerat oſtenſum. Etenim ex. gr. poſitis quatuor proportionalium ordinibus* 2, 4, 8, & 2, 8, 32,
2, 6, 18,    2, 10, 50,
*licet verum ſit rationem* 8. *ad* 32. *duplicatam eſſe ejus quæ* 4. *ad* 8. *itemque rationem* 18. *ad* 50. *duplicatam eſſe ejus quæ* 6. *ad* 10. *non tamen idcirco verum eſt* 8 † 18. *hoc eſt*, 26. *eſſe ad* 32 † 50. *hoc eſt ad* 82. *in ratione duplicata ejus quæ* 4 † 6. *hoc eſt*, 10. *ad* 8 † 10. *hoc eſt*, 18. *Unicum ei fundamentum hæc vitioſa argumentatio; quæque de Proportionalitatibus ſcribit & de Ductibus, tantum majoribus ipſum difficultatibus involvunt, neque alicujus uſus videntur, ſiquidem fruſtra fit per plura quod poteſt fieri per pauciora.*

Vides, Vir Egregie, neque Carteſium, veſtrum illud *Hoc eſt juxta mentem autoris*, agniturum fuiſſe, ſed potius, quod res eſt, dicturum, deſperatâ causâ hoc vobis effugium quæſitum, ut quadratura veſtra ad inſtar Protei cujuſdem aliâ atque aliâ

Digitized by Google

aliâ aſſumptâ formâ quantumlibet arctè ſeſe conſtringentibus elaberetur. Verum age, inſpiciamus jam quo rem deducas, poſteaquam verbi *continere* novam ſignificationem elicuiſti, eâque vetera theoremata tam ſcitè interpolaſti. In Corollario propoſitionis 40. lib. 10. quò tam ſæpe provocas, id unum egiſſe videris, unas ex aliis difficultates nectendo, ut ſi quis argumentationis tuæ tenorem conſectari cupiat, is defeſſus abſiſtat priuſquam ad finem pervenerit. Ego ad eum uſque locum te ſecutus ſum, ubi ſpatia Y & Z aſſumi jubes: Inde non ulterius procedendum putavi. Adeo enim manifeſto vitio atque ἀγεωμετρησίᾳ ibi laborat conſtructio tua, ut tibimet ipſi exploratum id eſſe dubitare nequeam: ſed quoniam alia evadendi ratio non occurrebat, ſperaſti, credo, in tanta obſcuritate nemini illud facile animadverſum iri. *Dein*, inquis, *aſſumantur duo plana Hyperbolica* Y & Z, *rectis alteri aſymptotorum parallelis incluſa*. Nullâ aliâ præcautione aſſumuntur quam quod rectis alteri aſymptotorum parallelis includi ea neceſſe ſit. De magnitudine utriuſque aut ratione quam inter ſe ſervare debeant nihil præcipis. Igitur quamlibet magnum aut parvum unum quodque eorum abſcindi poterit. Mox tamen rationem ſpatii Y ad Z cum aliis rationibus comparare inſtituis, quas prius ſecundum certam determinationem aſſumpſiſti, tibique hoc demonſtrandum proponis, *Rationem totalem planorum* X *ad* T *tam eſſe multiplicem rationis totalis planorum* Y *ad* Z, *quàm ratio totalis ſolidorum* G H *ad* I K *multiplicata eſt rationis totalis ſolidi* L M *ad* N O. Quidnam, quæſo, abſurdius, quam de quantitate ejus rationis aliquid enunciare, quæ prorſus in certa ſit ac vaga? Equidem ex hoc ſolo ſatis liquere puto, quam fruſtra primæ Quadraturæ ſuppetias ferre tentaveris, cum in eo quod præcipuè tibi explicandum erat, tam inſigniter delinquas. In tribus reliquis an meliore fortunâ uſus ſis, ſi me inquirere oporteat, talentum non meream. Id tamen ſcito perpetuum adverſus vos argumentum fore, quod rationem peripheriæ ad diametrum quam ſingulis quadraturis datam eſſe profitemini, ipſi tamen exhibere non poteſtis; non autor ipſe Quadraturæ, non tot ejus diſcipuli, qui tot jam annis in id incumbunt, ut paucioribus Ilium expugnatum ſit. Datam eſſe rationem, Euclides definivit, cui

poſſumus æqualem invenire. Quis autem ad veſtram illam hoc pertinere credet, quæ irrito labore toto decennio quæſita eſt? Nam quod ſufficere exiſtimatis ſi modo viam commonſtraveritis quâ emensâ ad quæſitum perveniatur, obſtacula vero, atque innumeras difficultates quibus præſepta eſt, non removetis, videte cui perſuadere poſſitis, eâ ratione tetragoniſmi negotium à vobis confectum eſſe. Illud ſanè vos conſequi apparet, ut, dum ultra non proceditis, minus expoſiti ſitis ad promiſcuos omnium inſultus, difficilius etiam à peritioribus oppugnemini, paratioremque habeatis receptum. Facile enim acrius inſtantes proportionum & proportionalitatum veſtrarum tenebris involvere poteſtis, atque efficere ut tandem veluti nox prælium dirimat. Hoc ipſum ne mihi eveniret, cum exetaſin Quadraturæ conſcriberem, metuebam, atque ut caverem operam dedi; id unum conatus, ut, quatenus fieri poſſet, autorem ad abſurdum compellerem, nimirum ut vel nolle ſe vel non poſſe Quadraturam ſuam abſolvere fateretur. Eo fine ignota prius atque informia corpora dimenſus ſum, exhibitiſque prioribus duabus ſolidorum proportionibus, petii ut inde tertiam eliceret, utpote quam cognitis illis notam dixiſſet. Ad quas anguſtias redactum non aliâ ratione defendis, quam expoſtulando mecum quod autori tuo modum præſcribere præſumam quadrandi circulum, ac jubendo denique ut meminerim *quid* & *cui* ſcribam. Ego verò quomodo quadratus fiat circulus, nec didici, nec præſcribo; ſed hoc urgeo; ut quem ille modum ſe inveniſſe contendit, eum reapſe utilem & efficacem eſſe demonſtret. Atque ita, quid ſcripſerim & in quem finem, me non neſciviſſe, ſatis jam tibi conſtare arbitror. Cui vero ſcripſerim, ne hoc quidem puto me oblitum fuiſſe. Vides autem quam hac in parte longe diverſum ſonent Carteſii literæ atque Elogia veſtra: quorum utris potius ſubſcribendum ſit aliorum judicio decerni malim quam meum interponere. Hoc tamen autorem Quadraturæ ſcire velim, tanto majori eruditionis & candoris opinione apud me futurum, quanto maturius ab errore ſuo reſipiſcet. Vale.

*Dat. Hagæ-Com. 2. Oct.*
*1656.*

Digitized by Google

# CHRISTIANI HUGENII,

CONST. F.

DE

# CIRCULI MAGNITUDINE INVENTA.

*ACCEDUNT EJUSDEM*

Problematum quorundam illuſtrium Conſtructiones.



Digitized by Google

Digitized by Google

# PRÆFATIO.

*Circa antiquum Tetragoniſmi problema, quo vel apud Mathematum ignaros nihil eſt celebrius, recens operæ pretium nos feciſſe rati, & quædam hactenus compertis meliora ut putamus conſecuti, Geometris ea demonſtrata impertiri volumus. Namque & ſtudiis eorum profutura arbitramur, & novitate ipſâ ad rerum abditarum inveſtigationem incitamento futura, reputantibus in eo quoque argumento, ubi omnes pridem ſummâ contentione verſati ſint, aliqua ſuperfuiſſe haud indigna diligentiæ præmia. Plurimi quidem antehac inventæ Quadraturæ gloriam ſibi aſſerere conati ſunt, variaque ſubinde commenta protulere, falſis vera miſcentes. Verum à peritioribus omnia vel everſa fuiſſe vel contempta ſcimus, neque aliud adhuc receptum, quo omnis circuli dimenſio niteretur, præter unum illud, majorem eſſe eum inſcripto ſibi polygono, circumſcripto minorem. Nos autem propiorem determinationem nunc exhibemus oſtendimuſque, quod* duobus ſumptis polygonis proportione mediis inter inſcriptum circumſcriptumque ipſis ſimile, minoris eorum perimeter circumferentia circuli major exiſtit, reliquum ve-

ro polygonum eâdem proportione circuli aream exuperat. *Et hoc quidem ut inter ea quæ demonſtraturi ſumus & difficillimum & contemplatione præcipue dignum videatur, alia tamen ſunt non accuratiora modò, ſed quæ & uſu magis probentur; quæ ſane hic in anteceſſum non recenſebimus, quippe in ſequentibus rectius percipienda. Breviter tamen quid ſtudiis Geometriæ conferant expoſuiſſe proderit, cum non minimam habeant utilitatis commendationem. Cum igitur duplicem propoſiti tractationem inſtituerimus, primum ea tradendo quorum demonſtratio conſuetis Geometriæ elementis contenta eſt, deinde centrorum gravitatis quoque conſiderationem adhibendo: in prioribus quidem illud explicatum reperietur, quomodo non tantum circumferentiæ toti, ſed & arcui cuilibet dato recta linea æqualis invenienda ſit; expeditâ ratione ad Mechanicas conſtructiones, quæque vel ſubtiliſſimas earum minime fruſtretur. Quomodo item numeros exercentibus peripheriæ ad diametrum ratio, quam Archimedes ex polygonis laterum* 96 *eruit, per dodecagona ſola comprobari queat. Ex polygonis autem laterum* 10800, *cum iis qui veterem inſiſtunt viam vix hi peripheriæ termini exiſtant* 62831852 *&* 62831855, *ad diametrum partium* 20000000, *noſtrâ Methodo iſti prodiiſſe cernentur,* 6283185307179584, 6283185307179589; *ſemperque duplicem obtineri verorum characterum numerum, quacunque laterum multitudine polygona*

*gona adhibeantur. Quod quidem certâ ratione contingere perſpeximus ſicuti & quadratum cujuſque numeri bis totidem quot latus characteribus plerumque conſtituitur. At majora etiam compendia centrorum gravitatis proprietas ſubminiſtrat, & propius quodammodo ad perfectionem inſuperabilis problematis per hæc acceſſiſſe videmur. Certe ad Archimedeos peripheriæ limites conſtituendos, ſolo nunc inſcripti trigoni cognito latere indigemus. E ſexagintangulo autem inter hoſce eam contineri probamus* 314159265538 & 314159265333, *poſitâ diametro partium* 100000000000, *cum ſolitâ methodo vix iſti producantur* 3145, 3140. *Adeo ut triplus jam & ultra ſit verarum hîc notarum numerus, ſicut per præcedentia duplus; & perpetuo quidem ſucceſſu, haud aliter quam in majoribus numeris cubum ſui lateris triplum eſſe animadvertitur. Ergo poſthac ſi qui falsò circumferentiæ magnitudinem definient, per numeroſa polygona non refutabuntur, ſed calculo brevi miniméque intricato, quemque erroris inſimulare, quod hactenus ferè ſoliti ſunt, haud facile poſſint. Ad hæc ſi quid in ſubtenſarum Canone, quem emendatum haberi quantum referat omnes ſciunt, in eo contexendo ſi quid erit admiſſum aut aliunde perverſum irrepſerit, non difficile erit horum ope reſtituere, cum aliâ nunc ratione ex inſcriptis in circulo longitudinem arcuum quibus ſubtenduntur invenire liceat. Quinimo & omni Canonum auxilio deſtitutis*

*oſtendimus, quo pacto ex lateribus triangulorum datis angulos eorum inveſtigare queant, ut nunquam duorum ſecundorum ſcrupulorum ſit à vero diſſenſus, ſæpe ne unius quidem tertii. Et hæc quidem non levia commoda viſum iri confidimus. Comperimus autem & Renatum Carteſium, cujus viri inventis cum Philoſophia univerſa tum Matheſis plurimùm illuſtrata eſt, nonnulla quæ huc ſpectent ſcriptis mandaſſe. Ea vero defuncto ipſo in commentariis reperta feruntur, neque adhuc reſcire potuimus quâ induſtriâ aut eventu hiſce manum admoverit. Willebrordi autem Snellii geometræ eruditi Cyclometricus extat, multo labore conſcriptus, quique omnis in his eſt. Atque ille non exiguam laudem promeritus videretur, ſi præcipua duo theoremata, quibus omne id opus velut fundamentis ſuperſtructum eſt, demonſtrare potuiſſet. Sed quas ibi pro demonſtrationibus haberi poſtulat, propoſitum minime comprobant: ipſa vero theoremata, ſicut in utroque evidenti ratione nos oſtendimus, præclaram continent veritatem. Et ea quidem ſequentibus meritò inſerenda putavimus, quod cauſa eorum à noſtris pendeant inventis.*

CHRI-

# CHRISTIANI HUGENII,
## Const. F.
## DE
# CIRCULI MAGNITUDINE
# INVENTA.

### Theorema I. Propositio I.

*SI Circuli portioni, ſemicirculo minori, triangulum maximum inſcribatur, & portionibus reliquis triangula ſimiliter inſcribantur, erit triangulum primo deſcriptum duorum ſimul quæ in portionibus reliquis deſcripta ſunt minus quam quadruplum.*

Eſto circuli portio A B C, ſemicirculo minor, cujus diameter B D; maximum autem inſcriptum ſit triangulum A B C, hoc eſt, quod baſin & altitudinem habeat cum portione eandem. Et reliquis duabus portionibus inſcribantur triangula item maxima A E B, B F C. Dico triangulum A B C minus eſſe quam quadruplum triangulorum A E B, B F C ſimul ſumptorum. Jungatur enim E F, quæ ſecet diametrum portionis in puncto G. Quoniam igitur arcus A B bifariam dividitur in E puncto, erit utraque harum E A, E B, major dimidiâ A B. Quamobrem quadratum A B minus erit quam quadruplum quadrati E B vel E A. Sicut autem quadratum A B ad quadr. E B, ita eſt D B ad B G longitudine; quia quadratum quidem A B æquale eſt rectangulo quod à D B & circuli totius diametro continetur, quadratum vero E B æquale rectangulo ſub eadem diametro & recta B G. Minor igitur eſt B D quam quadrupla B G. Sed & A C minor eſt quam dupla E F, quoniam hæc ipſi A B æquatur. Ergo patet triangulum A B C minus eſſe quam octuplum tri- TAB. XXXVIII. Fig. 1.

 anguli

anguli E B F. Huic autem triangulo æquantur ſingula A E B, B F C. Ergo utriuſque ſimul triangulum A B C minus erit quam quadruplum. Quod erat oſtendendum.

### Theor. II. Prop. II.

*Si fuerit circuli portio, ſemicirculo minor, & ſuper eadem baſi triangulum, cujus latera portionem contingant; ducatur autem quæ contingat portionem in vertice: Hæc à triangulo dicto triangulum abſcindet majus dimidio maximi trianguli intra portionem deſcripti.*

Tab. XXXVIII. Fig. 2.

Eſto circuli portio ſemicirculo minor A B C, cujus vertex B. Et contingant portionem ad terminos baſis rectæ A E, C E, quæ conveniant in E: convenient enim quia portio ſemicirculo minor eſt. Porro ducatur F G, quæ contingat ipſam in vertice B; & jungantur A B, B C. Oſtendendum eſt itaque, triangulum F E G majus eſſe dimidio trianguli A B C. Conſtat triangula A E C, F E G, item A F B, B G C æquicruria eſſe, dividique F G ad B bifariam. Utraque autem ſimul F E, E G, major eſt quam F G; ergo E F major quam F B, vel quam F A. Tota igitur A E minor quam dupla F E. Quare triangulum F E G majus erit quarta parte trianguli A E C. Sicut autem F A ad A E, ita eſt altitudo trianguli A B C ad altitudinem trianguli A E C, & baſis utrique eadem A C. Ergo, quum F A ſit minor quam ſubdupla totius A E, erit triangulum A B C minus dimidio triangulo A E C. Hujus vero quarta parte majus erat triangulum F E G. Ergo triangulum F E G majus dimidio trianguli A B C. Quod oſtendendum fuit.

### Theor. III. Prop. III.

*Omnis circuli portio, ſemicirculo minor, ad maximum triangulum inſcriptum majorem rationem habet quam ſeſquitertiam.*

Eſto

Eſto Circuli portio, ſemicirculo minor, cui maximum ſit inſcriptum triangulum A B C. Dico portionem ad dictum triangulum majorem rationem habere quam quatuor ad tria. Inſcribantur enim & reliquis portionibus duabus maxima triangula A D B, B E C. Itaque minus eſt triangulum A B C quam illorum ſimul quadruplum *: ac proinde ſpatium aliquod adjungi poteſt triangulo A B C, quod una cum ipſo minus etiam ſit quam quadruplum dictorum ſimul triangulorum A D B, B E C. Eſto itaque eâ ratione adjectum triangulum A F C, ut totum ſpatium A B C F minus ſit quam quadruplum triangulorum A D B, B E C. Et porro in reſiduis portionibus maxima triangula inſcribi intelligantur; itemque in reſiduis ſemper, donec portiones quibus poſtremùm inſcribentur ſimul minores ſint triangulo A C F, hoc enim fieri poteſt. Itaque & triangula poſtremùm inſcripta ſimul triangulo A C F minora erunt. Quia autem ſpatii A B C F quarta parte majora ſunt duo ſimul triangula A D B, B E C. Rurſuſque quarta horum parte majora triangula quatuor, quæ portionibus reliquis inſcribuntur. Et horum quartâ majora ſimiliter, quæ deinceps: atque ita continue, ſi plura fuerint deſcripta. Erit propterea ſpatium ex quadrilatero A B C F & cæteris inſcriptis triangulis, & triente eorum, quæ poſtremò inſcripta erunt, compoſitum, majus quam ſeſquitertium ipſius quadrilateri A B C F. Hoc enim ab Archimede demonſtratum eſt, quod ſi fuerint ſpatia quotcunque in ratione quadrupla, ea omnia ſimul cum triente minimi ad maximum rationem habebunt ſeſquitertiam. Dividendo itaque, triangula omnia intra portiones A D B, B E C deſcripta cum triente poſtremo diſcriptorum majora erunt tertia parte ſpatii A B C F. Sed triens dictus minor eſt triente trianguli A C F. Igitur dempto illinc triente poſtremò inſcriptorum; à ſpatio autem A B C F ablato triangulo A F C, erunt triangula omnia intra portiones A D B, B E C deſcripta, majora triente trianguli A B C *. Quare componendo, tota figura rectilinea portioni A B C inſcripta major quam ſeſquitertia trianguli A B C, multoque magis portio ipſa. Quod erat demonſtrandum.

TAB. XXXVIII. Fig. 3.

* per 1. huj.

* 33. 5. Elem.

 THEOR.

Digitized by Google

## Theor. IV. Prob. IV.

*Omnis circuli portio, ſemicirculo minor, minor eſt duabus tertiis trianguli eandem cum ipſa baſin habentis, & latera portionem contingentia.*

TAB. XXXVIII. Fig. 4. Eſto circuli portio, ſemicirculo minor, A B C, & contingant ipſam ad terminos baſis rectæ A D, C D, quæ conveniant in puncto D. Dico Portionem A B C minorem eſſe duabus tertiis trianguli A D C. Ducatur enim E F quæ portionem contingat in vertice B, & inſcribatur ipſi triangulum maximum A B C. Quum igitur triangulum E D F majus ſit dimidio trianguli A B C *, manifeſtum eſt ab illo partem abſcindi poſſe, ita ut reliquum tamen majus ſit dimidio dicti A B C trianguli. Sit igitur hoc pacto abſciſſum triangulum E D G. Et ducantur porro rectæ H I, K L, quæ portiones reliquas A M B, B N C in verticibus ſuis contingant, ipſiſque portionibus triangula maxima inſcribantur. Idemque prorſus circa reliquas portiones fieri intelligatur, donec tandem portiones reſiduæ ſimul minores ſint quam duplum trianguli E D G. Erit igitur inſcripta portioni figura quædam rectilinea, atque alia circumſcripta. Et quoniam triangulum E G F majus eſt dimidio trianguli A B C; & rurſus triangula H E I, K F L, majora quam dimidia triangulorum A M B, B N C; idque eadem ſemper ratione in reliquis locum habet, ut triangula ſuper portionum verticibus conſtituta, eorum quæ intra portiones ipſas deſcripta ſunt, majora ſint quam ſubdupla: apparet triangula omnia extra portionem poſita etiam abſque triangulo E G D majora ſimul eſſe quam dimidia triangulorum omnium intra portionem deſcriptorum. Atqui ſegmentorum in portione reliquorum triangulum quoque E G D majus eſt quam ſubduplum. Ergo triangulum E D F ſimul cum reliquis triangulis, quæ ſunt extra portionem, majus erit dimidio portionis totius A B C. Quare multo magis ſpatium à

* Per. 2. huj.

rectis

rectis A D, D C & arcu A B C comprehenſum majus erit portionis A B C dimidio. Ac proinde triangulum A D C majus quam portionis A B C ſeſquialterum. Quod erat demonſtrandum.

## Theor. V. Prop. V.

*Omnis circulus major eſt pylogono æqualium laterum ſibi inſcripto & triente exceſſus quo id polygonum ſuperat aliud inſcriptum ſubduplo laterum numero.*

Eſto circulus centro C; ſitque ipſi inſcriptum polygonum æqualium laterum, quorum unum ſit A B. Atque alterum item polygonum ſit inſcriptum, cujus bina latera A D, D B, ſubtendat A B. Hoc igitur priore polygono majus eſt. Sit autem exceſſus trienti æquale H ſpatium. Dico circulum majorem eſſe polygono A D B una cum ſpatio H. Ducantur enim ex centro rectæ C A, C B. Quoniam igitur portio circuli A D B major eſt quam ſeſquitertia trianguli A D B ſibi inſcripti *; erunt portiones A D, D B, ſimul majores triente trianguli A D B. Quamobrem & ſector C A B major erit utriſque ſimul quadrilatero C A D B & triente trianguli A D B. Sicut autem ſector C A B ad circulum totum, ita eſt quadrilaterum C D B A ad polygonum A D B, & ita quoque triens trianguli A D B ad trientem exceſſus polygoni A D B ſupra polygonum A B. Ergo manifeſtum eſt circulum quoque totum majorem fore polygono A D B una cum triente exceſſus quo polygonum A D B ſuperat polygonum A B, hoc eſt, unà cum ſpatio H. Quod erat demonſtrandum. TAB. XXXVIII. Fig. 5. * per. 3. huj.

## Theor. VI. Prop. VI.

*Omnis circulus minor eſt duabus tertiis polygoni æqualium laterum ſibi circumſcripti & triente polygoni ſimilis inſcripti.*

Eſto

TAB. XXXVIII. Fig. 6. Eſto circulus cujus centrum A, & inſcribatur ipſi polygonum lateribus æqualibus, quorum unum ſit B C; & aliud ſimile circumſcribatur F E G, cujus latera circulum contingant ad occurſum angulorum polygoni prioris. Dico circulum minorem eſſe duabus tertiis polygoni F E G ſimul cum triente polygoni B C. Ducantur namque ex centro rectæ A B, A C. Igitur quoniam ſuper baſi portionis B D C conſiſtit triangulum B E C, cujus latera portionem contingunt, erit ipſa minor duabus tertiis trianguli B E C *. Itaque ſi triangulo A B C addantur duæ tertiæ trianguli B E C, hoc eſt, duæ tertiæ exceſſus quadrilateri A B E C ſupra triangulum A B C; ex utriſque compoſitum ſpatium majus erit ſectore circuli A B C. Idem eſt autem, ſive triangulo A B C addantur duæ tertiæ exceſſus dicti, ſive addantur duæ tertiæ quadrilateri A B E C, contraque auferantur duæ tertiæ trianguli A B C: hinc autem fiunt duæ tertiæ quadrilateri A B E C cum triente trianguli A B C. Ergo apparet ſectorem A B C minorem eſſe duabus tertiis quadrilateri A B E C & triente trianguli A B C. Quare ſumptis omnibus quoties ſector A B C circulo continetur, totus quoque circulus minor erit duabus tertiis polygoni circumſcripti F E G & triente inſcripti B C. Quod erat oſtendendum.

* per. 4. huj.

## Theor. VII. Prop. VII.

*Omnis circuli circumferentia major eſt perimetro polygoni æqualium laterum ſibi inſcripti, & triente exceſſus quo perimeter eadem ſuperat perimetrum alterius polygoni inſcripti ſubduplo laterum numero.*

TAB. XXXVIII. Fig. 7. Eſto circulus A B, centro O, cui inſcribatur polygonum æquilaterum A C D, atque alterum duplo laterum numero A E C B D F. Sitque recta G I æqualis perimetro polygoni A E C B D F, G H vero æqualis perimetro polygoni

goni A C D. Exceſſus igitur perimetrorum eſt H I; cujus triens I K adjiciatur ipſi G I. Dico totâ G K majorem eſſe circuli A B circumferentiam. Inſcribatur enim circulo tertium polygonum æquilaterum A L E M C, quod ſit duplo numero laterum polygoni A E C B D F. Et ſuper lineis G H, H I, I K, triangula conſtituantur quorum communis vertex N, altitudo autem æqualis ſemidiametro circuli A B. Igitur quoniam G H baſis æqualis eſt perimetro polygoni A C D, erit triangulum G N H æquale polygono, cui bis totidem ſunt latera, hoc eſt, polygono A E C B D F. Hoc enim patet, ductis ex centro rectis O A & O E, quarum hæc ſecet A C in P. Nam triangulum quidem A E O æquale eſt triangulo baſin habenti A P & altitudinem radii O E. Quanta autem pars eſt triangulum A E O polygoni A E C B D F, eadem eſt recta A P perimetri A C D. Itaque polygonum A E C B D F æquabitur triangulo cujus baſis æqualis perimetro A C D, altitudo autem radio E O: hoc eſt, triangulo G N H. Eâdem ratione, quoniam baſis G I eſt æqualis polygoni A E C B D F perimetro, & altitudo trianguli G N I æqualis radio circuli, erit triangulum G N I æquale polygono A L E M C. Itaque triangulum H N I æquale exceſſui polygoni A L E M C ſupra polygonum A E C B D F. Trianguli autem H N I ſubtriplum eſt ex conſtr. triangulum I N K. Ergo hoc æquale erit dicti exceſſus trienti. Quare totum triangulum G N K minus erit circulo A B *. Altitudo autem * per 5. huj.
trianguli æqualis eſt circuli ſemidiametro. Ergo evidens eſt rectam G K totâ circuli circumferentiâ minorem eſſe. Quod erat oſtendendum.

Hinc manifeſtum eſt, ſi à ſeſquitertio laterum polygoni circulo inſcripti auferatur triens laterum polygoni alterius inſcripti ſubduplo laterum numero, reliquum circumferentiâ minus eſſe. Idem enim eſt, ſive perimetro majori addatur $\frac{1}{3}$ exceſſus quo ipſa ſuperat perimetrum minorem, ſive addatur $\frac{1}{3}$ perimetri majoris contràque auferatur $\frac{1}{3}$ perimetri minoris. Hinc autem fit ſeſquitertium majoris perimetri minus

nus triente minoris. Quare ſi à ſexdecim inſcripti dodecagoni lateribus duo latera inſcripti hexagoni, hoc eſt, diameter circuli deducatur, reliqua circuli circumferentiâ minor erit, aut ſi ab octo dodecagoni lateribus radius deducatur, reliqua minor erit circumferentiæ ſemiſſe. Hoc autem ad conſtructionem mechanicam utile eſt, quoniam exigua eſt differentia, ſicut poſtea oſtendetur.

Manifeſtum etiam, in omni arcu qui ſemicircumferentiâ minor ſit, ſi ad ſubtenſam addatur triens exceſſus quo ſubtenſa ſinum ſuperat, compoſitam arcu minorem eſſe.

## Theor. VIII. Prop. VIII.

*Circulo dato, ſi ad diametri terminum contingens ducatur, ducatur autem & ab oppoſito diametri termino quæ circumferentiam ſecet occurratque tangenti ductæ: erunt interceptæ tangentis duæ tertiæ cum triente ejus quæ ab interſectionis puncto diametro ad angulos rectos incidet, ſimul arcu abſciſſo adjacente majores.*

TAB. XXXVIII. Fig. 8. Eſto circulus centro A, diametro B C; & ducatur ex C recta quæ circulum contingat C D: huic autem occurrat ducta ab altero diametri termino recta B D, quæ circumferentiam ſecet in E: ſitque E F diametro B C ad angulos rectos. Dico tangentis interceptæ C D duas tertias ſimul cum triente ipſius E F, arcu E C majores eſſe. Jungantur enim A E, E C; & ducatur tangens circulum in E puncto, quæ tangenti C D occurrat in G. Erit igitur G E ipſi G C æqualis, itemque D G; nam ſi centro G circumferentia deſcribatur quæ tranſeat per puncta C, E, eadem tranſibit quoque per D punctum, quoniam angulus C E D rectus eſt. Oſtenſum autem fuit ſuprà, duas tertias quadrilateri A E G C una cum triente trianguli A E C ſimul majores eſſe ſectore A E C *. Eſtque quadrilaterum A E G C æquale triangulo baſin habenti

* per 6. huj.

benti duplam C G, hoc eſt, C D, & altitudinem C A: triangulum vero A E C æquale triangulo baſin ipſi E F æqualem habenti & altitudinem dictam A C. Itaque apparet duas tertias quadrilateri A E G C ſimul cum triente trianguli A E C æquari triangulo qui baſin habeat compoſitam ex duabus tertiis C D & triente E F, altitudinem vero radii A C. Quare ejuſmodi quoque triangulum majus erit ſectore A E C. Unde liquet baſin ipſius, hoc eſt, compoſitam ex duabus tertiis ipſius C D & triente ipſius E F, majorem eſſe arcu C E. Quod erat demonſtrandum.

## Theor. IX. Prop. IX.

*Omnis circuli circumferentia minor eſt duabus tertiis perimetri polygoni æqualium laterum ſibi inſcripti & triente perimetri polygoni ſimilis circumſcripti.*

Eſto Circulus cujus A centrum; & inſcribatur ei polygonum æquilaterum, cujus latus C D: ſimileque aliud circumſcribatur lateribus ad priora parallelis, quorum unum ſit E F. Dico circuli totius circumferentiam minorem eſſe duabus tertiis ambitus polygoni C D & triente ambitus polygoni E F. Ducatur namque diameter circuli B G, quæ ſimul inſcripti polygoni latus C D medium dividat in H, & circumſcripti latus E F in G, (conſtat autem G fore punctum contactus lateris E F,) Et ponatur H L æqualis ipſi H G, & jungantur A C, B C & producantur, occurrátque B C lateri E F in K, producta autem A C incidet in E angulum polygoni circumſcripti. Quoniam igitur H L æqualis H G, erit B L dupla ipſius A H: Ideoque ut G A ad A H, ita G B ad B L. Major autem eſt ratio H B ad B L, quam G B ad B H; quoniam hæ tres ſeſe æqualiter excedunt G B, H B, L B. Itaque major erit ratio G B ad B L, hoc eſt, G A ad A H, quam duplicata rationis G B ad B H. Sicut autem G A ad A H, ita eſt E G ad C H; & ſicut G B TAB. XXXIX. Fig. 1.

ad B H, ita K G ad C H. Ergo major erit ratio E G ad C H, quam duplicata ejus, quam habet K G ad C H. Quare major ratio E G ad K G, quam K G ad C H. Ideoque duæ ſimul E G, C H omnino majores duplâ K G. Et ſumptis omnium trientibus, erunt trientes utriuſque E G & C H ſimul majores duabus tertiis K G. Quamobrem addito utrimque ipſius C H triente, erit triens E G cum duabus tertiis C H, major duabus tertiis K G cum triente C H. Hiſce vero minor etiam eſt arcus C G *. Igitur duæ tertiæ C H ſimul cum triente ipſius E G majores omnino ſunt eodem arcu C G. Unde ſumptis omnibus toties quoties arcus C G circumferentiâ totâ continetur, erunt quoque duæ tertiæ perimetri polygoni C D, cum triente perimetri polygoni E F, majores circuli totius circumferentiâ. Quod fuerat oſtendendum.

* per præced.

Omnis igitur circumferentiæ arcus quadrante minor, minor eſt ſinus ſui beſſe & tangentis triente.

## Problema I. Prop. X.

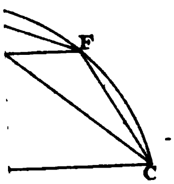
## *Peripheriæ ad diametrum rationem invenire quamlibet veræ propinquam.*

MInorem eſſe peripheriæ ad diametrum rationem quam triplam ſeſquiſeptimam: majorem vero quam $3\frac{10}{71}$, Archimedes oſtendit inſcripto circumſcriptoque 96 laterum polygono. Idem verò hic per dodecagona demonſtrabimus.

Quia enim latus inſcripti circulo dodecagoni majus eſt partibus $5176\frac{3}{8}$, qualium radius continet 10000: duodecim latera proinde, hoc eſt, perimeter inſcripti dodecagoni major erit quam $62116\frac{1}{2}$: perimeter autem hexagoni inſcripti eſt radii ſextupla, ideoque partium 60000. Igitur dodecagoni perimeter perimetrum hexagoni excedit amplius quam partibus $2116\frac{1}{2}$. Quare triens exceſſus major erit quam $705\frac{1}{2}$. Igitur dodecagoni perimeter unà cum triente exceſſus, quo perimetrum hexagoni ſuperat, major erit aggregato partium

$62116\frac{1}{2}$

TAB. XXXVIII.



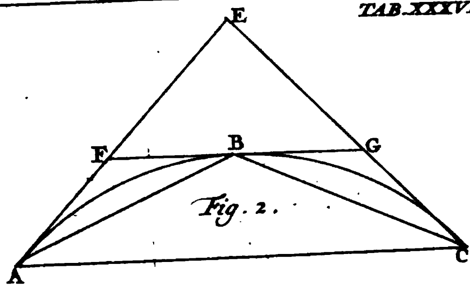
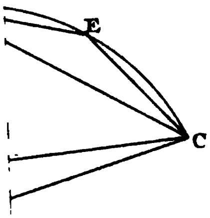




Fig. 2.



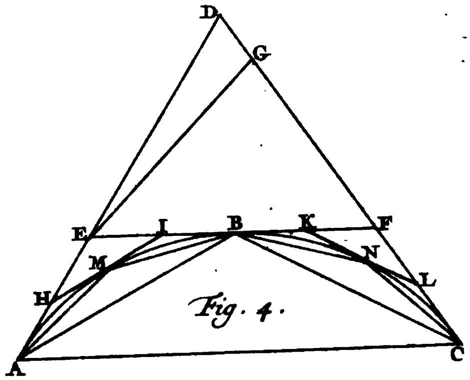




Fig. 4.

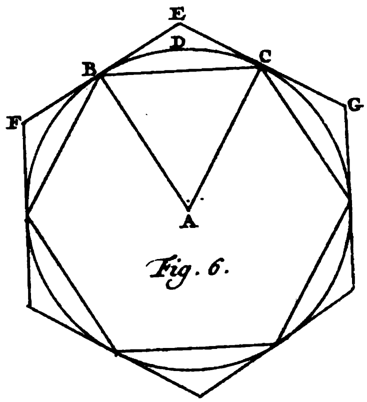



Fig. 6.

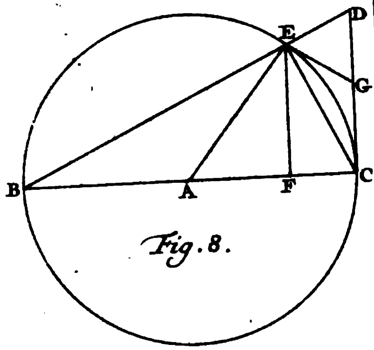



Fig. 8.

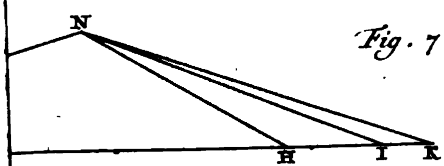
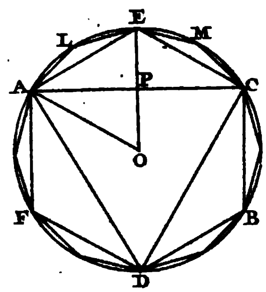



Fig. 7.



$62116\frac{1}{2}$ & $705\frac{1}{2}$, hoc eſt, partibus 62822. Atque hiſce proinde omnino major erit circuli peripheria *. Eſt autem major ratio 62822 ad 20000, longitudinem diametri, quam $3\frac{10}{71}$ ad 1. Ergo omnino etiam peripheriæ ad diametrum ratio major erit. * per 7. huj.

Rurſus quoniam latus dodecagoni inſcripti minus eſt partibus $5176\frac{2}{7}$. Erunt octo latera, hoc eſt, $\frac{2}{3}$ perimetri minora quam $41411\frac{1}{7}$. Item quia latus dodecagoni circumſcripti minus eſt quam 5359, erunt quatuor latera, hoc eſt, triens perimetri minor quam 21436. Quamobrem $\frac{2}{3}$ perimetri dodecagoni inſcripti cum triente perimetri circumſcripti minores erunt quam $62847\frac{1}{7}$. Sed iſtis ſimul minor etiam eſt circuli circumferentia *. Ergo hæc ad diametrum omnino minorem habebit rationem, quam $62847\frac{1}{7}$ ad 20000; & multo minorem proinde, quam $62857\frac{1}{7}$ ad 20000, hoc eſt, quam triplam ſeſquiſeptimam. Demonſtrati itaque ſunt termini Rationis peripheriæ ad diametrum, quos Archimedes ſtatuit. Eoſdem verò poſtmodum ſolius inſcripti trigoni æquilateri latere indagato comprobabimus. Porrò ut propinquior inveniatur ratio plurium laterum polygona conſideranda ſunt. Intelligatur igitur circumſcriptum circulo polygonum aliudque inſcriptum laterum 60. Et præter hæc ſubduplo numero laterum inſcriptum, nempe trigintangulum. * per 9. huj.

Et invenitur quidem latus inſcripti ſexagintanguli majus partibus 10467191, qualium radius 100000000 & latus trigintanguli minus quam 20905693: cujus dimidium $10452846\frac{1}{2}$ eſt ſinus arcus æquantis $\frac{1}{60}$ circumferentiæ. Subtenſa autem erat 10467191. Ergo differentia $14344\frac{1}{2}$ minor verâ: & triens differentiæ $4781\frac{1}{2}$, qui additus ad ſubtenſam 10467191 facit $10471972\frac{1}{2}$. Quibus itaque major eſt arcus $\frac{1}{60}$ circumferentiæ. Ductis autem $10471972\frac{1}{2}$ ſexagies fiunt 628318250. Hiſce igitur partibus omnino major eſt circumferentia tota.

Rurſus quoniam latus inſcripti 60 anguli minus eſt quam 10467192, erunt duæ tertiæ ipſius minores quam 6978128. Circumſcripti autem 60 anguli latus cum ſit minus quam 10481556, erit triens ipſius minor quam 3493852. Quibus

 addi-

additis ad 6978128, fiunt 10471980. Hæ igitur omnino excedunt $\frac{1}{60}$ circumferentiæ, & ſexagecuplum ipſarum, hoc eſt 628318800 majus erit circumferentiâ totâ. Quod ſi verò polygona adhibeamus laterum 10800, quorum inſcripti quidem latus, calculo Ludolphi Colonienſis, Arithmetici nobilis, inventum eſt partium 58177640912684919 non unâ amplius, ſubtenditurque duobus ſcrup. primis; circumſcripti autem latus 58177643374063182 non unâ minus. Prætereaque latus polygoni ſubduplo laterum numero inſcripti, quod eſt 116355276902613523 non unâ minus. Hinc peripheriæ longitudo invenitur major quam partium 6283185307179584; minor autem quam 6283185307179589, qualium radius 1000000000000000. Solitâ autem methodo ex additis inſcripti circumſcriptique polygoni iſtius lateribus, invenietur tantum majorem eſſe peripheriam partibus 62831852, & minorem 62831855. Patet igitur notarum verarum amplius quam duplum numerum eſſe à nobis inventum. Hoc autem & in præcedentibus ita ſe habet, ſemperque evenire neceſſe eſt quotcunque laterum polygonis utamur. At per ea, quæ poſtea trademus, triplum numerum notarum facile obtineri apparebit.

## Problema II. Prop. XI.

### *Rectam ſumere peripheriæ dati circuli æqualem.*

Oſtenſum eſt ſuperius, quod octo inſcripti dodecagoni latera dempto circuli radio minora ſunt peripheriâ dimidiâ. In conſtructione autem ut plurimum defectus animadverti nequit. Nam ſi quatermilleſima diametri pars accedat longitudini ſic inventæ, jam dimidiam peripheriam excedet. Quod ſic fiet manifeſtum. Quarum partium radius eſt 10000, earum latus dodecagoni inſcripti circulo eſt amplius quam $5176\frac{3}{8}$. Unde latera octo majora quam 41411. & dempto radio 10000, erit reliqua major quam 31411. cui ſi addantur partes 5, hoc eſt, $\frac{1}{4000}$ diametri, fient jam 31416; quibus minorem eſſe circumferentiam dimidiam liquet ex præcedentibus. Latus autem

Digitized by Google

tem dodecagoni inſcripti facile invenitur, quia radius peripheriæ ſextantem ſubtendit. Eſtque hæc ratio accuratior quam ſi triplâ ſeſquiſeptimâ utamur. Nam ſecundum eam excedetur $\frac{1}{2}$ peripheriæ longitudo amplius quam $\frac{1}{100}$ diametri.

## Aliter.

Eſto datus circulus cujus B C diameter. Dividatur ſemicircumferentia B C bifariam in D. reliqua vero trifariam in E & F. Et jungantur D E, D F, quæ ſecent diametrum in G & H. Erit trianguli G D H latus alterum una cum baſi G H quadrante B D exiguo majus, neque enim excedet $\frac{1}{5000}$ diametri B C. Sciendum eſt enim fieri D G vel D H duobus inſcripti dodecagoni lateribus æquales. G H autem lateri dodecagoni circumſcripti. Unde quidem junctas D G & G H majores eſſe conſtat quadrante B D. Nam quia per 8. huj. octo latera dodecagoni circulo inſcripti cum quatuor lateribus circumſcripti majora ſunt peripheriâ totâ, ideo ſumptâ omnium quartâ parte erunt quoque duo latera inſcripti cum latere uno circumſcripti majora peripheriæ quadrante. Porro quoniam latus inſcripti dodecagoni minus eſt quam partium 51764 qualium B C 200000: erunt latera duo, hoc eſt, G D, minor quam 103528. Circumſcripti autem dodecagoni latus minus eſt partibus 53590, ipſa nimirum G H. Itaque junctæ una D G, G H efficiunt minus quam 157118. At quadrantem B D conſtat ex præcedentibus majorem eſſe quam 157079. Ergo differentia minor eſt quam partium 39, cum 40 demum efficiant $\frac{1}{5000}$ diametri B C. TAB. XXXIX. Fig. 2.

## Aliter.

Tribus ſemidiametris addatur $\frac{1}{10}$ lateris inſcripti quadrati; compoſita ſemicircumferentiæ æquabitur tam propè, ut non $\frac{1}{10000}$ diametri brevior ſit. Latus quadrati eſt majus quam partium 141421 qualium radius 100000, unde quod dictum eſt facile demonſtratur.

Vel

Digitized by Google

Vel potius ſex ſemidiameſtris addatur ¼ dicti lateris quadrati inſcripti ut habeatur recta æqualis peripheriæ toti.

## PROBLEMA III. PROP. XII.

### *Dato arcui cuicunque rectam æqualem ſumere.*

TAB. XXXIX. Fig. 3. Eſto datus circumferentiæ arcus C D, primum quadrante minor, cui rectam æqualem ſumere oporteat. Dividatur arcus C D bifariam in E, ſitque ſubtenſæ C D æqualis recta F G. Duabus vero C E, E D, quæ ſubtendunt arcus dimidios, æqualis F H. Et ipſi F H jungatur H I triens exceſſus G H. Erit tota F I arcui C D æqualis ferè: adeo ut unâ ſui particulâ, qualium 1200 continet, aucta, major futura ſit, etiamſi arcus C D quadranti æqualis detur. In minoribus autem arcubus minor erit differentia. Nam ſi fuerit datus non major peripheriæ ſextante, linea inventa minus quam $\frac{1}{6000}$ ſui parte à vera arcus longitudine deficiet. Et minores quidem eſſe arcubus rectas eo modo inventas conſtat ex Theoremate 7. huj. De quantitate autem differentiæ eſt oſtendendum.

Primum itaque ponendo arcum C D quadranti peripheriæ æqualem, erit C D recta, hoc eſt, F G, latus quadrati circulo inſcripti, & minor proinde quam partium 141422, qualium radius circuli 100000. C E autem vel E D latus inſcripti octogoni, ideoque major quam 76536. Eſt autem duplæ E D æqualis F H. Ergo hæc major quam 153072. Quare exceſſus G H major quam 11650: Et hujus triens H I major quam 3883. Ideoque tota F I major quam 156955. Arcus autem C D cum quadranti æqualis ponitur, minor eſt quam 157080. Itaque minus ab hoc diſcrepat recta F I quam partibus 125, qualium ipſa eſt 156955. Quæ utique minus efficiunt quam $\frac{1}{1200}$ ipſius F I.

Si vero ſextans peripheriæ ſit arcus C D, erit recta C D, hoc eſt, F G, latus hexagoni inſcripti, ideoque partium 10000, & CE vel E D latus dodecagoni, ac proinde major

jor quam $5176\frac{3}{8}$. cujus dupla F H major quam $10352\frac{3}{4}$. unde G H major quam $352\frac{3}{4}$; & H I major quam $117\frac{7}{12}$. Tota igitur F I major quam $10470\frac{1}{3}$. Arcus autem C D, ſextans peripheriæ, minor eſt quam 10472. Ergo deficiunt lineæ F I partium earundem pauciores quam $1\frac{2}{3}$. Quæ non æquant $\frac{1}{1000}$ F I. Porro cum arcus quadrante major datus erit, dividendus eſt in partes æquales 4 vel 6 vel plures, prout accuratiori dimenſione uti voluerimus; ſed numero pares: Earumque partium ſubtenſis ſimul ſumptis adjungendus eſt triens exceſſus quo ipſæ ſuperant aggregatum earum quæ arcubus duplis ſubtenduntur. Ita namque componetur longitudo arcus totius. Vel hac etiam ratione eadem habebitur, ſi arcus reliqui ad ſemicircumferentiam longitudo inveniatur aut ſupra eandem exceſſus, aut reliqui ad circumferentiam totam, ſi dodrante major fuerit datus; eaque longitudo adjungatur vel auferatur à dimidiæ vel totius circumferentiæ longitudine, quam antea invenire docuimus.

## Theor. X. Prop. XIII.

*Latus Polygoni æquilateri circulo inſcripti, proportione medium eſt inter latus polygoni ſimilis circumſcripti, & dimidium latus polygoni inſcripti ſub duplo laterum numero.*

IN circulo cujus centrum A, radius A B, ſit latus inſcripti polygoni æquilateri B C; & latus circumſcripti ſimilis polygoni D E ipſi B C parallelum. Ergo producta A B tranſibit per D, & A C per E. Et ſi ducatur C F ipſi A B ad angulos rectos, ea erit dimidium latus polygoni inſcripti ſubduplo numero laterum. Itaque oſtendendum eſt, B C mediam eſſe proportione inter E D & C F. Ducatur A G, quæ dividat E D bifariam, itaque erit ipſa quoque circuli ſemidiameter & æqualis A B. Et quoniam eſt ut E D ad C B, ſic D A ad A B, hoc eſt. D A ad A G; ſicut autem D A TAB. XXXIX. Fig. 4.

ad A G, ita B C ad C F, propter triangulos ſimiles D A G, B C F. Erit proinde ut E D ad C B, ita quoque C B ad C F. Quod erat demonſtrandum.

### Lemma.

TAB. XXXIX. Fig. 5.

Eſto linea B C diviſa æqualiter in R; & inæqualiter in F, ſitque ſegmentum majus F C; & fiat B O æqualis utrique ſimul B C, C F; B M vero utrique B C, C R. Dico majorem eſſe rationem R B ad B F, quam triplicatam ejus, quam habet O B ad B M. Sumatur enim ipſi O M æqualis utraque harum M L, L P. Quoniam igitur M O ipſi R F æqualis eſt, (nam hoc ex conſtructione intelligitur) erit P O tripla ipſius F R. Sed & B M tripla eſt B R. Ergo ut B R ad B M, ita F R ad P O. Et permutando ut B R ad F R, ſic B M ad P O. Major autem eſt B O quam B M. Ergo major erit ratio B O ad O P, quam B R ad R F: & per converſionem rationis minor O B ad B P, quam R B ad B F. Porro quoniam æquales ſunt O M, M L, major erit ratio B O ad O M, quam B M ad M L: & per converſionem rationis minor O B ad B M, quam M B ad B L. Eodem modo minor adhuc oſtendetur ratio M B ad B L, quam L B ad B P. Itaque omnino ratio triplicata ejus quam habet O B ad B M minor erit quam compoſita ex rationibus O B ad B M, B M ad B L, & B L ad B P, hoc eſt, quam ratio O B ad B P. Major autem erat R B ad B F, quam O B ad B P. Ergo omnino major erit ratio R B ad B F, quam triplicata rationis O B ad B M. Quod erat propoſitum.

### Theor. XI. Prop. XIV.

*Omnis circuli circumferentia minor eſt minore duarum mediarum proportionalium inter perimetros polygonorum ſimilium, quorum alterum ordinate circulo inſcriptum ſit, alterum circumſcriptum.*

Digitized by Google

*ptum. Et circulus minor eſt polygono iſtis ſimili cujus ambitus majori mediarum æquetur.*

Eſto circulus B D, cujus centrum A. Et inſcribatur ei polygonum æquilaterum B C D L, ſimileque circumſcribatur lateribus parallelis H K M N. Sitque perimetro polygoni H K M N æqualis recta T, perimetro autem B C D L æqualis Z. Et inter Z & T duæ ſint mediæ proportionales X & V, quarum X minor. Dico circumferentiam circuli B D minorem eſſe rectâ X. Et ſi fiat polygonum in quo Y, cujus perimeter æquetur rectæ V, ſimile autem ſit polygono B C D L aut H K M N; Dico circulum B N minorem haberi polygono Y. Ducatur enim diameter circuli P E, quæ dividat bifariam latera parallela B C, H K, inſcripti circumſcriptique polygoni in R & E; erit autem E punctum contactus lateris H K, & B C ſecabitur in R ad angulos rectos. Ducatur etiam ex centro recta A C K, quæ utriuſque polygoni angulos C & K bifariam ſecet, nam hoc ab eadem recta fieri conſtat; & jungatur C E. Ipſi autem C E ponatur æqualis C F; ſitque duabus his C R, C F tertia proportionalis C G. Ergo qualis polygoni inſcripti latus eſt C E ſive C F, talis circumſcripti latus erit C G*. Ideoque duæ tertiæ C F cum triente C G ſimul majores erunt arcu E C *. Sit autem duabus tertiis C F cum triente C G æqualis recta S. Ergo & hæc major erit arcu E C.

TAB. XXXIX. Fig. 6.

* per 11. huj.

* per 9. huj.

Et quoniam ſe habet C R ad C F, ut C F ad C G; erit quoque dupla C R una cum C F ad triplam C R, hoc eſt, utraque ſimul B C, C F ad utramque B C, C R, ut dupla C F una cum C G ad triplam C F: vel ſumptis horum trientibus, ut $\frac{2}{3}$ C F una cum $\frac{1}{3}$ C G ad C F, hoc eſt, ut S ad C F. Quare etiam triplicata ratio ejus quam habet utraque ſimul B C, C F ad utramque B C, C R eadem erit triplicatæ rationi S ad C F. Major autem eſt ratio R B ad B F quam triplicata ejus, quam habet utraque ſimul B C, C F ad utramque B C, C R *. Ergo major eadem ratio R B ad B F quam triplicata ejus quam habet S ad

* per lemma præc.

C F, hoc eſt, quam cubi S ad cubum C F. Sicut autem R B ad B F, ita eſt cubus R B ad id quod fit ex quadrato R B in B F. Ergo major quoque ratio cubi R B ad quadratum R B in B F, quam cubi S ad cubum C F. Quadrato autem R B in B F minus eſt rectangulum ſub R B, B G, in F C; quod ſic oſtenditur. Quia enim proportionales ſunt R C, C F, C G, Erit id quo major mediam excedit, hoc eſt F G, major quam quo media minimam, hoc eſt, quam F R. Major autem eſt F C quam F B. Ergo omnino major erit ratio C F ad F R, quam B F ad F G. Et per converſionem rationis, minor ratio F C ad C R, quam F B ad B G. Et permutando minor F C ad F B, quam C R ſeu R B ad B G: hoc eſt, (ſumptâ communi altitudine B R) quam quadrati R B ad rectangulum R B G. Unde quod fit ex rectangulo R B G in F C minus erit quam quod ex quadrato R B in F B, uti dictum fuit. Quum itaque major oſtenſa fuerit ratio cubi R B ad quadratum R B in B F, quam cubi S ad cubum C F; omnino quoque major erit ratio cubi R B ad ſolidum ſub rectangulo R B G in F C, quam cubi S ad cubum C F. Et permutando major ratio cubi R B ad cubum S, quam rectanguli R B G in F C ad cubum C F; hoc eſt, quam rectanguli R B G ad quadratum C F. Eſt autem quadrato C F æquale rectangulum G C R, hoc eſt rectangulum ſub G C, R B, quia proportionales ſunt C R, C F, C G. Itaque major erit ratio cubi R B ad cubum S, quam rectanguli R B G ad rectangulum ſub G C, R B, hoc eſt, quam B G ad G C. Sicut autem B G ad G C, ita R C ad E K. Quia enim eſt C R ad C G, ut quadratum C R ad quadratum C F ſeu quadratum C E: ut autem quadratum C R ad quadratum C E, ita eſt P R ad P E diametrum: Erit idcirco C R ad C G, ut P R ad P E. Unde dupla C R, hoc eſt, C B ad C G, ut dupla P R ad P E, hoc eſt, ut P R ad P A. Et dividendo, B G ad G C, ut R A ad A P, ſeu A E, hoc eſt, ut R C ad E K, quod dicebamus. Itaque major quoque ratio cubi R B ad cubum S, hoc eſt, ratio triplicata

R B

R B ad S, quam R C ad E K. Eſt autem S major oſtenſa arcu E C. Ergo omnino major erit ratio triplicata R B ſeu R C ad æqualem arcui E C, quam R C ad E K. Sicut autem R C ad arcum E C, ita eſt perimeter polygoni B C D L, hoc eſt, linea Z ad circumferentiam circuli B D; Et ſicut R C ad E K, ita perimeter polygoni B C D L ad perimetrum polygoni H K M N, hoc eſt, ita Z ad T. Ergo major quoque triplicata ratio Z ad circumferentiam totam B D, quam Z ad T. Ratio autem triplicata Z ad X eadem eſt rationi Z ad T. Itaque major eſt ratio ipſius Z ad dictam circumferentiam, quam Z ad X. Ac proinde circumferentia minor quam recta X. Quod erat demonſtrandum.

Sciendum eſt autem ipſam X minorem eſſe duabus tertiis Z & triente T: hoc eſt, duabus tertiis perimetri polygoni inſcripti & triente circumſcripti, quibus alioqui minorem eſſe circuli circumferentiam conſtat ex præcedentibus. Nam $\frac{2}{3}$ Z cum $\frac{1}{3}$ T æquantur minori duarum mediarum ſecundum Arithmeticam proportionem, quæ major eſt minore mediarum ſecundum proportionem Geometricam.

Jam vero & de polygono Y demonſtrabimus, ipſum videlicet circulo B D majus eſſe. Quia enim polygonum Y habet ad polygonum ſimile H K M N rationem duplicatam ejus quam perimeter ad perimetrum: perimeter autem polygoni Y æquatur rectæ V, & perim. H K M N ipſi T. habebit proinde polygon. Y ad polyg. H K M N rationem duplicatam ejus quam V ad T, hoc eſt, eam quam X ad T. Sicut autem polygonum H K M N ad circulum B D, ita eſt perimeter ipſius polygoni, hoc eſt, linea T ad circuli B D circumferentiam; quoniam polygonum æquale eſt triangulo baſin habenti perimetro ſuæ æqualem & altitudinem radii A E, circulus autem æqualis ejuſdem altitudinis triangulo cujus baſis circumferentiæ æquetur. Ex æquali igitur, erit polygonum Y ad circulum B D ſicut X ad circumferentiam B D. Eſt autem X major oſtenſa quam B D circumferentia. Ergo & polygonum Y majus erit circulo B D. Quod erat demonſtrandum.



Digitized by Google

Ex his manifeſtus eſt Orontii Finei error, qui circumferentiæ quadrantem æqualem minori duarum proportione mediarum inter inſcripti & circumſcripti quadrati latera prodidit, circulum vero æqualem quadrato quod fieret à majori.

### Theor. XII. Prop. XV.

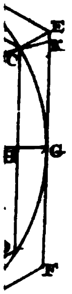
*SI inter productam circuli diametrum & circumferentiam recta aptetur radio æqualis, & producta circulum ſecet, occurratque tangenti circulum ad alterum diametri terminum: Intercipiet ea partem tangentis arcu adjacente abſciſſo majorem.*

TAB. XXXIX. Fig. 7. Eſto deſcriptus circulus centro C, cujus diameter A B. Hæc autem producatur verſus A, interque ipſam & circumferentiam ponatur E D recta radio A C æqualis. Quæ producta ſecet circumferentiam in F, occurratque tangenti in G, ei nimirum quæ circulum contingit ad diametri terminum B. Dico tangentem B G majorem eſſe arcu B F. Ducatur enim per centrum recta H L parallela E G, quæ circumferentiæ occurrat in punctis H, M: tangenti vero B G in L. Et jungatur D H, quæ diametrum ſecet in K. Similes itaque ſunt trianguli E D K, C H K, quoniam angulos ad K æquales habent, & angulum E æqualem angulo C. Sed & latus E D æquale eſt lateri H C, ſuntque hæc latera æqualibus angulis ſubtenſa. Ergo æquale etiam latus D K lateri K H. Itaque C A ſecat bifariam ipſam D H, itemque arcum D A H. Arcus igitur D H ſive huic æqualis F M duplus eſt ad arcum A H. Ipſi autem A H æqualis eſt arcus M B. Igitur arcus F B triplus erit ad arcum A H. Porro quoniam H K ſinus eſt arcus H A, ejuſdemque tangenti æquatur L B, erunt duæ tertiæ H K & triens
* per 9. huj. L B ſimul majores arcu A H *. Quare ſumptis omnium triplis erit dupla H K, hoc eſt, H D ſive G L una cum L B major arcu A H triplo, hoc eſt, arcu F B. Apparet igitur totam G B arcu F B majorem eſſe.

Hoc

Digitized by Google

TAB. XXXIX.



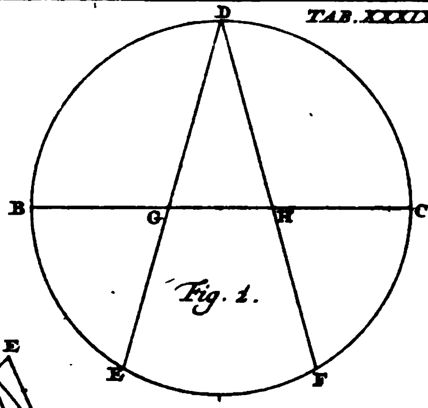




Fig. 1.

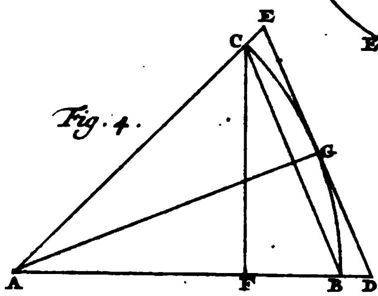



Fig. 4.

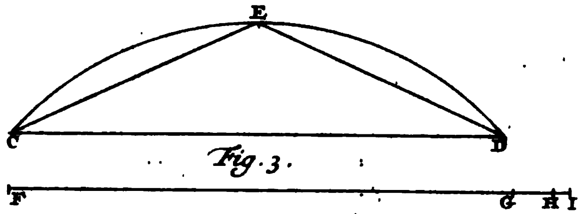
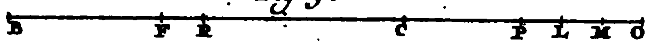



Fig. 3.

Fig. 5.



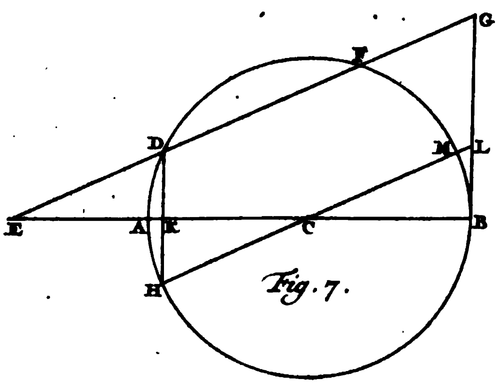




Fig. 7.



Digitized by Google

Hoc Theorema alterum eſt ex iis quibus Cyclometria Willebrordi Snellii tota innititur, quæque demonſtraſſe ipſe videri voluit, argumentatione uſus quæ meram quæſiti petitionem continet. Sed & alterum ſubjungemus, quod utile eſt imprimis & contemplatione digniſſimum.

### Theor. XIII. Prop. XVI.

*SI diametro circuli ſemidiameter in directum adjiciatur, & ab adjectæ termino recta ducatur quæ circulum ſecet, occurratque tangenti circulum ad terminum diametri oppoſitum: Intercipiet ea partem tangentis arcu adjacente abſciſſo minorem.*

Eſto circulus, cujus diameter A B; quæ producatur, & ſit A C ſemidiametro æqualis. Et ducatur recta C L, quæ circumferentiam ſecundò ſecet in E; occurratque tangenti in L, ei nimirum quæ circulum contingit in termino diametri B. Dico interceptam B L arcu B E minorem eſſe. Jungantur enim A E, E B, poſitâque A H ipſi A E æquali ducatur H E & producatur, occurratque tangenti in K. Denique ſit E G diametro A B ad angulos rectos, E D vero tangenti B L. Quoniam igitur iſoſceles eſt triangulus H A E, erunt anguli inter ſe æquales H & H E A. Quia autem angulus A E B rectus eſt, etiam recto æquales erunt duo ſimul H E A, K E B. Verùm duo quoque iſti H & H K B uni recto æquantur, quoniam in triangulo H K B rectus eſt angulus B. Ergo demptis utrimque æqualibus, hinc nimirum angulo H, inde angulo H E A, relinquentur inter ſe æquales anguli K E B, H K B. Triangulus igitur iſoſceles eſt K B E, ejuſque latera æqualia E B, B K. Eſt autem B D æqualis E G. Ergo D K differentia eſt quâ B E excedit E G. Porro quoniam eſt A G ad A E, ut A E ad A B, erunt duæ ſimul A G, A B majores duplâ A E *. Ideoque A E, hoc eſt, A H minor quam dimidia utriuſque ſimul

TAB. XL. Fig. 1.

* 25. 5. Elem.

ſimul A G, A B; hoc eſt, minor quam C A cum dimidia A G. Quare ablatâ utrimque C A, erit C H minor dimidiâ A G. C A vero dimidiâ A G major eſt. Ergo ſi addatur A C ad A G, erit tota C G major quam tripla ipſius C H. Quia autem ut H G ad G E, ita eſt E D ad D K; ut autem G E ad G C, ita L D ad D E: Erit ex æquo in proportione turbata ut H G ad G C, ita L D ad D K. Et per converſionem rationis & dividendo, ut G C ad C H, ita D K ad K L. Ergo etiam D K major quam tripla K L. Erat autem D K exceſſus ipſius E B ſupra E G. Ergo K L minor eſt triente dicti exceſſus. K B autem æqualis eſt ipſi E B ſubtenſæ. Ergo K B unà cum K L, hoc eſt, tota L B omnino minor erit arcu B E*. Quod erat demonſtrandum.

* per 7. huj.

Perpenſo autem Theoremate præcedenti, liquet non poſſe ſumi punctum aliud in producta B A diametro, quod minus à circulo diſtet quam punctum C, eandemque ſervet proprietatem, ut nimirum ductâ C L fiat tangens intercepta B L ſemper minor arcu abſciſſo B E.

Porro uſus hujus Theorematis multiplex eſt, cum in inveniendis triangulorum angulis quorum cognita ſint latera, idque citra tabularum opem, tum ut latera ex angulis datis inveniantur, vel cuilibet peripheriæ arcui ſubtenſa aſſignetur. Quæ omnia à Snellio in Cyclometricis diligenter pertractata ſunt.

## THEOREMA XIV. PROPOS. XVII.

*Portionis circuli centrum gravitatis diametrum portionis ita dividit, ut pars quæ ad verticem reliquâ major ſit, minor autem quam ejuſdem ſeſquialtera.*

TAB. XL. Fig. 2.

Eſto circuli portio A B C, (ponatur autem ſemicirculo minor, quoniam cæteræ ad propoſitum non faciunt) & diameter portionis ſit B D, quæ bifariam ſecetur in E. Itaque oſten-

Digitized by Google

oſtendendum eſt primò centrum gravitatis portionis A B diſtare à vertice B ultra punctum E; nam, quod in diametro ſitum ſit, alibi oſtendimus. Ducatur per E recta baſi parallela, quæ utrimque circumferentiæ occurrat in punctis F & G. Per quæ ducantur K I, H L baſi A C ad angulos rectos, atque hæ cum ea, quæ portionem in vertice contingit, conſtituant rectangulum K L. Quoniam igitur portio ſemicirculo minor eſt, conſtat rectanguli dicti dimidium F L contineri intra ſegmentum A F G C, atque inſuper ſpatia quædam A F I, L G C. Alterum vero rectanguli K L ſemiſſem K G complecti ſegmentum F B G unà cum ſpatiis F B K, B G H. Quæ ſpatia quum ſint tota ſupra rectam F G, etiam centrum commune gravitatis eorum ſupra eandem ſitum erit. Eſt autem E punctum in ipſa F G centrum grav. totius rectanguli K L. Igitur ſpatii reliqui B F I L G B centrum grav. erit infra rectam F G. Sed & ſpatiorum A F I, L G C commune gravitatis centrum eſt infra eandem F G. Ergo magnitudinis ex ſpatiis hiſce & dicto ſpatio B F I L G B compoſitæ, quæ eſt portio ipſa A B C, centrum gravitatis infra lineam F G reperiri neceſſe eſt; ideoque infra E punctum.

Eadem verò diameter B D ſecetur nunc in S, ita ut B S ſit ſeſquialtera reliquæ S D. Dico centrum grav. portionis A B C minus diſtare à vertice B quam punctum S. Sit enim B D P totius circuli diameter. & ducatur per S recta baſi parallela quæ circumferentiæ occurrat in F & G. Et parabole intelligatur cujus vertex B, axis B D, rectum vero latus æquale S P. Et occurat baſi portionis in H & K. Quoniam igitur quadratum F S æquale eſt rectangulo B S P, hoc eſt, ei quod ſub B S & latere recto parabolæ continetur, tranſibit ea per F punctum, itemque per G. Partes autem lineæ parabolicæ B F, B G intra circumferentiam cadent, ſed reliquæ F H, G K erunt exteriores. Hoc enim oſtenditur ductâ inter B & S ordinatim applicatâ N L, quæ circumferentiæ occurrat in N, parabolæ autem in M. Nam quia quadratum N L æquale eſt rectangulo B L P, quadratum vero TAB. XL. Fig. 1.

M L rectangulo contento lineis B L, S P: rectangulum autem B L P majus eo quod ſub B L, S P continetur: erit quadratum N L majus quadrato M L, & N L linea major quam M L. Idem autem continget ubicunque inter B & S aliqua ordinatim applicabitur. Igitur partem circumferentiæ B F totam extra parabolam ferri neceſſe eſt, eâdemque ratione partem B G. Rurſus quia rectangulum B D P æquale eſt quadrato D A; rectangulum verò ſub B D, S P contentum quadrato D H; erit H D major quam A D potentiâ, ideoque & longitudine. Idemque eveniet ubicunque inter S, D, ordinatim aliqua applicabitur. Quare partes circumferentiæ F A, itemque G C intra parabolam cadent. Fiunt igitur ſpatia quædam F N B M, & B Q G, itemque alia H F A, G C K. Quorum hæc cum tota ſint infra lineam F G, etiam centrum commune gravitatis eorum infra eandem erit. At parabolicæ portionis H B K centrum grav. eſt in ipſa F G, nimirum S punctum *. Ergo partis reliquæ A F M B Q G C centrum grav. erit ſupra rectam F G. Sed ſupra hanc ſitum quoque apparet centrum grav. ſpatiorum F M B N, B Q G, quum tota ſint ſupra ipſam F G. Ergo & ſpatii ex hiſce duobus & A F M B Q G C compoſiti, hoc eſt, portionis circuli A B C centrum grav. ſupra lineam F G reperietur: quumque ſit in B D diametro, minus aberit à vertice B quam punctum S. Quod erat oſtendendum.

* 8. lib. 2. Archim. de Æquipond.

## Theor. XV. Propos. XVIII.

*Circuli portio ſemicirculo minor ad inſcriptum triangulum maximum majorem rationem habet quam ſeſquitertiam, minorem vero quam diameter portionis reliquæ tripla ſeſquitertia ad circuli diametrum cum tripla ea, quæ à centro circuli pertingit ad portionis baſin.*

Sit

Digitized by Google

Sit portio ſemicirculo minor, cui inſcriptum triangulum maximum A B C. Diameter autem portionis ſit B D; & diameter circuli à quo portio reſecta eſt, B F, centrum E. Oſtendendum eſt primo, portionis A B C ad triangulum inſcriptum majorem eſſe rationem quam ſeſquitertiam. Eſto portionis A B C centrum grav. punctum G, & ſecetur D F in H, ut ſit H D dupla reliquæ H F. TAB. XL. Fig. 4.

Quoniam igitur F B eſt dupla E B, D B autem minor quam dupla G B. Erit major ratio F B ad B D, quam E B ad B G. Et per converſionem rationis, minor B F ad F D, quam B E ad E G. Et permutando minor B F ad B E, (quæ proportio dupla eſt) quam F D ad E G. Igitur F D major eſt quam dupla E G. Ipſius autem F D duas tertias continet H D. Ergo H D major eſt quam ſeſquitertia E G. Sicut autem H D ad E G, ita eſt portio A B C ad inſcriptum ſibi triangulum: hoc enim antehac demonſtravimus in Theorematis de Hyperboles Ellipſis & Circuli quadratura *. Itaque major eſt ratio portionis ad inſcriptum triangulum A B C quam ſeſquitertia.

* Vide ſupra p. 324.

Quod autem ad triangulum A B C portio minorem habeat rationem quam tripla ſeſquitertia ipſius D F ad diametrum circuli B F unà cum tripla E D, id nunc oſtendemus. Secetur diameter portionis in R, ut B R ſit ſeſquialtera reliquæ R D. Ergo cadit R punctum inter G & D * quoniam poſitum fuit G centrum gravitatis in portione A B C. Quumque portionis ad inſcriptum triangulum eadem ſit ratio, quæ H D ad E G, ut modo dictum fuit, minor autem ſit ratio H D ad E G, quam H D ad E R: Erit propterea minor quoque portionis ad inſcriptum triangulum ratio quam H D ad E R, ſive quam H D quinquies ſumpta ad quintuplam E R. Atqui H D, (cum ſit æqualis duabus tertiis D F) quinquies ſumpta æquabitur decem tertiis, hoc eſt, triplæ ſeſquitertiæ D F. E R verò quæ continet E D & duas quintas ipſius D B, ſi quinquies ſumatur, æquabitur duplæ B D & quintuplæ E D; hoc eſt, duplæ totius E B atque inſuper triplæ E D. Igitur appa-

* per præced.

 ret

Digitized by Google

ret portionem A B C ad inſcriptum triangulum minorem habere rationem quam triplam ſeſquitertiam D F ad duplam E B, hoc eſt, diametrum B F, unà cum tripla E D. Quod erat demonſtrandum.

## Theor. XVI. Propos. XIX.

*Arcus quilibet ſemicircumferentiâ minor, major eſt ſuâ ſubtenſâ ſimul & triente differentiæ quâ ſubtenſa ſinum excedit. Idem verò minor quam ſubtenſa ſimul cum ea quæ ad dictum trientem ſeſe habeat, ut quadrupla ſubtenſa juncta ſinui ad ſubtenſam duplam cum ſinu triplo.*

TAB. XL. Fig. 5. Eſto circulus cujus D centrum, diameter F B. Et ſit arcus B A ſemicircumferentiâ minor, cui ſubtenſa ducatur B A, ſinus autem A M: quæ nimirum diametro F B ſit ad angulos rectos. Porro ipſi A M ſit æqualis recta G H, & G I æqualis ſubtenſæ A B. Exceſſus igitur eſt H I; cujus triens I K ipſi G I adjiciatur. Oſtendendum eſt primo, arcum A B totâ G K majorem eſſe. Hoc autem ex Theoremate 7. eſt manifeſtum. At cum ipſi G I additur IO quæ ad I K trientem ipſius H I rationem habeat; quam quadrupla G I una cum G H ad duplam G I cum tripla G H: Dico totam G O arcu A B majorem eſſe. Conſtituantur enim ſuper lineis G H, H I, IO, triangula quorum communis vertex ſit L, altitudo autem æqualis radio D B. Et jungatur D A, ducaturque diameter circuli C E quæ rectam A B bifariam dividat in N, arcum vero A B in E. Et jungantur A E, E B.

Quoniam igitur O I eſt ad I K ut quadrupla G I unà cum G H ad duplam G I cum tripla G H; ſumptis conſequentium triplis erit O I ad I H (hæc enim tripla eſt I K,) ut quadrupla G I unà cum G H ad ſexcuplam G I cum noncuplâ G H. Et componendo, O H ad H I, ut decupla

utriuſ-

utriuſque I G, G H ad ſexcuplam I G cum noncupla G H: vel ſumptis horum trientibus ut decem tertiæ duarum ſimul G I, G H ad duplam G I cum tripla G H. Eſt autem eadem ratio linearum G I ad G H, hoc eſt, B A ad A M, quæ B D ad D N, propter ſimiles triangulos B A M, B D N. Ergo etiam O H ad H I, ut $\frac{10}{3}$ utriuſque ſimul B D, D N ad duplam B D cum tripla D N; hoc eſt, ut $\frac{10}{3}$ N C ad diametrum E C cum tripla D N. Hac autem ratione minor eſt ratio portionis A E B ad A E B triangulum *. (* per præced.) Ergo dictæ portionis ad dictum triang. minor quoque ratio quam O H ad H I, hoc eſt, quam trianguli O H L ad triangulum I H L. Triangulum autem I H L æquale eſt triangulo A E B. Quod ſic oſtenditur. Triangulum enim G H L æquale eſt triangulo D A B, quoniam baſes & altitudines reciprocè æquales habent. Similique ratione quoniam G I æqualis eſt rectæ A B, erit triangulum G I L æquale duobus ſimul triangulis D A E, D B E, hoc eſt, quadrilatero D A E B. Itaque triangulum H I L triangulo A E B æquari neceſſe eſt, quod dicebamus. Habebit itaque portio A E B ad triangulum ſibi inſcriptum A E B minorem quoque rationem quam triangulum O H L ad idem triangulum A E B. Quamobrem triangulum O H L portione A E B majus erit. Et totum proinde triangulum O G L majus ſectore D A E B. Altitudo autem trianguli G L O æqualis eſt radio D B. Ergo baſis G O major erit arcu A B. Quod erat oſtendendum.

Ex his autem manifeſtum eſt de tota quoque circumferentia pronunciari poſſe, quod, *Si circulo inſcribantur polygona duo æquilatera, quorum alterum alterius ſit duplo laterum numero, & differentiæ perimetrorum triens perimetro polygoni majoris adjungatur, compoſita ex his circuli circumferentiâ minor erit. Eidem vero majori perimetro ſi linea addatur quæ ad dictum differentiæ trientem ſeſe habeat, ſicut quadrupla perimetri majoris juncta perimetro minori, ad duplam majoris cum tripla minoris, compoſita circumferentiam circuli excedet.*

## Problema IV. Propos. XX.

*Circumferentiæ ad diametrum rationem inveſtigare; & ex datis inſcriptis in dato circulo invenire longitudinem arcuum quibus illa ſubtenduntur.*

TAB. XL. Fig. 6. Eſto circulus centro D, cujus diameter C B, & ſit arcus B A ſextans circumferentiæ, cui ſubtenſa ducatur A B, itemque ſinus A M. Poſitâ igitur D B ſemidiametro partium 100000, totidem quoque erit ſubtenſa B A. A M verò partium 86603 non unâ minus, hoc eſt, ſi una pars ſive unitas auferatur ab 86603 fiet minor debito, quippe ſemiſſis lateris trianguli æquilateri circulo inſcripti.

Hinc exceſſus A B ſupra A M fit 13397 vero minor. Cujus triens $4465\frac{2}{3}$ additus ipſi A B 100000, fiunt partes $104465\frac{2}{3}$ minores arcu A B. Et hic primus eſt minor terminus, quo poſtea alium vero propiorem inveniemus. Prius autem major quoque terminus ſecundum Theorema præcedens inquirendus eſt.

Tres nimirum ſunt numeri quibus quartum proportionalem invenire oportet. Primus eſt partium duplæ A B & triplæ A M qui erit 459807, vero minor, (nam hoc quoque obſervandum ut minor ſit, idemque in cæteris prout dicetur) ſecundus quadruplæ A B & ſimplæ A M qui 486603 vero maj. Et tertius triens exceſſus A B ſupra A M, 4466 vero major. Itaque quartus proportionalis erit 4727 vero maj. quo addito ad A B 100000 fit 104727, major numero partium, quas continet arcus A B, peripheriæ ſextans. * per præced. Jam igitur invenimus longitudinem arcus A B ſecundum minorem majoremque terminum, quorum hic quidem longe propior vero eſt, cum vero proximus ſit 104719.

Sed ex utroque iſtorum alius minor terminus habebitur priore accuratior ſi utamur præcepto ſequenti, quod à diligentiori centrorum gravitatis inſpectione dependet.

In-

*Inventorum terminorum differentiæ ſeſquitertia jungatur duplæ ſubtenſæ & ſinui triplo, & quam rationem habet ex his compoſita ad triplam ſeſquitertiam ſeu $\frac{10}{3}$ utriuſque ſimul, ſinus, ſubtenſæque, eandem habeat ſubtenſæ ſupra ſinum exceſſus ad aliam quandam; Hæc ad ſinum addita rectam conſtituet arcu minorem.*

Minor terminus erat $104465\frac{2}{3}$. Major 104727. differentia horum eſt $261\frac{1}{3}$. Eſtque rurſus tribus numeris inveniendus quartus proportionalis. Primus eſt partium duplæ A B & triplæ A M & ſeſquitertiæ terminorum differentiæ, 460158 vero major. Secundus $\frac{10}{3}$ utriuſque ſimul A B, A M, 622008 vero minor. Tertius denique exceſſus A B ſupra A M, 13397 vero min. Quibus quartus proportionalis eſt 18109 vero min. Hic igitur additus numero partium A M $86602\frac{1}{2}$ vero min. fiunt $104711\frac{1}{2}$ minores arcu A B. Quare ſexcuplum earum, 628269 minus erit circumferentiâ totâ. At quoniam 104727 majores inventæ ſunt arcu A B, earum ſexcuplum 628362 circumferentiâ majus erit. Itaque circumferentiæ ad diametrum ratio minor eſt quam 628362, major autem quam 628269 ad 200000. Sive minor quam 314181, major autem quam 314135 ad 100000. Unde conſtat minorem utique eſſe quam triplam ſeſquiſeptimam, & majorem quam $3\frac{10}{71}$. Quin etiam Longomontani error per hæc refutatur, qui ſcripſit peripheriam majorem eſſe partibus 314185 qualium rad. 100000.

Eſto nunc arcus A B $\frac{1}{8}$ circumferentiæ, & erit A M, ſemiſſis lateris quadrati circulo inſcripti, partium 7071068, non unâ minus, qualium radius D B 10000000. A B vero latus octanguli partium 7653668 non unâ majus. Quibus datis ad ſimilitudinem præcedentium invenietur primus minor terminus longitudinis arcus A B 7847868. Deinde major terminus 7854066. Et ex utroque rurſus terminus minor accuratior 7853885. Unde conſtat peripheriæ ad diametrum rationem minorem haberi quam $31416\frac{1}{4}$, majorem autem quam 31415 ad 10000.

Et quum terminus major 7854066 à vera arcus A B longitu-

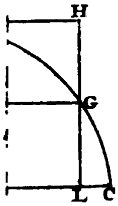
gitudine minus diſtet quam partibus 85; (Eſt enim arcus A B, per ea quæ ſupra oſtendimus, major quam 785398 1) partes autem 85 efficiant minus quam duos ſcrupulos ſecundos, hoc eſt, quam $\frac{2}{1296000}$ circumferentiæ, nam tota earundem plures habet quam 60000000: Hinc manifeſtum eſt, ſi trianguli rectanguli angulos quæramus ex datis lateribus, eo modo quo majorem iſtum terminum paulò antè, nunquam duobus ſcrupulis ſecundis aberraturos; etiamſi æqualia inter ſe fuerint latera circa angulum rectum, veluti hic erant in triangulo D A M.

Si vero ea ſit ratio lateris D M ad M A, ut angulus A D M non excedat $\frac{1}{4}$ recti; non unius tertii ſcrupuli error erit. Poſito enim arcu A B $\frac{1}{16}$ circumferentiæ, erit A M ſemiſſis lateris octanguli æquilateri circulo inſcripti partium 382683433, non unâ minus. A B vero latus ſexdecanguli 390180644 non unâ amplius, qualium radius D B 1000000000. Unde primus minor terminus longitudinis arcus A B invenitur partium 392679714. Terminus autem major 392699148. Et ex his minor rurſus 392699010. Conſtat autem ex ſupra demonſtratis arcum A B $\frac{1}{16}$ peripheriæ, majorem eſſe quam 392699081, quas terminus major ſuperat partibus 67. Hæ autem minus efficiunt uno ſcrupulo tertio, hoc eſt, $\frac{1}{777600000}$ totius circumferentiæ, quoniam ea major eſt utique quam 6000000000.

Porro ex noviſſimis terminis inventis orietur ratio circumferentiæ ad diametrum minor quam $3141593\frac{1}{3}$, major autem quam 3141592 ad 1000000.

Quod ſi $\frac{1}{60}$ circumferentiæ ponatur arcus A B, ſeu partium 6 qualium tota 360: Erit A M ſemiſſis lateris trigintanguli inſcripti partium 10452846326766, non unâ minus, qualium radius 100000000000000. Et A B latus ſexagintanguli inſcripti 10467191248588 non unâ amplius. Invenieturque ex his arcus A B ſecundum primum minorem terminum 10471972889195. Secundum majorem 10471975512584. Et ex his minor alter terminus 10471975511302. Unde efficitur peripheriæ ad diametrum ratio minor quam 31415926538,

TAB. XL.



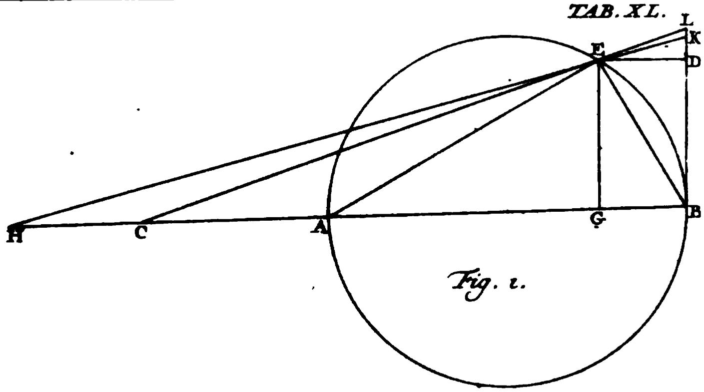
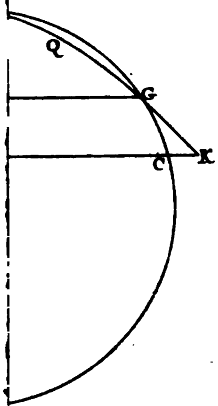




*Fig. 1.*



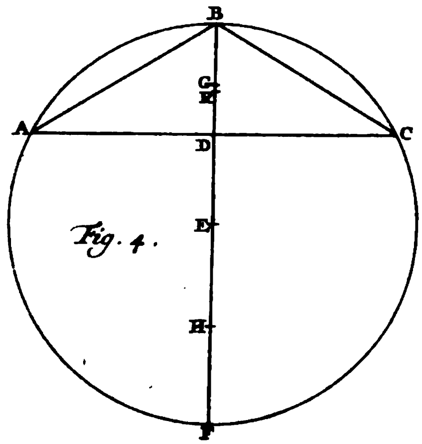
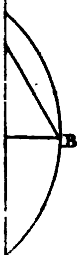
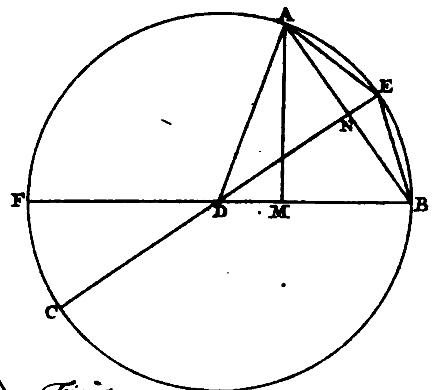




*Fig. 4.*



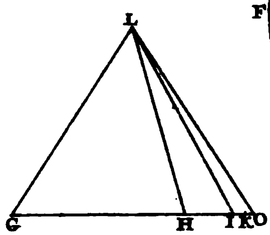




*Fig. 5.*

Digitized by Google

31415926538, major autem quam 31415926533 ad 10000000000.

Quos terminos ſi ex additis inſcriptorum & circumſcriptorum polygonorum lateribus inquirendum eſſet ferè ad laterum quadringenta millia deveniendum. Nam ex ſexagintangulo inſcripto circumſcriptoque hoc tantum probatur, minorem eſſe rationem peripheriæ ad diametrum quam 3145 ad 1000, majorem autem quam 3140. Adeo ut triplum & amplius verarum notarum numerum noſtro ratiocinio productum appareat. Idem vero in ulterioribus polygonis ſi quis experiatur ſemper evenire cernet: non ignota nobis ratione, ſed quæ longiori explicatione indigeret.

Porro autem quomodo, datis quibuſcunque aliis inſcriptis, arcuum quibus ſubtenduntur longitudo per hæc inveniri queat, ſatis puto manifeſtum. Si enim quadrati inſcripti latere majores ſunt, longitudo arcus ad ſemicircumferentiam reliqui inquirenda eſt, cujus tum quoque ſubtenſa datur. Sciendum autem & dimidiorum arcuum ſubtenſas inveniri cum totius arcus ſubtenſa data eſt. Atque hâc ratione ſi biſectionibus uti placebit, poterimus ad omnem ſubtenſam, arcus ipſius longitudinem quamlibet veræ propinquam non difficulter cognoſcere. Utile hoc ad ſinuum tabulas examinandas. Imo ad componendas quoque: quia cognitâ arcus alicujus ſubtenſâ, etiam ejus qui paulò major minorve ſit ſatis accuratè definiri poteſt.

CHRISTIANI HUGENII C. F.

# ILLUSTRIUM QUORUNDAM PROBLEMATUM CONSTRUCTIONES.

## PROBL. I.

### *Datam ſphæram plano ſecare, ut portiones inter ſe rationem habeant datam.*

HOc Archimedes problema reſolvit lib. 2. de ſphæra & Cylind. Compoſitionem autem promiſſam non videtur explicuiſſe, niſi ipſius eſt illa quam Eutocius in vetuſto quodam libro repertam commentariis ſuis inſeruit. Ea vero paraboles & hyperboles interſectione perficitur, uti & illa cujus Dionyſidorus autor eſt, quæ tamen à priori differt. Præter has tertiam quoque adfert Eutocius è Dioclis de Pyriis libro, quæ hyperboles & ellipſis deſcriptionem requirit. Noſtra autem quam hic conſcribemus anguli triſectionem poſtulat; Et hæc conſtruendi ratio in ſolidis problematibus quodammodo ſimpliciſſima videtur, atque ad uſum maxime accommodata.

TAB. XLI. Fig. 1. Eſto igitur data ſphæra cujus centrum M, diameter C A. Et data ſit proportio lineæ S ad T majoris ad minorem. Intelligatur ſecari ſphæra plano ſecundum A C diametrum, ſitque maximus in ea circulus C B A D. Et producatur utrimque diameter C A, & ponatur ſemidiametro æqualis utraque harum C H, A E. Et dividatur tota H E in Q, ut ſit E Q ad Q H ſicut S ad T. Ipſi autem M Q æqualis ponatur ad circumferentiam recta A R. Et ei quæ tertiam partem ſubtendit arcus A R, æqualis ſumatur M N. Et

Et per N punctum ducatur planum K L quod diametro C A ſit ad angulos rectos. Dico hoc ſphæram ſic ſecare, ut portio cujus A vertex eſt ad eam cujus vertex C rationem habeat quam S ad T.

Secetur enim ſphæra per centrum M plano B D ipſi K L parallelo, & jungantur K M, M L; & intelligatur conus baſin habens circulum factum ſectione K L, verticem vero M. Et ſicut quadratum C M ad quadratum M N, ita ſit M N ad N O longitudine. Erit igitur per converſionem rationis ut quadratum C M ſive quadr. K M ad quadratum K N (eſt enim quadr. K N exceſſus quadrati K M ſupra quadr. M N) ita linea N M ad M O. Sicut autem quadr. K M, hoc eſt, quadr. B M ad quadr. K N, ita eſt circulus circa diametrum B D ad eum qui circa diametrum K L. Ergo quoque ille circulus ad hunc ſeſe habebit ut N M ad M O. Ac proinde conus K M L æqualis erit cono cujus baſis circulus circa diametrum B D, altitudo M O *. Hic autem conus ad hemiſphæram B C D, hoc eſt, ad conum qui baſin habeat eundem circulum circa B D diametrum, & altitudinem M H *, eam habet rationem quam M O ad M H. Itaque & conus K M L erit ad hemiſphæram B C D ſicut M O ad M H. Et invertendo.

* 15. 12. Elem.

* 32. 1. Archim. de Sphær. & Cylin.

Porro autem quoniam hemiſphæra B C D eſt ad ſectorem ſolidum M K C L ſicut ſuperficies illius ſphærica ad ſphæricam hujus ſuperficiem *, hoc eſt, ut M C ad C N †. Erit per converſionem rationis hemiſphæra B C D ad partem ſui quæ remanet dempto ſectore M K C L, ſicut C M ad M N: vel ſumptis horum duplis ut H M ad O Q. Quod enim O Q dupla ſit ipſius M N poſtea oſtendemus. Fuit autem oſtenſum, quod hemiſphæra B C D ad conum K M L ſicut H M ad M O. Ergo jam hemiſphæra B C D ad totam portionem inter plana B D, K L contentam erit ut H M ad utramque ſimul Q O, O M *, hoc eſt, ad M Q. Quare & per converſionem rationis, erit hemiſphæra B C D ad portionem K C L, ut M H ad H Q. Et ſumptis antecedentium duplis, ſphæra tota ad portionem K C L ut E H

* 42. 1. Archim. de Sphær. & Cyl.

† 3. 2. Archim. de Sphær. & Cyl.

* 24. 5 Elem.

ad H Q. Et dividendo, portio K A L ad portionem K C L ut E Q ad Q H, hoc eſt ut S ad T. Quod erat faciendum. Quod autem dictum fuit O Q duplam eſſe ipſius M N, ſic fiet manifeſtum. Quia enim ut quadratum C M ad quadr. M N, ita eſt M N ad N O longitudine: Eſt autem Q M æqualis ſubtenſæ arcus A R cujus trienti ſubtenditur M N. Erunt propterea duæ ſimul Q M & N O æquales triplæ M N, uti ſequenti lemmate demonſtratur. Quamobrem ablata communi O N, erit ſola Q M æqualis duplæ N M & ipſi M O. Sed eadem Q M æqualis eſt duabus ſimul his Q O, O M, ergo apparet duplam M N æquari ipſi O Q.

## LEMMA.

TAB. XLI. Fig. 2.

SI Circumferentiæ arcus in tria æqualia ſecetur, tres ſimul rectæ quæ æqualibus partibus ſubtenduntur, æquantur ſubtenſæ arcus totius & ei quæ ad ſubtenſam trientis ſeſe habeat, ſicut hujus quadratum ad quadratum ſemidiametri. Arcus ſectoris A B C in tria æqualia diviſus ſit punctis D, E. Et ſubtendantur partibus rectæ B D, D E, E C; & toti arcui linea B C. Porro jungantur D A, E A, atque interſecent ſubtenſam B C in punctis G & H. Sitque H F parallela G D.

Quoniam igitur circumferentia B D E dupla eſt circumferentiæ E C, angulus autem huic inſiſtens E A C ad centrum conſtitutus, qui vero illi inſiſtit angulus B C E ad circumferentiam. Erit propterea angulus B C E, hoc eſt, angulus H C E in triangulo H C E æqualis angulo C A E in triangulo C A E. Sed angulus ad E utrique eſt communis; itaque ſimiles inter ſe ſunt dicti trianguli: Eritque ut A E ad E C ita E C ad E H. Ratio igitur A E ad E H hoc eſt, D E ad E F, duplicata eſt rationis A E ad E C, ac proinde eadem quæ quadrati A E ad quadr. E C ſeu quadr. E D. Erit igitur invertendo F E ad E D ſicut quadr. E D ad quadr. E A. Quamobrem oſtendendum eſt, tres ſimul B D, D E, E C æquari ſubtenſæ B C

atque

atque ipſi E F. quod ſane manifeſtum eſt; nam C E eſt æqualis C H; B D æqualis B G; D E vero utriſque ſimul G H, & F E. Ergo conſtat propoſitum.

Sumpſimus autem arcum B C ſemicircumferentiâ minorem quoniam in conſtructione problematis ejuſmodi ſemper invenitur. Nam lemma ad quoſvis arcus pertinet, eſtque in ſemicircumferentiâ majoribus demonſtratio parum diverſa.

## PROBL. II.

## *Cubum invenire dati cubi duplum.*

AD hoc imperfectam primò conſtructionem proponemus ad mechanicen utilem; deinde accuratam ſubjiciemus, quæ tamen non niſi ſæpius tentando perficiatur. Etenim ſolida problemata omnia vel hoc exigunt vel ſectionum conicarum deſcriptionem.

Sit itaque datus cubus cujus latus A B, oporteatque invenire latus cubi dupli. TAB. XLI. Fig. 3.

Radio B A ſemicirculus deſcribatur A F C. Sitque arcus A F ſemicircumferentiæ triens, C D vero quadrans; & ducantur C F, A D, quarum interſectio ad E punctum. Erit A E latus cubi quæſiti; exiguo tamen excedens, quodque minus ſit $\frac{1}{2000}$ ſui parte, ut facile numeris explorari poteſt. Fit enim A E ſecans anguli p. 37. ſcr. 30. quæ proinde major eſt partibus 12600 qualium A F vel A B 10000. Minor autem quam 12605. Itaque cum cubus ex 12600 ſit major quam duplus ejus qui ex A B 10000, erit & cubus A E major duplo cubo ex A B. Rurſus quia A E major eſt partibus 12600 erit $\frac{1}{2000}$ A E major part. 6. Tota vero A E minor eſt quam 12605. Ergo auferendo ab A E partem bismilleſimam ſui ipſius reliqua minor erit partibus 12599, tot enim ſuperſunt cum ex 12605 deducuntur 6. Atqui cubus ex 12599 minor eſt duplo cubo ex 10000. Ergo omnino quoque A E diminuta parte ſui biſmilleſima cubum minorem producet quam ſit duplus cubus à latere A B.

Porro ad perfectam conſtructionem, C F quidem uti pri-

us ducenda eſt: A D vero ſic, ut ſubtenſa C D æqualis ſit abſciſſæ E F. Etenim his poſitis dico cubum A E ejus qui ex A B duplum exiſtere.

Producatur enim C A, & ſit ipſi A E æqualis A G. Propter triangulos ſimiles igitur eſt E C ad C D, hoc eſt, E F ut E A ad A F, hoc eſt, ut G A ad A B. Et componendo C F ad F E ut G B ad B A ſive A F. Et permutando C F ad G B ut E F ad F A. Quare ut C F quadratum ad quadr. G B, ita quadr. E F ad quadr. F A. Et componendo ut quadr. C F & G B ad quadr. G B, ita quadr. E F & F A ſimul, hoc eſt, quadr. E A ad quadr. A F. Quadr. autem C F & G B ſimul æquantur rectangulo G C A cum quadr. A G, quod ſic oſtenditur. Quadratum enim G B æquale eſt rectangulo C G A & quadrato A B ſeu A F *. Quare addito utrimque quadrato F C, erunt quadrata G B, F C ſimul æqualia rectangulo C G A & quadrato A C. Rectangulum autem C G A cum quadrato A C æquatur rectangulo G C A cum quadrato G A. Itaque & quadrata C F, G B ſimul æqualia ſunt rectangulo G C A cum quadrato A G, ſicut diximus. Sicut igitur rectangulum G C A cum quadrato A G ad quadr. G B, ita eſt quadr. E A ad quadr. A F, hoc eſt, ita quadratum G A ad quadr. A B. Et permutando, ut rectangulum G C A cum quadrato G A ad quadratum G A ita quadr. G B ad quadr. A B. Dividendo igitur, erit ut rectang. G C A ad quadr. G A, ita quadr. G B dempto quadrato A B, hoc eſt, rectangulum C G A ad quadr. A B. Et permutando rurſus, ut rectang. G C A ad rectang. C G A, hoc eſt, ut C A ad A G ita quadratum G A ad quadr. A B. Quamobrem quod fit ex quadrato G A in ipſam G A, hoc eſt, cubus G A æquabitur ei quod fit ex quadrato A B in A C, hoc eſt, duplo cubo ex A B. Quod erat demonſtrandum.

* 6. 2. Elem.

PROBL.

## Probl. III.

*Datis duabus rectis duas medias proportionales invenire.*

VEterum Geometrarum ad hoc Problema conſtructiones complures retulit Eutocius ad lib. 2. Archimedis de Sphæra & Cylindro; at non omnes inventione diverſas, uti recte quoque ipſe animadvertit. Heronis enim inventionem ſecuti videntur Apollonius & Philo Byzantius: quanquam Heronem Apollonio ætate poſteriorem nonnulli exiſtiment. Dioclis modum Pappus & Sporus. Nicomedea autem conſtructio præ cæteris ſubtilis ibidem extat, quam Fr. Viëta paulò aliter concinnatam ſuo Geometriæ ſupplemento inſeruit. R. Carteſii egregia eſt & nova per paraboles & circumferentiæ interſectionem, cujus demonſtratio legitur in libris Harmonicôn M. Merſenni. Noſtræ autem ſequentes.

Sit datarum linearum major A C, quæ bifariam ſecetur in E. Minor autem ſit A B, quæ ſic conſtituatur ut triangulus E A B habeat crura æqualia A E, E B. Et perficiatur parallelogrammum C A B D. Et producantur A C, A B. Porro applicetur regula ad punctum D, & moveatur quousque poſitionem habeat G F, abſcindens nimirum E F æqualem rectæ E G; (Hoc autem vel ſæpius tentando aſſequemur, vel deſcriptâ hyperbole, uti poſtea oſtendetur) Dico inter A C, A B medias duas inventas eſſe B G, C F. TAB. XLI. Fig. 4.

Sit enim E K ipſi A B ad angulos rectos. Quia igitur B E æqualis E A, dividetur A B in K bifariam: adjecta autem eſt linea B G. Ergo rectangulum A G B cum quadrato ex K B, æquabitur quadrato K G. Et addito utrimque quadrato K E, erit rectangulum A G B unà cum quadratis B K, K E, hoc eſt unà cum quadrato B E, æquale quadrato E G. Similiter quia A C bifariam dividitur in E, & adjecta

jecta eſt linea C F, erit rectangulum A F C cum quadrato E C æquale quadrato E F. Quadratum autem E F æquale eſt quadrato E G. Erit igitur rectangulum A F C cum quadrato C E, æquale rectangulo A G B cum quadrato B E. Atqui quadratum C E ſeu E A æquale eſt quadrato E B. Ergo & reliquum rectangulum A F C æquale rectangulo A G B. Quare ſicut F A ad A G ita B G ad C F. Ut autem F A ad A G ita eſt D B ad B G, & ita quoque F C ad C D. Igitur ut D B, hoc eſt, A C ad B G ita B G ad F C, & F C ad C D, hoc eſt, A B. Quod erat dem. Quod autem dictum eſt, etiam deſcriptâ hyperbole inveniri quomodo linea F D G ducenda ſit, hinc conſtabit: Factum enim ſit, ut E F, E G ſint æquales, & ſumatur G N æqualis D F. Itaque punctum N eſt ad hyperbolem quæ deſcribetur per D punctum circa aſymptotos F A, A G *. Sed idem punctum N eſt quoque ad circuli circumferentiam cujus centrum E radius E D: (Hoc enim facile intelligitur quia triangulus F E G eſt æquicruris, & N G æqualis D F) Itaque datum eſt punctum N ad interſectionem hyperboles & circumferentiæ dictæ. Sed & D datum eſt. Datur igitur poſitione linea F G ducenda per puncta N, D. Et compoſitio manifeſta eſt.

* 8. 2. Conic.

## A L I T E R.

TAB. XLI. Fig. 5.

Circa diametrum A C majori datarum linearum æqualem circulus deſcribatur & ponatur A B minori datarum æqualis, & perficiatur parallelogrammum A D: productâque A B, ducatur ex centro E recta E H G eâ ratione ut H D, H G ſint inter ſe æquales. Secet autem circumferentiam in L. Dico duabus A C, A B duas medias inventas eſſe B G, G L.

Producatur enim G E uſque ad circumferentiam in K, & jungatur A K, eique parrallela ducatur B O. Similes itaque ſunt trianguli A E K, B H O; & quia A E æqualis E K, etiam B H, H O æquales erunt. Sed & H G, H D inter ſe æquales ſunt. Igitur tota O G æqualis B D, hoc eſt,

eſt, diametro A C vel L K; & ablatâ communi L O, relinquentur æquales L G, O K. Eſt autem rectangulum K G L æquale rectangulo A G B. Ergo ut K G ad G A ita B G ad G L. Sed ut K G ad G A ita eſt O G ad G B & ita reliqua O K, hoc eſt, L G ad B A. Ergo ut O G, hoc eſt, A C ad G B ita B G ad G L & G L ad A B. Quod erat demonſtr. Hujus autem conſtructionis inventio eandem cum præcedenti originem habet.

## A L I T E R.

Sint datæ A B & Q quibus duas medias proportionales invenire opus ſit; A B autem quam Q major. TAB. XLI. Fig. 6.

Dimidiæ Q ſumatur æqualis A F, & productâ A B utrimque, ſit ipſi æqualis B R. Erigatur autem ad A B perpendicularis F C, & ipſi R A æqualis ponatur R C: & jungatur B C, & huic parallela ducatur A E. Denique applicatâ regulâ ad punctum C, moveatur ea quouſque poſitionem habeat C D, faciens C E æqualem A D. Dico inter A B & Q duas medias eſſe C E, E D.

Jungatur enim C A. Igitur quia æquales ſunt R A, R C & angulus C F A rectus, erit R A ad A C ut A C ad duplam A F, hoc eſt, Q: ac proinde quadratum A C æquale rectangulo ſub R A & Q. Quadratum autem A C cum quadrato A D & duplo rectangulo D A F, hoc eſt, ſub D A & Q contento, æquatur quadrato D C *. Igitur quadratum D C æquabitur quadrato D A unà cum rectangulis ſub D A, Q, & ſub R A, Q, hoc eſt, unà cum rectangulo ſub D R & Q. Quadratum autem D B æquale rectangulo R D A & quadrato A B *. Igitur ut quadratum D B ad quadratum D C, hoc eſt, ut quadr. A B ad quadr. A D, (eſt enim ut D B ad D C ſic A B ad E C ſive A D) ita erit rectangulum R D A cum quadrato A B ad rectangulum ſub R D, Q, cum quadrato A D. Quamobrem & rectangulum R D A ad rectangulum ſub R D, Q, ſicut quadr. A B ad quadr. A D *. Eſt autem ut quadratum A B ad quadr. A D, ita A B ad E D longitudine: nam ut B A ad A D

* 12. 2. Elem.
* 6. 2. Elem.
* 19. 5. Elem.

ſic C E, hoc eſt, ipſa A D ad E D. Ergo rectangulum R D A ad rectangulum ſub R D, Q, hoc eſt, A D ad Q ſicut A B ad E D. Et permutando & invertendo, B A ad A D ut E D ad Q. Atqui ut B A ad A D, hoc eſt, C E ita C E ad E D. Ergo ut A B ad C E ita C E ad E D, & E D ad Q. Itaque inter A B & Q mediæ proportionales ſunt C E, E D. Quod erat oſtendendum.

## PROBL. IV.

*Quadrato dato & uno latere producto, aptare ſub angulo exteriori rectam magnitudine datam quæ ad angulum oppoſitum pertineat.*

TAB. XLI. Fig. 7. Eſto quadratum B A cujus productum ſit latus F A. Data verò linea K. Et oporteat ducere rectam B D C, ita ut pars intercepta D C ſit datæ K æqualis.

Quadratis ex K & E B ſit æquale quadratum E G; & ſuper B G diametro deſcribatur ſemicirculus B C G ſecans rectam F A productam in C, & ducatur B D C. Dico D C æqualem eſſe ipſi K. Jungantur enim C G, G D; ſitque C H ipſi B G ad angulos rectos.

Quia igitur ſimiles ſunt trianguli B E D, C H G, & latera B E, C H circa angulos rectos inter ſe æqualia, erit & latus D B æquale lateri G C, & D E ipſi G H. Sunt autem quadrata D C, C G, hoc eſt, quadrata D C, C H, & H G æqualia quadrato D G *, hoc eſt, quadratis G E, E D. Ergo dempto hinc quadrato E D, inde vero quadrato H G; erunt duo quadrata D C & C H æqualia quadrato E G, hoc eſt, quadratis ex K & E B *. Quadratum autem E B æquale eſt quadrato C H. Ergo & reliquum quadratum D C æquabitur K quadrato; & recta D C ipſi K. Quod erat oſtendendum.

* 47. 1. Elem.

* Ex conſtruct.

Demonſtratio hæc ab ea diverſa eſt quæ apud Pappum Alex. legitur lib 7. prop. 72. Conſtructio verò non differt. Cæterum eandem ad caſum quoque ſequentem pertinere invenimus.

PROBL.

Digitized by Google

## PROBL. V.

*DAto quadrato, & duobus contiguis lateribus productis, aptare ſub angulo interiori rectam magnitudine datam quæ per angulum oppoſitum tranſeat. Oportet autem non minorem eſſe datam quam ſit quadrati diameter dupla.*

Datum ſit quadratum A B, productaque latera A F, A E. Data verò linea K, non minor duplâ A B diametro. Et oporteat per angulum B ponere rectam D C ipſi K æqualem. TAB. XLI. Fig. 8.

Si K æqualis fuerit duplæ A B, conſtructio manifeſta eſt; tunc enim per B ducenda eſt quæ ſit ipſi A B ad angulos rectos, eaque propoſitum efficiet. Cum verò major erit K quam dupla A B, conſtructio iiſdem verbis præcipitur atque in Problemate præcedenti: & demonſtratio quoque eſt eadem.

Quod autem circumferentia B C G ſecabit productam A F hinc manifeſtum eſt. Etenim quia K major eſt duplâ diametro A B, erit K quadratum majus octo quadratis E B. Itaque quadratum E G majus quam quadrata novem ex E B; ac proinde E G major quam tripla E B. Dimidia igitur B G, hoc eſt, radius deſcripti ſemicirculi major quam E B vel B F; unde neceſſe eſt rectam A C ſecari à circumferentia B C G.

## PROBL. VI.

*RHombo dato, & uno latere producto, aptare ſub angulo exteriori lineam magnitudine datam quæ ad oppoſitum angulum pertineat.*

Sit datus rhombus A B, cujus productum latus F A. Data autem linea K. Et oporteat ducere rectam B D C, ita ut pars intercepta D C ſit ipſi K æqualis. TAB. XLII. Fig. 1.

Ducatur diameter A B, & latus B E producatur; & quadratis ex K & A B ſit æquale quadratum A G. Et ſuper B G

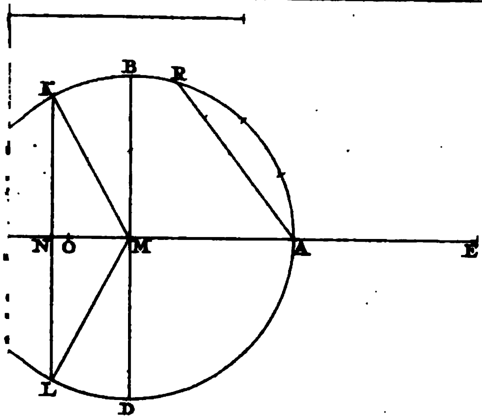
 cir-

circumferentiæ portio deſcribatur quæ capiat angulum ipſi B F A æqualem. Secabit ea productum latus F A, ut modo oſtendetur. Itaque ad interſectionis punctum C ducatur B C. Dico hujus partem interceptam D C lineæ datæ K æqualem eſſe. Quod autem circumferentia deſcripta latus F A productum ſecabit, ſic primùm oſtenditur. Ducatur A N ita ut ſit angulus B A N angulo B F A vel B E A æqualis. Itaque triangulus B A N triangulo B E A ſimilis eſt, ac proinde iſoſceles quoque. Quare ſi ſuper B N circumferentia deſcribatur quæ capiat angulum B F A, ea continget latus F A in A puncto. Sed B G major eſt quam B N: nam quadratum A G majus eſt quadrato A N vel A B, cum ſit æquale quadratis ex K & A B. Quare A G cadet extra triangulum iſoſcelem B A N. Itaque manifeſtum eſt circumferentiam ſuper B G deſcriptam capientemque angulum ipſi B F A vel B A N æqualem ſecare lineam F A C. Eſto alterum interſectionis punctum M & jungantur B M, G C, & cadat in B E ex A perpendicularis A L.

Quia igitur quadratum A G æquale eſt quadratis ex K & A B: atque idem quadratum A G æquale quadratis A B & B G minus duplo rectangulo G B L, hoc eſt, minus rectangulo G B N; erit K quadratum æquale quadrato B G minùs rectangulo G B N, hoc eſt, rectangulo B G N. Eſt autem ut rectangulum B G N ad rectang. B E, G N, ita B G ad B E. Ergo ut B G ad B E ita quoque quadratum K ad rectangulum G N, B E, hoc eſt, rectangulum G B E minùs rectangulo N B E. Eſt autem rectangulo G B E æquale rectang. C B D, quoniam G B ad B C ut D B ad B E propter triangulos ſimiles G B C, D B E; habent enim angulum ad B communem, & angulus B C G ipſi B E D eſt æqualis. Item rectangulo N B E æquale eſt quadratum A B quia propter triangulos ſimiles eſt N B ad B A ut A B ad B E. Ergo erit G B ad B E ut quadratum K ad rectangulum C B D minùs quadrato A B. Eſt autem rectangulo C B D minùs quadr. A B æquale rectangulum D A, A C, quod ſic oſtenditur. Etenim quia quadrilaterum C G B M

eſt

Digitized by Google



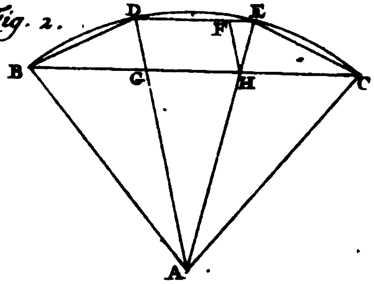




Fig. 2.

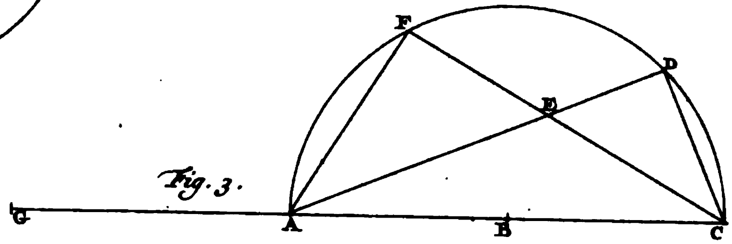



Fig. 3.

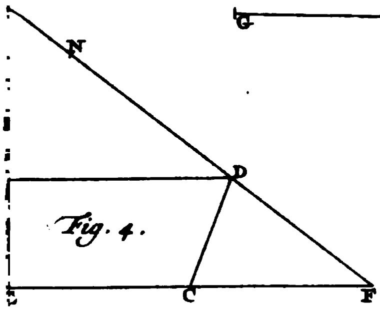



Fig. 4.

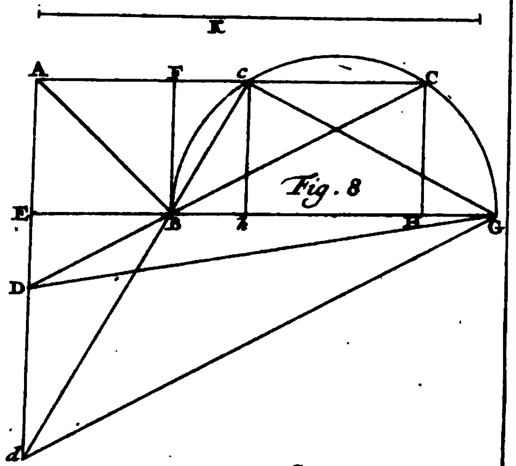



Fig. 8

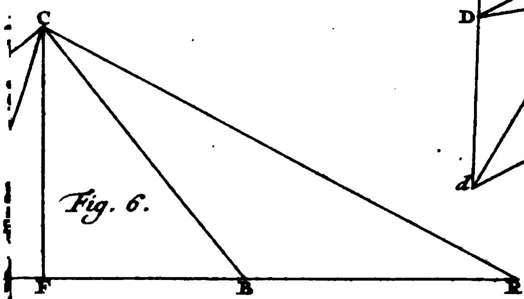
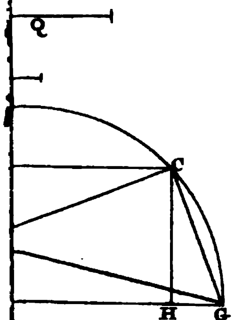



Fig. 6.



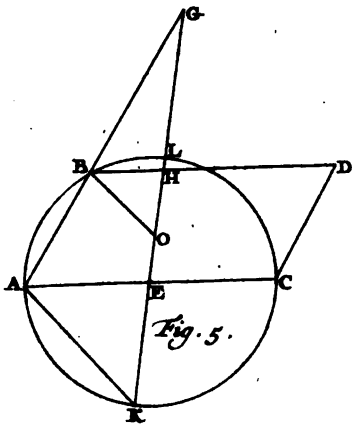




Fig. 5.

Digitized by Google

Digitized by Google

eſt in circulo, ſunt anguli C G B & B M C ſimul duobus rectis æquales. Sed & anguli E D B, A D B. Quorum E D B æqualis angulo C G B propter ſimilitudinem triangulorum G B C, D B E. Ergo & angulus B M C æqualis erit angulo A D B. Trianguli igitur A B M, A B D angulos M & D inter ſe æquales habent. Verum & angulos ad A, & latus A B commune. Itaque dicti trianguli ſimiles ſunt & æquales. Quare A M æqualis A D, & M B æqualis B D, & angulus M B A æqualis A B D. In triangulo igitur M B C angulus B in duo æqualia dividitur à recta B A, ideoque rectang. M B C minus quadrato B A æquatur rectangulo M A C. Sed rectangulo C B M æquale eſt rectangulum C B D; & rectangulo M A C æquale rectang. D A C. Igitur rectang. C B D minus quadrato B A æquale rectangulo C A D, uti dictum fuit. Eſt itaque G B ad B E ut quadr. K ad rectangulum D A C. Sicut autem G B ad B E ita eſt rectang. G B E, hoc eſt, rectang. C B D ad quadratum B E. Ergo ut quadratum K ad rectang. D A C ita rectang. C B D ad quadratum B E. Ratio autem rectanguli C B D ad quadr. B E compoſita eſt ex ratione D B ad B E, hoc eſt, D C ad C A, & ex ratione C B ad B E ſive B F, hoc eſt, C D ad D A. Ergo & quadr. K ad rectang. D A C eam habet rationem quæ componitur ex ratione D C ad C A & D C ad D A, hoc eſt, eam quam quadratum D C ad rectang. D A C. Quamobrem quadr. K. quadrato D C æquale eſt: Et D C ipſi K longitudine. Quod erat demonſtrandum.

## PROBL. VII.

*Rhombo dato & duobus contiguis lateribus productis, aptare ſub angulo interiori rectam magnitudine datam quæ per oppoſitum angulum tranſeat. Oportet autem datam non minorem eſſe quam duplam diametri quæ reliquos duos rhombi angulos conjungit.*



Digitized by Google

TAB. XLII. Fig. 2. Sit datus rhombus A B cujus producantur latera A F, A E, data autem ſit recta K cui æqualem ponere oporteat C D, per angulum B tranſeuntem. Ducatur diameter A B, eique ad angulos rectos linea S B R, quæ quidem æqualis erit duplæ diametro F E. Igitur K non minor debet eſſe quam S R. Si vero æqualis, factum eſt quod proponebatur. Sed ponatur K major data eſſe quam S R. Erit jam in ſchemate hoc prout propoſitum eſt conſtructio eadem, quæ in Problemate præcedenti. Demonſtratio autem nonnihil diverſa. Etenim hoc primò aliter oſtenditur quod circumferentia ſuper B G deſcripta ſecat productam A F. Sit A L ad E B perpendicularis & ducatur S T ut ſit angulus B S T æqualis angulo E A F vel B F S. Eſt itaque triangulus B S T triangulo B F S ſimilis; (nam & angulos ad B æquales habent:) ac proinde æquicruris etiam triangulus B S T. Apparet igitur lineam A S æquari ipſi L B cum dimidia B T. Quare dupla A S æquabitur duplæ L B & toti B T. Sed dupla A S eſt quadrupla A F vel E B. Ergo quadrupla E B æqualis duplæ L B & B T. Sumptâque communî altitudine B T, erit rectangulum ſub quadrupla E B & B T contentum, æquale duplo rectangulo L B T & quadrato B T. Et addito utrimque quadrato B L, erit rectangulum E B T quater cum quadrato L B æquale rectangulo L B T bis cum quadratis B T, B L, hoc eſt quadrato L T. Quia vero propter triangulos ſimiles eſt T B ad B S ut B S ad B F ſive B E, æquale erit rectang. E B T quadrato B S; & quater ſumptum quadrato R S. Itaque quadr. S R cum quadrato L B æquale quadrato L T. Quadratum vero K (quod majus eſt quam R S quadr.) unà cum eodem quadrato L B æquale eſt quadrato L G, uti ex conſtructione manifeſtum eſt, quia ſcilicet quadr. A G æquale poſitum fuit quadratis ex K & A B. Itaque majus eſt quadr. L G quam L T, & L G major quam L T, & B G quam B T. Quamobrem circumferentia ſuper B G deſcripta capax anguli E A F ſecabit rectam A S; nam ſimilis circumferentia, ſi ſuper B T deſcribatur, ea continget ipſam in S puncto, quoniam angulus

Digitized by Google

gulus B S T ipſi E A F æqualis eſt triangulusque B S T æquicruris.

Porrò quod C D ipſi K æqualis eſt, ſic demonſtrabitur. Quia quadratum A G æquale eſt quadratis ex K & A B: idemque quadratum A G æquale quadratis A B, B G cum duplo rectangulo G B L. Erit propterea quadratum K æquale quadrato B G cum duplo rectangulo G B L. Sicut autem B G ad B E ita eſt quadratum B G cum duplo rectangulo G B L ad rectangulum G B E cum duplo rectanctulo E B L; ſingula enim ad ſingula eam habent rationem. Ergo & quadratum K ad rectangulum G B E cum duplo rectangulo E B L ut B G ad B E. Eſt autem rectangulo G B E æquale rectangulum C B D, quoniam C B ad B G ut E B ad B D, propter triangulos ſimiles C B G, E B D; habent enim angulos ad B æquales & angulum B C G angulo B E D. Item duplo rectangulo E B L æquale eſt quadratum A B, quia propter triangulos ſimiles ut S A, hoc eſt, dupla B E ad A B ita A B ad B L. Igitur ut B G ad B E ita erit quadratum K ad rectangulum C B D cum quadrato A B. Sed hiſce duobus æquale eſt rectangulum C A D; quoniam in triangulo C A D angulus A bifariam dividitur à linea A B. Ergo ut B G ad B E ita eſt quadr. K ad rectangulum C A D. Atque hinc porrò eodem modo ut in caſu præcedenti concludemus lineam D C ipſi K æqualem eſſe, repetendo iſta: Sicut autem G B ad B E, &c.

## *Utrumque præcedentium Aliter.*

SIt datus rhombus A D B C cujus productum latus D B. Et data ſit linea G. Oportet ducere rectam A N F, ut pars intercepta N F ſit datæ G æqualis. TAB. XLII. Fig. 3.

Ducatur diameter A B, & quadratis ex G & A B ſit æquale quadratum A H, & ducatur H E ipſi B A parallela. Et A E ipſi G ponatur æqualis, eademque producatur ad F. Dico N F ipſi G æqualem eſſe.

Quod autem ad H E poni poteſt A E ipſi G æqualis, hinc

hinc manifeſtum eſt. Etenim quadratum A H majus eſt quadratis A X & X H, quum ſit angulus A X H obtuſus. Sed idem quadratum A H æquale ponitur quadratis A B ſeu H X & G. Itaque quadratum G ſeu A E majus eſt quadrato A X. Unde apparet interſectionem E accidere inter puncta H & X.

Producatur B D & ponatur ipſi æqualis D R. & ſit R K parallela D A vel B C, eique occurrant productæ F A, B A, H E, in punctis M, Q, K: & jungatur R A, & producatur ad P.

Quoniam igitur D R æqualis eſt D B, & R Q K parallela D A, erit & M A æqualis A N, & Q A æqualis A B; angulus autem B A R rectus, quum ſit in ſemicirculo, nam tres hæ æquales ſunt D B, D A, D R. Parallelæ autem ſunt B Q, H E K, ergo & anguli ad P recti, & erit H P æqualis P K. Eſt itaque quadratum A H æquale quadrato A E unà cum rectangulo H E K*. Sed idem quadratum A H æquale eſt etiam quadratis ex G ſeu A E, & ex A B. Itaque quadr. A B æquale erit rectangulo K E H. Ac propterea K E ad A B ut A B ad E H. Verum ut K E ad A B ſeu Q A ita eſt E M ad M A: & ut A B ad E H ita A F ad F E. Igitur E M ad M A ut A F ad F E: Et proinde E A ad A M ut E A ad E F. Æqualis eſt igitur E F ipſi A M; quare & ipſi A N. Ideoque & F N ipſi A E, hoc eſt, datæ G. Quod erat demonſtrandum.

* 12.2 Elem.

TAB. XLII. Fig. 4.

Sit denuo datus rhomdus A D B C, cujus producta latera B D, B C; & data ſit linea G. Oportet ducere rectam N F tranſeuntem per angulum A, quæque æqualis ſit ipſi G.

Ducatur diameter B A, eique ad angulos rectos R A L. Si igitur G minor detur quam R L, problema conſtrui nequit, uti ſupra quoque dictum fuit. Si vero æqualis, jam factum eſt quod quærebatur. Sit igitur G major quam R L. Erit in ſchemate adjecto, ſicut propoſitum eſt, conſtructio & demonſtratio eadem quæ in caſu præcedenti.

Illud

Illud autem hic aliter eſt oſtendendum, quod ad lineam H E poni poteſt A E ipſi G æqualis. Sit R S æqualis R B, & jungatur A S. Quoniam igitur in triangulo B A S à vertice ad mediam baſin ducta eſt A R, erunt quadrata B R & R A ſimul ſumpta, hoc eſt, quadratum B A cum duplo quadrato A R, ſubdupla quadratorum B A, A S*. Itaque quadratum A B duplum cum quadruplo quadrato A R, hoc eſt, cum quadrato R L, æquabitur quadratis B A, A S. Quare ablato utrimque quadrato B A, erit quadratum A S æquale quadratis B A & R L, ac proinde minus quam quadr. A H; nam hoc æquale eſt quadratis A B & G. Eſt igitur A S minor quam A H. Sed major eſt quam A R. Ergo punctum S cadit inter R & H; angulus enim A R H obtuſus eſt. Major itaque eſt R H quam R S vel R B. Et quum propter triangulos ſimiles ſit R H ad H P ut R B ad B A, erit quoque H P major quam B A; & quadratum H P majus quadrato A B. At quadratum H P cum quadrato P A æquatur quadrato A H, hoc eſt, quadratis B A & G. Ergo cum quadratum H P ſit majus quadrato A B, erit invicem quadr. P A minus quam quadr. G. Patet igitur quod ſi centro A circumferentia deſcribatur radio A E ipſi G æquali, ea lineam H E ſecabit.

* per 122. lib. 7. Pappi.

## PROBL. VIII.

### *In Conchoide linea invenire confinia flexus contrarii.*

TAB. XLII. Fig. 5.

Conchoidem intelligimus quam Nicomedes excogitavit; quâ & angulum diviſit trifariam, & duas medias invenit proportionales: Eſto ea C Q D, polus G, regula autem A B cujus ope deſcripta eſt; quam ſecet G Q ad angulos rectos. Hæc igitur lineæ proprietas eſt, ut ductâ ad ipſam rectâ qualibet ex G puncto, pars hujus inter conchoidem & rectam A B intercepta ſit ipſi A Q æqualis.

Quum autem appareat partem quandam Conchoidis ut in ſchemate ſubjecto C Q D verſus polum G cavam eſſe, lineam



Digitized by Google

verò reliquam in infinitum licet utrimque productam in diverſum curvari; quæſitum eſt qua ratione puncta ea determinari poſſent ubi contraria flexio initium capit. Et nos quidem ad hoc ſequentem invenimus conſtructionem.

Sit duabus A G, A Q tertia proportionalis A E, ſumenda verſus G. Et ponatur G F æqualis G E. Porro ſit G R ipſi G Q ad angulos rectos, & æqualis duplæ G A. Et deſcribatur parabole R O, cujus vertex ſit R axis R G, latus rectum ipſi A G æquale. Centro autem F radio F R circumferentia deſcribatur, quæ parabolen ſecet in O; & ducatur O C parallela A B occurratque conchoidi in punctis C, D. Hæc erunt puncta quæſita in confinio flexionis contrariæ.

TAB. XLII. Fig. 6. Iſta autem Univerſalis eſt conſtructio. At quando quadratum ex A Q non majus eſt quam duplum quadrati A G, arcus triſectione propoſitum quoque efficiemus. Et diversè quidem prout A Q major vel minor erit quam A G. Etenim ſi minor, deſcribenda eſt circumferentia centro A radio A G, in eaque ponenda G K æqualis duplæ G E, inventæ ut priùs. Et rectæ G H quæ ſubtendit trientem circumferentiæ K H G æqualis ſumenda G M, & per M ducenda ut ante D C ipſi A B parallela. TAB. XLII. Fig. 7. Cum verò A Q major eſt quam A G, cæteris ad eundem modum compoſitis, hæc tantum differentia erit quod arcum K P, qui unà cum arcu G K ſemicircumferentiam explet, in tria æqualia dividere oportet, & partium unam conſtituere P H, & ſubtenſæ G H æqualem ſumere G M.

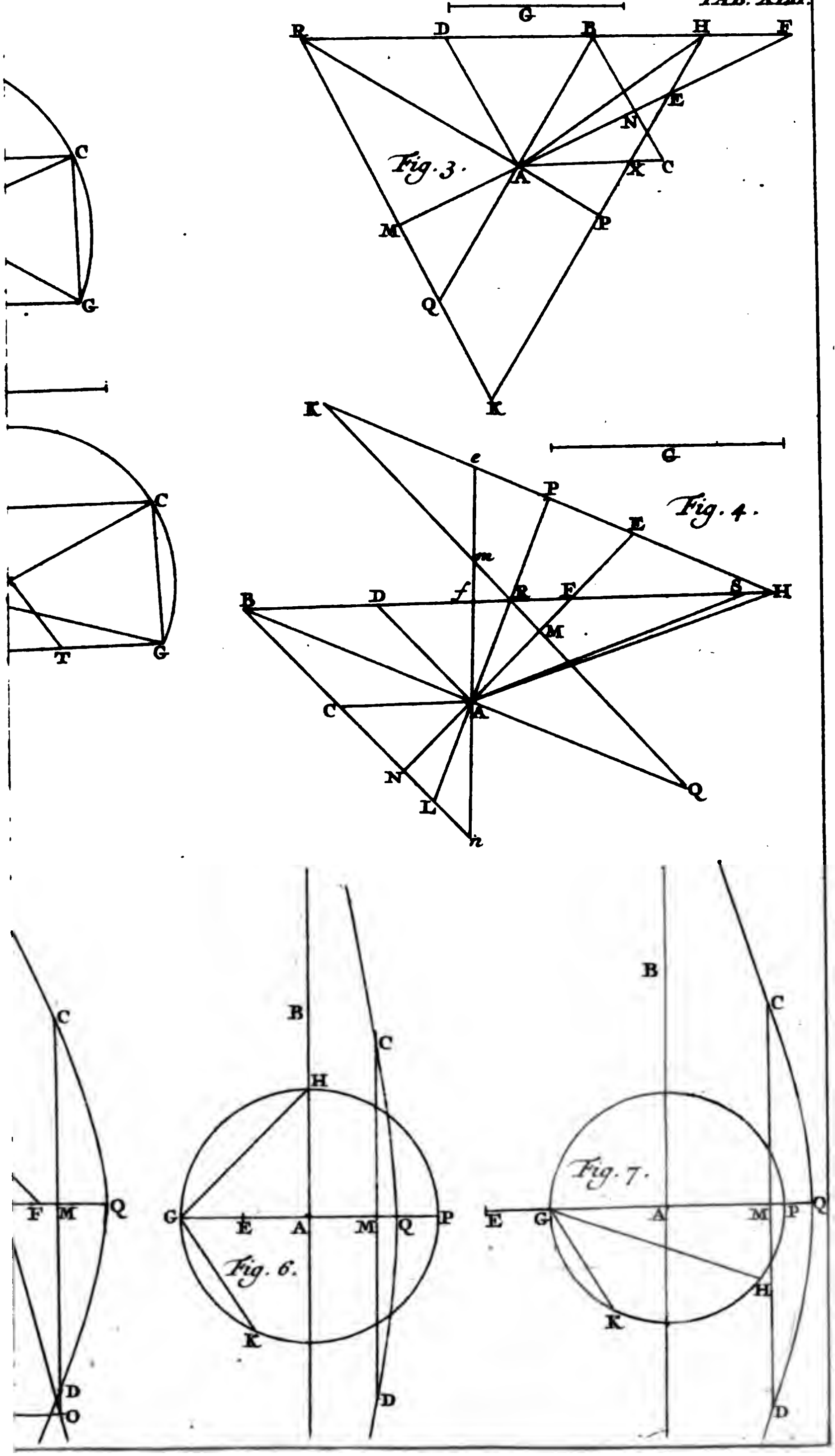
Porro planum eſt Problema cum A G æqualis A Q. Tunc enim G M fit æqualis lateri trigoni ordinati in circulo inſcripti. Item cum quadratum A Q duplum eſt quadrati A G: fit enim G M dupla ipſius G A.

Sed & aliis caſibus innumeris planum erit, quorum ii quidem facilè diſcerni poterunt, qui ad anguli triſectionem reducuntur.

*FINIS.*

Digitized by Google

TAB. XLII.



Digitized by Google

# DE
# CIRCULI
## ET HYPERBOLÆ
# QUADRATURA
## CONTROVERSIA.

Eee 2

Digitized by Google

Digitized by Google

# VERA
# CIRCULI ET HYPERBOLÆ QUADRATURA
AUTHORE
JACOBO GREGORIO.

## LECTORI GEOMETRÆ SALUTEM.

M*Ecum aliquando cogitabam, amice Lector, num Analytica cum ſuis quinque operationibus eſſet ſufficiens, & generalis methodus inveſtigandi omnes quantitatum proportiones, ut in initio ſuæ Geometriæ affirmare videtur Carteſius; ſi enim ita eſſet, poſſibile foret ejus ope toties decantatam circuli quadraturam exhibere: cumque hæc mente revolverem, facile percepi ex hactenus repertis circuli proprietatibus nullam poſſe analyſin inſtitui tali ſtructuræ inſervientem: deinde mihi alias quærenti incidit in mentem hujus ſecunda, prima enim in circulo vulgo eſt cognita: ex hiſce percepi ſeriem polygonorum convergentem, cujus terminatio eſt circuli ſector; ubi ſtatim vidi ali-*



Digitized by Google

*aliquod analyſios veſtigium. deinde ſerierum convergentium naturis non ſolum in facilioribus quibusdam caſibus, ſed etiam in genere conſideratis, & prædictis circuli proprietatibus ad ellipſim & hyperbolam nullo negotio reductis, infallibilis mihi videbatur omnium ſectionum conicarum quadratura: dum autem me illuc converti ut polygonorum ſeriem convergentem terminarem, inſuperabilem difficultatem in ejus terminatione invenienda poſt omnes artis & aleæ conatus deprehendi: Sed animo revolvens analyſios officium eſſe ſicut algebræ communis, non ſolum problemata reſolvere, ſed etiam eorum impoſſibilitatem (ſi opus ſit) demonſtrare; cumque in primo difficultatem indicibilem expertus eſſem, ad ſecundum me converti, quod certe ſupra votum ſucceſſit; non enim ſolius circuli (quam mihi ab initio propoſueram) ſed omnium ſectionum conicarum veram & legitimam in ſua proportionum ſpecie quadraturam, & integram proportionis ſpeciem ante incognitam orbi Geometrico patefacio, quam etiam proportionem ſaltem in relatione ad dimenſionem ſectionum conicarum ad commenſurabilem veræ quam proximam reduco, praxi facili, demonſtrabili, & extractione radicis ſurde ſolidæ (ni fallor) multo breviore; in omni enim proportione incommenſurabili ad tales approximationes recurrunt Mathematici: ut autem melius concipiamus hujus proportionis naturam, loquamur de proportione quatenus ortum habet à quinque ope-*

*operationibus analyticis, ſeu arithmeticæ vulgaris, proportio enim nobis notior eſt in numeris ſeu in quantitate diſcreta, quam in continua, neque vereor poſt Carteſium has operationes in geometriam adducere. Primo itaque ſciendum eſt nos ſemper nobis proponere quantitates commenſurabiles, ſeu quæ inter ſe ſunt ut numerus ad numerum; proportionem enim incommenſurabilem niſi relativè ad commenſurabilem nullo modo percipimus, habet enim in ſe neſcio quid infiniti, mentem noſtram obtundens & ſimplicem perceptionem impediens: deinde ex illis quinque operationibus arithmeticis, duæ ſunt tantum ſimplices, additio & ſubſtractio; multiplicatio enim eſt compoſita ex additione, & diviſio ex ſubſtractione; & extractio radicum, quæ in genere nihil aliud eſt quam inventio proportionis commenſurabilis, quæ quam proximè accedit ad proportionem analyticam incommenſurabilem, componitur ex præcedentibus quatuor; & noſtra ſexta operatio quæ in genere nihil aliud eſt quam inventio proportionis commenſurabilis, quam proximè accedentis ad noſtram proportionem non analyticam, componitur ex prioribus quinque. Advertendum quoque eſt ſicut numeri fracti nunquam procedunt ex integrorum additione, ſubductione, multiplicatione, ſed tantum ex diviſione; & numeri incommenſurabiles nunquam procedunt ex commenſurabilium additione, ſubductione, multiplicatione, diviſione, ſed tantum ex radicum extractione; ita*

Digitized by Google

*ita numeros, vel quantitates non analyticas nunquam provenire ex analyticarum additione, ſubductione, multiplicatione, diviſione, radicum extractione, ſed ex ſexta hac operatione; ita ut hæc noſtra inventio addat arithmeticæ aliam operationem, & geometriæ aliam rationis ſpeciem, idem enim eſt (ſicut in hoc tractatulo demonſtro) rationem circuli ad diametri quadratum in analytica ſeu illa rationis ſpecie hactenus cognita exhibere, ac rationem inter quadrati latus & ejuſdem diametrum in commenſurabilibus: verum certè eſt me hanc demonſtrationem integram ad phraſem geometricam non reduxiſſe, nam ut hoc perficiatur, opus eſt non parvo volumine de quantitatum analyticarum mutuo inter ſe relatione & incommenſurabilitate in genere, quod miror nullum unquam ſcripſiſſe, cum in his tam latè pateant inventionum campi; nam ex his petenda eſt demonſtratio, quod meſolabium non poſſit perfici ope regulæ & circini, item quod non ſemper & quando æquationes affectæ poſſunt reduci ad puras, item quod neceſſaria ſit ad minimum talis generis curva ad mechanicam talium æquationum reſolutionem, cum talibus innumeris, quæ à præſtantioribus geometris impoſſibilia eſſe deprehenduntur ex analyſi, & à rudioribus quotidie & fruſtra quæruntur. Scripſit Euclides decimum ſuum librum ſolummodo (niſi in paucis quibuſdam propoſitionibus generalibus) de incommenſurabilitate facta ab extractione radicis quadratæ;*

Digitized by Google

*tæ; neque quantum ſcio ab ullo alio tractata eſt hæc materia, etiamſi geometriæ ſpeculativæ non ſolum utiliſſima ſit, ſed etiam maxime admirabilis; in ipſo enim limine admiranda occurrunt theoremata; e.g. Si fuerit progreſſio geometrica cujus unus terminus fuerit propoſitæ quantitati commenſurabilis longitudine vel poteſtate quacunque, & alius quilibet, binomium, trinomium, &c. quodcunque, impoſsibile eſt duos totius progreſſionis terminos in infinitum continuatæ eſſe inter ſe commenſurabiles longitudine vel poteſtate quacunque: alia multa poſſem afferre, ſed pro commodiore fortaſſis tempore hæc reſervo, ſatis exiſtimans pro præſenti hæc analyticè demonſtraſſe; etſi enim analyſis aſſenſum adeo violenter non cogat ac geometria, nunquam tamen reſpuit nec reſpuere poteſt geometria, quod probavit ſemel analyſis geometrica. Ex hac inventione deduco quoque novam ſectionem angularium & logorithmorum doctrinam, facilem quidem, in praxi expeditiſsimam & geometrica demonſtratione munitam; hactenus enim logorithmorum conſtructio prolixiſſima, conjectura potius quam ſcientia videbatur, & diviſio anguli in partes æquales ultra quinque numero primo numeratas in praxim vix admitti poterat. hæc omnia ſumma (qua poſſum) brevitate & perſpicuitate demonſtro; neque ſcrupuloſus ſum in citationibus, utpote peregrinus, & libris ad tale opus deſtitutus, te enim ſuppono in geometricis non mediocriter verſatum, alioquin nul-*

*lum hinc fructum colliges.*

# DEFINITIONES.

1 Si in circulo, ellipſe vel hyperbola ducantur è centro in ejus perimetrum duæ rectæ, appellamus planum ab illis rectis & perimetri ſegmento comprehenſum, ſectorem.

2 Si perimetri ſegmentum inter illas rectas comprehenſum à rectis quotcumque ſubtendatur, ita ut triangula rectilinea (quorum communis vertex eſt ſectionis centrum & baſes rectæ ſubtendentes) ſint æqualia; vocamus rectilineum illud ab iſtis triangulis conflatum, polygonum regulare inſcriptum, ſi ſectio conica fuerit circulus vel ellipſis; quod ſi fuerit hyperbola, vocamus illud rectilineum polygonum regulare circumſcriptum.

3 Si perimetri ſegmentum inter illas rectas comprehenſum à rectis quotcunque tangatur & à tactibus ad ſectionis centrum ducantur rectæ; ſi inquam omnia trapezia, a tangentibus proximis & rectis ad centrum comprehenſa, fuerint æqualia; appello rectilineum ab illis conflatum, polygonum regulare circumſcriptum, ſi ſectio conica ſit ellipſis vel circulus, & polygonum regulare inſcriptum ſi fuerit hyperbola.

4 Si omnes anguli (excepto illo ad ſectionis centrum) polygoni regularis à ſubtendentibus comprehenſi inſiſtant omni-

Digitized by Google

omnibus contactum punctis polygoni regularis à tangentibus comprehenſi, appello hæc polygona complicata.

5 Quantitatem dicimus à quantitatibus eſſe compoſitam; cum à quantitatum additione, ſubductione, multiplicatione, diviſione, radicum extractione, vel quacunque alia imaginabili operatione, fit alia quantitas.

6 Quando quantitas componitur ex quantitatum additione, ſubductione, multiplicatione, diviſione, radicum extractione; dicimus illam componi analyticè.

7 Quando quantitates à quantitatibus inter ſe commenſurabilibus analyticè componi poſſunt, dicimus illas eſſe inter ſe analyticas.

8 Si à quantitatibus quotcunque A, B, C, D, E, componatur quantitas X, & à quantitatibus F, G, C, D, E, componatur quantitas Z, eâdem omnino methodo & iisdem omnino operationibus quibus antè componebatur X, poſitis quantitatibus F, G, loco quantitatum A, B, ſi inquam hoc fiat. dicimus quantitatem X eodem modo componi à quantitatibus A, B, quo Z componitur à quantitatibus F, G.

9 Sint duæ quantitates A, B, à quibus componantur duæ aliæ quantitates C, D, quarum differentia ſit minor differentia quantitatum A, B, & eodem modo quo C, componitur à quantitatibus A, B, componatur E à quantitatibus C, D; & eodem modo quo D componitur à quantitatibus A, B, componatur F, à quantitatibus C, D; & eo-

| | |
|---|---|
| A | B |
| C | D |
| E | F |
| G | H |

eodem modo quo E componitur à quantitatibus C, D, vel C à quantitaiibus A, B, componatur G à quantitatibus E, F; & eodem modo quo F componitur à quantitatibus C, D, vel D à quantitatibus A, B, componatur H à quantitatibus E, F; atque ita continuetur ſeries: appello hanc ſeriem, ſeriem convergentem.

10 Ejus termini juxta ſe poſiti nempe A, B, vel C, D, vel E, F, vel G, H, dicuntur termini convergentes.

## PETITIONES.

1 Petimus quantitates, à quantitatibus datis inter ſe analyticis analyticè compoſitas, eſſe inter ſe & cum quantitatibus datis analyticas.

2 Item quantitates, quæ à quantitatibus datis inter ſe analyticis non poſſunt analyticè componi, non eſſe cum quantitatibus datis analyticas.

Præcedentes petitiones quibusdam fortaſſis obſcuræ videbuntur, ſed tamen ex analyſeos elementis ſunt ſatis manifeſtæ.



Digitized by Google

# VERA
# CIRCULI ET HYPERBOLÆ
# QUADRATURA.

Sit circuli, ellipſeos vel hyperbolæ ſegmentum B I P cujus centrum A: compleatur triangulum A B P, & ſegmentum in punctis, B, P, tangentes ducantur rectæ B F, P F, ſe invicem ſecantes in puncto F; producatur (ſi opus ſit) recta A F ſegmentum interſecans in puncto I & rectam B P in puncto Q; deinde jungantur rectæ B I, P I. TAB. XLIII. Fig. 1. 2. 3.

## PROP. I. THEOREMA.

*Dico trapezium* B A P I *eſſe medium proportionale inter trapezium* B A P F, *&* *triangulum* B A P.

Quoniam recta A Q ducitur per F concurſum duarum rectarum F B, F P, ſegmentum in punctis B, P, tangentium; igitur recta A Q rectam B P contactuum puncta jungentem bifariam ſecabit in puncto Q; & proinde triangulum A B Q eſt æquale triangulo A Q P, & trianguIum F B Q triangulo F Q P; & igitur triangulum A B F æquale eſt triangulo A P F; eſt ergo triangulum A B F dimidium trapezii A B F P: eodem modo probatur triangulum A B I eſſe dimidium trapezii A B I P; & triangulum A B Q eſt dimidium trianguli A B P: cumque triangula A B F, A B I, A B Q, eandem habeant altitudinem, inter ſe ſunt ut baſes, ſed eorum baſes nempe A F, A I, A Q, ſunt continuè proportionales; & igitur ipſa quoque triangula ſunt continuè proportionalia; & proinde eorum dupla nimirum trapezia A B F P, A B I P, & triangulum A B P ſunt continuè proportionalia in ratione A F ad A I, quod demonſtrare oportuit.

 Du-

Ducatur recta D L ſegmentum tangens in puncto I, & rectis B F, F P, occurrens in punctis D, L, ita ut compleatur polygonum A B D L P.

## PROP. II. THEOREMA.

TAB. XLIII. Fig. 1. 2. 3. *Dico trapezia* A B F P, A B I P *ſimul, eſſe ad duplum trapezii* A B I P, *ſicut trapezium* A B F P *ad polygonum* A B D L P.

Quoniam recta A F, ducta per contactum rectæ D L cum ſegmento, ducitur etiam per concurſum duarum rectarum F B, F P, rectam D L terminantium & ſegmentum in duobus punctis tangentium; igitur recta D L bifariam ſecatur in puncto I; & proinde triangulum F D I æquale eſt triangulo F I L, at triangulum A B F æquale eſt triangulo A P F; & igitur trapezium A B D I æquale eſt trapezio A P L I; trapezium ergo A P L I dimidium eſt polygoni A B D L P. ducatur recta A L: manifeſtum eſt ex præcedentis demonſtratione triangulum A I L eſſe æquale triangulo A L P; ſed ut triangulum A L F ad triangulum A L I ita F A ad A I, & ut F A ad A I ita trapezium A B F P ad trapezium A B I P; & igitur ut trapezium A B F P ad trapezium A B I P; ita triangulum A L F ad triangulum A L I; & componendo, ut trapezia A B F P, A B I P ſimul, ad trapezium A B I P, ita triangulum A F L & triangulum A I L ſimul, hoc eſt triangulum A F P, ad triangulum A I L: & conſequentes duplicando, ut trapezia A B F P, A B I P ſimul, ad duplum trapezii A B I P, ita triangulum A F P, ad trapezium A I L P: at triangulum A F P eſt dimidium trapezii A B F P, & trapezium A I L P eſt dimidium polygoni A B D L P; & igitur ut trapezia A B F P, A B I P ſimul, ad duplum trapezii A B I P, ita trapezium A B F P ad polygonum A B D L P, quod demonſtrare oportuit.

PROP.

Digitized by Google

## PROP. III. THEOREMA.

*Dico triangulum* B A P, *& trapezium* A B I P *ſimul, eſſe ad trapezium* A B I P, *ut duplum trapezii* A B I P *ad polygonum* A B D L P. TAB. XLIII. Fig. 1. 2. 3.

In antecedente demonſtratum eſt trapezia A B F P, A B I P ſimul, eſſe ad duplum trapezii A B I P, ſicut trapezium A B F P ad polygonum A B D L P: & permutando trapezia A B F P, A B I P ſimul, ſunt ad trapezium A B F P, ut duplum trapezii A B I P ad polygonum A B D L P. & quoniam trapezium A B F P, trapezium A B I P & triangulum A B P, ſunt continuè proportionalia; erit trapezium A B I P ad trapezium A B F P, ut triangulum A B P ad trapezium A B I P; & componendo, ut trapezia A B I P, A B F P ſimul, ad trapezium A B F P, ita triangulum A B P & trapezium A B I P ſimul, ad trapezium A B I P: erat autem, ut trapezia A B I P, A B F P, ſimul, ad trapezium A B F P, ita duplum trapezii A B I P ad polygonum A B D L P; & igitur ut triangulum A B P & trapezium A B I P ſimul, ad trapezium A B I P, ita duplum trapezii A B I P ad polygonum A B D L P, quod demonſtrare oportuit.

Producantur (ſi opus ſit) rectæ A D, A L, ſegmentum ſecantes in punctis E & O, & rectas B I, I P, in H & M: deinde jungantur rectæ B E, E I, I O, O P, ut compleatur polygonum A B E I O P.

## PROP. IV. THEOREMA.

*Dico polygonum* A B E I O P *eſſe medium proportionale inter polygonum* A B D L P *& trapezium* A B I P. TAB. XLIII. Fig. 1. 2. 3.

Ex hujus prima manifeſtum eſt trapezium A I L P, trapezium A I O P & triangulum A I P eſſe continuè pro-

proportionalia, & ex prædictis ſatis facile colligi poteſt trapezium A I L P eſſe dimidium polygoni A B D L P & trapezium A I O P eſſe dimidium polygoni A B E I O P & triangulum A I P eſſe dimidium trapezii A B I P: & proinde terminos duplicando, polygonum A B D L P, polygonum A B E I O P & trapezium A B I P ſunt continuè proportionalia, quod demonſtrare oportuit.

Ducantur rectæ C G, K N, ſegmentum tangentes in punctis E, O, & rectis D L, D B, L P, occurrentes in punctis C, G, K, N, ut compleatur polygonum A B C G K N P.

## PROP. V. THEOREMA.

TAB. XLIII. Fig. 1. 2. 3. *Dico trapezium* A B I P *& polygonum* A B E I O P *ſimul, eſſe ad polygonum* A B E I O P, *ut duplum polygoni* A B E I O P *ad polygonum* A B C G K N P.

Ex hujus tertia manifeſtum eſt triangulum A B I & trapezium A B E I ſimul, eſſe ad trapezium A B E I, ut duplum trapezii A B E I ad polygonum A B C G I: & ex prædictis facile concludi poteſt triangulum A B I eſſe dimidium trapezii A B I P, & trapezium A B E I eſſe dimidium polygoni A B E I O P, & polygonum A B C G I eſſe dimidium polygoni A B C G K N P; & proinde terminos duplicando, trapezium A B I P & polygonum A B E I O P ſimul, erunt ad polygonum A B E I O P ut duplum polygoni A B E I O P ad polygonum A B C G K N P, quod demonſtrandum erat.

Hinc facile colligi poteſt polygonum A B C G K N P eſſe medium harmonicum inter polygona A B E I O P, A B D L P, quod hic admonuiſſe ſufficiat, in ſequentibus enim demonſtrabitur.

SCHO.

Digitized by Google

# SCHOLIUM.

Duæ præcedentes propoſitiones eodem modo demonſtrari poſſunt de duobus quibuſcunque polygonis complicatis loco polygonorum complicatorum ABIP, AB DLP; polygonum enim à tangentibus comprehenſum tot continet æqualia trapezia, quot continet polygonum à ſubtendentibus comprehenſum æqualia triangula: atque hinc evidens eſt has polygonorum analogias ita ſe habere in infinitum, dùcendo nimirum rectas AN, AK, AG, AC, per puncta R, T, S, V, & adhuc alia & alia polygona intra & extra ſemper ſcribendo: notandum nos appellare hanc polygonorum inſcriptionem & circumſcriptionem, inſcriptionem & circumſcriptionem ſubduplam, ex prædictis patet (ſi ponatur triangulum ABP $= a$, & trapezium ABFP $= b$) trapezium ABIP eſſe $vqab$ & polygonum ABDLP $\frac{2ab}{a + vqab}$: eodem modo poſito trapezio ABIP $= c$, & polygono ABDLP $= d$, erit polygonum ABEIOP $= vqcd$ & polygonum ABCGKNP $= \frac{2cd}{c + vqcd}$, ita ut evidens ſit hanc polygonorum ſeriem eſſe convergentem; atque in infinitum illam continuando, manifeſtum eſt tandem exhiberi quantitatem ſectori circulari, elliptico vel hyperbolico ABEIOP æqualem; differentia enim polygonorum complicatorum in ſeriei continuatione ſemper diminuitur, ita ut omni exhibita quantitate fieri poſſit minor, ut in ſequentis theorematis Scholio demonſtrabimus: ſi igitur prædicta polygonorum ſeries terminari poſſet, hoc eſt, ſi inveniretur ultimum illud polygonum inſcriptum (ſi ita loqui liceat) æquale ultimo illi polygono circumſcripto, daretur infallibiliter circuli & hyperbolæ quadratura: ſed quoniam difficile eſt, & in geometria omnino fortaſſe inauditum tales ſeries terminare; præmittendæ ſunt quædam propoſitiones è quibus inveniri poſſint hujuſmodi aliquot ſerierum terminationes, & tandem (ſi

fieri poſſit) generalis methodus inveniendi omnium ſerierum convergentium terminationes.

## PROP. VI. THEOREMATA.

TAB. XLIII. Fig. 1. 2. 3. *Dico differentiam inter triangulum* ABP *& trapezium* ABFP *majorem eſſe duplo differentiæ inter trapezium* ABIP *& polygonum* ABDLP.

Sit triangulum A B P, A; trapezium A B F P, B; trapezium ABIP, C, & polygonum ABDLP, D: quoniam A eſt ad C ut C ad B, igitur ut differentia inter A & C ad A, ita differentia inter C & B ad C; & permutando, ut differentia inter A & C ad differentiam inter C & B ita A ad C; & componendo, ut differentia inter A & C & differentia inter C & B ſimul, hoc eſt differentia inter A & B, ad differentiam inter C & B, ita A † C ad C; ſed ut A † C ad C ita 2 C ad D, & ideo differentia inter A & B eſt ad differentiam inter C & B ut 2 C ad D. quoniam A † C eſt ad C ut 2 C ad D, erit permutando ut A † C ad 2 C ita C ad D; & dividendo, ut differentia inter A & C ad 2 C ita differentia inter C & D ad D; & permutando, differentia inter A & C eſt ad differentiam inter C & D ut 2 C ad D; ſed demonſtratum eſt differentiam inter A & B eſſe ad differentiam inter C & B ut 2 C ad D; & proinde differentia inter A & B eſt ad differentiam inter C & B, ut differentia inter A & C ad differentiam inter C & D; ſed differentia inter A & B eſt major differentia inter G & B, & ideo differentia inter A & C eſt major differentia inter C & D: & prædictam analogiam permutando, differentia inter A & B eſt ad differentiam inter A & C, ut differentia inter C & B ad differentiam inter C & D; at differentia inter A & B eſt major differentia inter A & C, & ideo differentia inter C & B eſt major differentia inter C & D; atque differentia inter A & B æqualis eſt differentiis, inter A & C, inter C & B; cumque earum utravis ſit major differentia inter

ter C & D, manifeſtum eſt differentiam inter A & B majorem eſſe duplo differentiæ inter C & D, hoc eſt differentiam inter triangulum A B P & trapezium A B F P majorem eſſe duplo differentiæ inter trapezium A B I P, & polygonum A B D L P, quod demonſtrare oportuit.

## SCHOLIUM.

Eodem prorſus modo demonſtratur differentiam inter trapezium A B I P & polygonum A B D L P majorem eſſe duplo differentiæ inter polygonum A B E I O P & polygonum A B C G K N P. denique eodem modo demonſtrari poteſt hic differentiarum exceſſus in ſubdupla noſtra polygonorum complicatorum deſcriptione in infinitum; differentia enim priorum nempe inſcripti & circumſcripti major ſemper erit duplo differentiæ immediatè ſequentium nimirum inſcripti quoque & circumſcripti, & proinde aufertur majus quam dimidium a priorum differentia ut fiat differentia immediatè ſequentium; & igitur continuando ſubduplam polygonorum deſcriptionem, inveniri poſſunt duo polygona complicata, quorum differentia ſit minor qualibet exhibita quantitate, ut in præcedentis Scholio aſſumpſimus.

Sint duæ quantitates indefinitæ $a$ minor $b$ major, ſintque datæ duæ rationes majoris inæqualitatis $c$ ad $d$, & $c$ ad $e$; deinde ſit ut $c$ ad $d$ ita $b-a$ ad $\frac{bd-ad}{c}$ cui addatur quantitas $a$ ut fiat $\frac{ca+bd-ad}{c}$, quæ quantitas ponatur immediate ſub $a$: fiatque ut $c$ ad $e$ ita $b-a$ ad $\frac{be-ae}{c}$, quæ quantitas ſubſtrahatur ex $b$ & relictum nempe $\frac{bc-be+ae}{c}$ ponatur ſub $b$. continuetur deinde ſeries convergens cujus primi termini convergentes ſunt $a$, $b$, & ſecundi termini convergentes $\frac{ca+bd-ad}{c}$, $\frac{bc-be+ae}{c}$. manifeſtum eſt terminum $\frac{ca+bd-ad}{c}$ majorem

$$\begin{array}{cccc} c & \frac{d}{e} & a & b \\ & & \frac{ca+bd-ad}{c} & \frac{bc-be+ae}{c} \end{array}$$

eſſe termino $a$, quoniam termino $a$ additur $\frac{bd-ad}{c}$ ut fiat terminus $\frac{ca+bd-ad}{c}$: manifeſtum quoque eſt terminum $\frac{ca+bd-ad}{c}$ minorem eſſe termino $b$, quoniam differentia inter $a$ & $b$ eſt ad differentiam inter a & $\frac{ca+bd-ad}{c}$ in ratione majoris inæqualitatis: evidens quoque eſt terminum $\frac{bc-be+ae}{c}$ minorem eſſe termino $b$. quoniam ex $b$ ſubſtrahitur $\frac{be-ae}{c}$ ut fiat $\frac{bc-be+ae}{c}$; manifeſtum etiam eſt terminum $\frac{bc-be+ae}{c}$ majorem eſſe termino $a$, quoniam differentia inter $a$ & $b$ eſt ad differentiam inter $\frac{bc-be+ae}{c}$ & $b$ in ratione majoris inæqualitatis: evidens igitur eſt differentiam inter terminos convergentes $a$ & $b$ majorem eſſe differentiâ inter terminos convergentes $\frac{ca+bd-ad}{c}$ & $\frac{bc-be+ae}{c}$. ſed quoniam termini convergentes $a$ & $b$ ponuntur indefiniti, poſſunt $a$ & $b$ ſumi loco quorumlibet terminorum convergentium totius hujus ſeriei; & poſitis $a$ & $b$ pro terminis hujus ſeriei convergentibus quibuſcunque, ſequitur neceſſario ex ſeriei compoſitione $\frac{ca+bd-ad}{c}$. $\frac{bc-be+ae}{c}$ eſſe terminos convergentes immediatè ſequentes: cumque differentia terminorum $a$ & $b$ major ſit differentia terminorum $\frac{ca+bd-ad}{c}$ & $\frac{bc-be+ae}{c}$, evidens eſt differentiam terminorum convergentium priorum ſemper eſſe majorem differentia terminorum convergentium immediatè ſequentium; & igitur quò magis continuatur hæc ſeries convergens eò minor fit differentia terminorum convergentium: & quoniam hæc differentiarum diminutio ſemper fit proportionaliter nempe in ratione $b-a$ ad $\frac{bc-be+ae-ca-bd+ad}{c}$; igitur poſſunt inveniri hujus ſeriei termini convergentes quorum differentia ſit omni exhibita quantitate minor; & igitur imaginando hanc ſeriem in infinitum continuari, poſſumus imaginari ultimos terminos convergentes eſſe æquales,

quos

quos terminos æquales appellamus ſeriei terminationem.

## PROP. VII. PROBLEMA.

### *Oportet prædictæ ſeriei terminationem invenire.*

Ut huic problemati ſatisfiat, oportet primò invenire quantitatem quæ eodem modo componitur ex terminis convergentibus $a$, $b$, quo ex terminis convergentibus $\frac{ca+bd-ad}{c}$, $\frac{bc-be+ae}{c}$, hoc autem facile fit hoc modo: inveniatur quantitas quæ multiplicata in $a$ & addita $b$ multiplicata in quantitatem datam $m$, eandem quantitatem facit ac ſi multiplicaretur in $\frac{ca+bd-ad}{c}$ & adderetur $\frac{bc-be+ae}{c}$ multiplicata etiam in eandem quantitatem datam $m$. ſit quantitas illa $z$, & proinde $za+bm$ æquatur $\frac{zca+zbd-zad+mbc-mbe+mae}{c}$, & æquatione reducta invenitur $z=\frac{mae-mbe}{ad-bd}$; quæ quantitas ſive multiplicata in $a$ & addita $m$, ſive multiplicata in $\frac{ca+bd-ad}{c}$ & addita $\frac{mbc-mbe+mae}{c}$ efficit eandem in utroque caſu quantitatem nempe $\frac{maae-mbae+mbad-mbbd}{ed-bd}$: & proinde prædicta quantitas eodem modo componitur ex terminis convergentibus $a$, $b$, quo componitur ex terminis convergentibus $\frac{ca+bd-ad}{c}$, $\frac{bc-be+ae}{c}$. atque $a$ & $b$ quoniam ſunt quantitates indefinitæ poſſunt eſſe quilibet totius ſeriei termini convergentes, modò termini convergentes immediatè ſequentes ſint $\frac{ca+bd-ad}{c}$ & $\frac{bc-be+ae}{c}$, & proinde quantitas $\frac{maae-mbae+mbad-mbbd}{cd-bd}$ eodem modo componitur ex quibuslibet totius ſeriei terminis convergentibus quo componitur ex terminis convergentibus $a$, $b$; & igitur prædicta

dicta quantitas eodem etiam modo componitur ex ultimis ejus terminis convergentibus, qui æquales ſunt: ſit ultimus ille terminus $x$ qui multiplicatus in $\frac{mae - mbe}{ad - bd}$ & in $m$ efficit $xm$ & $\frac{xmae - xmbe}{ad - bd}$, quorum factorum ſumma nempe $\frac{xmae - xmbe + xmad - xmbd}{ad - bd}$ æquatur $\frac{maae - mbae + mbad - mbbd}{ad - bd}$ & æquatione reducta invenitur $x$ ſeu ſeriei terminatio $\frac{aae - bae + bad - bbd}{ae - be + ad - bd}$, quam invenire oportuit.

Ne minus exercitatis obſcurum videatur hoc problema, illud in numeris illuſtrabimus: ſit $c$ 7, $d$ 2, $e$ 3, $a$ 28, $b$ 42, erunt ſecundi termini convergentes 32, 36, tertii $33\frac{1}{7}$, $34\frac{2}{7}$, & ejus terminatio $33\frac{3}{5}$.

Neminem moveat, quod (etiamſi $a$ ſit minor quam $b$) $\frac{ea + bd - ad}{c}$ poſſit eſſe major quam $\frac{bc - be + ae}{c}$, analyticè enim major à minore poteſt ſubſtrahi, cujus tamen exemplum non gravabimus exhibere, ſit $c$ 7, $d$ 5, $e$ 4, $a$ 28, $b$ 42; erunt ſecundi termini convergentes 38, 34, & tertii $35\frac{1}{7}$, $36\frac{2}{7}$, ejuſque terminatio $35\frac{7}{9}$.

Animadvertendum eſt hujus problematis ſolutionem eodem modo ſe habere, etiamſi loco $a$ ponatur cyphra ſeu merum nihil, Ex. Gr; ſit $c$ 8, $d$ 3, $e$ 4, $a$ 0, $b$ 24; erunt ſecundi termini convergentes 9, 12, & tertii $10\frac{1}{8}$, $10\frac{1}{2}$; & ſeriei terminatio $10\frac{2}{7}$,

Harum etiam ſerierum terminationes poſſunt inveniri ex Gregorii à S. Vincentio lib. de progreſſ. geometrica, etiamſi methodo longe ab hac diverſa.

PROP.

## PROP. VIII. PROBLEMA.

*Sint duæ quantitates datæ* A, B, *& ratio quælibet data* C *ad* D: *oportet invenire aliam quantitatem, ut ratio ejus ad* A *ſit multiplicata rationis* B *ad* A *in ratione* C *ad* D.

| | |
|---|---|
| EDC | AFBG |

Sit primò ratio C ad D commenſurabilis, ſitque inter C & D communis menſura E; & quoties E continetur in D toties ſit ratio F ad A ſubmultiplicata rationis B ad A; & quoties E continetur in C toties ſit ratio G ad A multiplicata rationis F ad A: dico G eſſe quantitatem illam quæſitam. ratio G ad A eſt multiplicata rationis F ad A in ratione C ad E, & ratio F ad A eſt multiplicata rationis B ad A in ratione E ad D; & igitur ex æqualitate, ratio G ad A eſt multiplicata rationis B ad A in ratione C ad D, quod demonſtrare oportuit.

Quod ſi ratio C ad D ſit incommenſurabilis, geometricam hujus problematis praxim eſſe impoſſibilem mihi perſuadeo; approximatione tamen fieri poteſt, aſſumendo rationem commenſurabilem ejus loco, quæ quàm proximè ad illam accedat.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | G | H | A | B |
| | N | I | K | C | D |
| M | | R | S | E | F |
| | O | T | V | X | Y |
| | | L | | Z | |

Sit ſeries convergens, cujus primi termini convergentes ſint A, B, ſecundi C, D, tertii E, F; ſintque ſecundi termini ita facti à primis, ut ratio B majoris ad A minorem ſit multiplicata rationis C ad A in ratione data mojoris inæqualitatis M ad N, & ut ratio B ad A ſit multiplicata rationis D ad A in ratione data majoris inæqualitatis M ad O: ſintque tertii termini eodem modo facti ex ſecundis quo ſecundi facti ſunt ex primis; atque ita continuetur ſeries.

PROP.

## PROP. IX. PROBLEMA.

*Oportet prædictæ ſeriei terminationem invenire.*

Ponatur G cyphra ſeu nihil hoc eſt exponens rationis æqualitatis, ſeu rationis A ad A; ſitque H ad libitum exponens rationis B ad A: ſit ut M ad N ita differentia inter G & H, hoc eſt ipſa H vel exponens rationis B ad A ad exceſſum quo I ſuperat G hoc eſt ipſam I, ſed ut M ad N ita ratio B ad A eſt multiplicata rationis C ad A; & igitur Exceſſus quo I ſuperat G hoc eſt ipſa I eſt exponens rationis C ad A. ſit ut M ad O ita differentia inter G & H hoc eſt H ad exceſſum quo K ſuperat G hoc eſt ipſam K, ſed ut M ad O ita ratio B ad A eſt multiplicata rationis D ad A, cumque H ſit exponens rationis B ad A, erit K exponens rationis D ad A: ſi igitur I ſit exponens rationis C ad A & K exponens rationis D ad A; erit exceſſus quo K ſuperat I exponens rationis D ad C. deinde ſit ut M ad N ita exceſſus quo K ſuperat I ſeu exponens rationis D ad C ad exceſſum quo R ſuperat I, ſed ut M ad N ita ex ſeriei compoſitione ratio D ad C eſt multiplicata rationis E ad C, atque exceſſus quo K ſuperat I eſt exponens rationis D ad C; & proinde exceſſus quo R ſuperat I eſt exponens rationis E ad C, atque I eſt exponens rationis C ad A, & proinde R eſt exponens rationis E ad A. deinde ſit ut M ad O ita exceſſus quo K ſuperat I ad exceſſum quo S ſuperat I, ſed ut M ad O ita ex ſeriei compoſitione ratio D ad C eſt multiplicata rationis F ad C, cumque exceſſus quo K ſuperat I ſit exponens rationis D ad C; erit exceſſus quo S ſuperat I exponens rationis F ad C, atque I eſt exponens rationis C ad A, & proinde S eſt exponens rationis F ad A: cum igitur R ſit exponens E ad A & S exponens rationis F ad A; erit exceſſus quo S ſuperat R exponens rationis F ad E: & utramque ſeriem continuando, demonſtratur ut antè T eſſe exponentem rationis X ad A, & V eſſe expo-

Digitized by Google

exponentem rationis Y ad A; denique ſemper demonſtrabitur terminos convergentes ſeriei exponentium eſſe exponentes rationum, terminorum convergentium ſeriei propoſitæ ad primam ſeriei quantitatem A, modò utriuſque ſeriei termini convergentes ſint in eodem ab initio ordine: & proinde terminatio ſeriei exponentium per hujus 7 inventa, quæ Ex: Gr: ſit L, erit exponens rationis, terminationis ſeriei propoſitæ ad primum terminum A: inveniatur igitur ratio Z ad A quæ ſit multiplicata rationis datæ B ad A in ratione data L ad H; eritque Z terminatio quæſita, quam invenire oportuit.

Ad hoc problema in numeris illuſtrandum ſit M 4, N 2, O 1, A $^{6}$, B $^{10}$; erunt ſecundi termini convergentes √q60, √qq2160, tertii termini convergentes √qqq7776000, √qqqq10077696000000, & ſeriei terminatio √c360.

Aliud exemplum, ſit M 6, N 2, O 3, A 5, B 10; erunt ſecundi termini convergentes √c250, √q50, tertii termini convergentes √qcc488281250000000, √qqc781250000, & ſeriei terminatio √ſ12500. hactenus terminavimus omnes ſeries convergentes quæ fieri poſſunt vel à ſola proportione arithmetica vel a ſola proportione geometrica, nunc vero methodum aggredimur, cujus ope omnium ſerierum convergentium terminationes (ſi modò ſint in rerum natura) inveniri poſſunt.

## PROP. X. PROBLEMA.

*Ex data quantitate, eodem modo compoſita à duobus terminis convergentibus cujuſcunque ſeriei convergentis, quo componitur ex terminis convergentibus ejuſdem ſeriei immediatè ſequentibus; ſeriei propoſitæ terminationem invenire.*

Sit ſeries convergens, cujus duo termini convergentes quicunque ſint a, b, & termini convergentes immediatè ſe-

ſequentes $\sqrt{q\,ab}$, $\frac{aa}{\sqrt{q\,ab}}$ ſumma terminorum convergentium $a + b$ multiplicata in terminum convergentem primum $a$ efficit $aa + ab$: & ſumma terminorum convergentium immediate ſequentium nempe $\sqrt{q\,ab} + \frac{aa}{\sqrt{q\,ab}}$ multiplicata in primum terminum convergentem $\sqrt{q\,ab}$ efficit etiam $aa + ab$; ex his invenienda ſit ſeriei propoſitæ terminatio. manifeſtum eſt quantitatem $aa + ab$ eodem modo fieri à terminis convergentibus $a, b$, quo à terminis convergentibus immediatè ſequentibus $\sqrt{q\,ab}$, $\frac{aa}{\sqrt{q\,ab}}$: & quoniam quantitates $a, b$, indefinitæ ponuntur pro quibuslibet totius ſeriei terminis convergentibus, evidens eſt ſummam quorumcunque terminorum convergentium propoſitæ ſeriei multiplicatam in primum terminum convergentem efficere quantitatem æqualem illi, quæ fit à ſumma terminorum convergentium immediatè ſequentium multiplicata etiam in primum ſuum terminum convergentem; cumque duo termini convergentes duos terminos convergentes ſemper immediatè ſequuntur, manifeſtum eſt ſummam duorum quorumlibet terminorum convergentium multiplicatam in primum ſemper efficere eandem quantitatem nempe $aa + ab$, atque ultimi termini convergentes ſunt æquales, & proinde ſit ultimus ille terminus ſeu ſeriei terminatio $z$, quæ ſibi addita & in ſummam multiplicata efficit $2zz$, quæ quantitas debet eſſe æqualis quantitati $aa + ab$, & æquatione reſoluta dabitur $z$ ſeu ſeriei terminatio $\sqrt{q}\,\frac{aa + ab}{2}$ quam invenire oportuit.

Et proinde ad inveniendam cujuscunque ſeriei convergentis terminationem; opus eſt ſolummodo invenire quantitatem eodem modo compoſitam ex terminis convergentibus primis, quo componitur eadem quantitas ex terminis convergentibus ſecundis.

## CONSECTARIUM.

Quoniam non refert in problemate ſive termini convergentes $a, b$, ſint primi, ſecundi, vel tertii &c; manifeſtum eſt omnes

omnes ſeriei convergentis terminationem eodem modo eſſe compoſitam ex terminis convergentibus primis quo ex terminis convergentibus ſecundis, tertiis, vel quartis, &c.

## PROP. XI. THEOREMA.

*Dico ſectorem circuli, ellipſeos vel hyperbolæ* ABIP *non eſſe compoſitum analyticè à triangulo* ABP *& trapezio* ABFP. TAB. XLIII. Fig. 1. 2. 3.

Ponatur triangulum ABP $a$ & trapezium ABFP $b$: manifeſtum eſt ex prædictis trapezium ABIP eſſe $\sqrt{ab}$ & polygonum ABDLP $\frac{2ab}{a+\sqrt{ab}}$, item ſectorem ABIP eſſe hujus ſeriei convergentis terminationem. ut ex ſeriei terminis auferantur ſigna radicis & fractionis, pro $a$ & $b$ primis ſeriei terminis convergentibus, hoc eſt pro triangulo ABP & trapezio ABFP ponantur $a^3+a^2b$ & $ab^2+b^3$; eruntque ſecundi ſeriei termini convergentes, hoc eſt trapezium ABIP & polygonum ABDLP, $ba^2+b^2a$ & $2b^2a$, dico ſeriei convergentis (cujus primi termini convergentes ſunt $a^3+a^2b$, $ab^2+b^3$ & ſecundi ſunt $ba^2+b^2a$, $2b^2a$) terminationem non eſſe compoſitam analyticè a terminis $a^3+a^2b$, $ab^2+b^3$: ſi enim componatur prædicta terminatio analyticè a terminis convergentibus $a^3+a^2b$, $ab^2+b^3$; componetur etiam eadem terminatio analyticè & eodem omnino modo à terminis convergentibus $ba^2+b^2a$, $2b^2a$; & proinde eadem quantitas, nempe prædicta terminatio, eodem modo componitur analyticè ex terminis $a^3+a^2b$, $ab^2+b^3$, quo componitur ex terminis $ba^2+b^2a$, $2b^2a$,

| | | |
|---|---|---|
| ſed nulla quantitas poteſt eodem modo analyticè componi ex terminis $a^3+a^2b$, $ab^2+b^3$, quo componitur | $a^3+a^2b$ | $ab^2+b^3$. |
| | $ba^2+b^2a$ | $2b^2a$ |

ex terminis $ba^2+b^2a$, $2b^2a$, quod ſic demonſtro. ſi analyticè componeretur quantitas ex terminis $a^3+a^2b$, $ab^2+b^3$,

eodem modo, quo analyticè componitur eadem quantitas ex terminis $ba^2 + b^2a$, $2b^2a$; addendo, ſubtrahendo, multiplicando & dividendo terminos $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$ & radices ex factis extrahendo, eadem fieret quantitas ac ſi eodem modo adderentur, ſubducerentur, multiplicarentur & dividerentur termini $ba^2 + b^2a$, $2b_2a$, & radices eædem ex factis extraherentur, ſed poſterius fieri non poteſt, ergo nec prius; minorem ſic probo, ſi eadem fieret quantitas ex additione, ſubductione, multiplicatione, diviſione & radicum extractione terminorum $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$, quæ fieret ex eadem additione, ſubductione, multiplicatione, diviſione & radicum extractione terminorum $ba^2 + b^2a$, $2b^2a$; tunc addendo æquales quantitates terminis $a^3 + a^2b$, $ba^2 + b^2a$, vel ab illis ſive ipſorum factis æquales quantitates ſubducendo, vel illos ſive ipſorum factos æqualibus quantitatibus multiplicando vel dividendo, vel denique illos ſive ipſorum factos eodem modo in ſe multiplicando, vel ex iiſdem eaſdem radices extrahendo, haſce analyticas operationes aliquo modo mutando, reiterando vel utrumque vel neutrum faciendo, fieri poſſent duo ultima producta, nempe unum à termino $ab^2 + b_3$ & alterum à termino $2b^2a$; ita ut ultimum productum ex termino $a^3 + a^2b$ cum ultimo producto ex termino $ab^2 + b_3$ additum, ſubductum, multiplicatum, diviſum, & ex facto radice aliqua extracta (haſce analyticas operationes aliquo modo mutando, reiterando vel utrumque vel neutrum faciendo) eandem efficiat quantitatem quam efficit ultimum productum ex termino $ba^2 + b^2a$ cum ultimo producto ex termino $2b^2a$ eodem omnino modo additum, ſubductum, multiplicatum, diviſum, & ex facto eadem etiam radice extracta, haſce analyticas operationes eodem omnino modo mutando, reiterando vel utrumque vel neutrum faciendo; ſed poſterius eſt abſurdum ergò & prius: ſequela majoris patet ex octava definitione hujus, minorem ſic probo, in termino $a^3 + a^2b$ reperitur poteſtas ipſius $a$ nempe $a^3$, quæ eſt altior ulla poteſtate ejuſdem $a$ in termino $ba^2 + b^2a$; & proinde terminos $a^3 + a^2b$, $ba^2 + b^2a$, cum æqua-

æqualibus quantitatibus addendo, ſubtrahendo, multiplicando, dividendo, &c: ſicut ſuperius dictum eſt, ſemper manet poteſtas ipſius a in ultimo producto ex termino $a^3 + a^2b$ altior poteſtate ulla ipſius $a$ in ultimo producto termini $ba^2 + b^2a$, quoniam illos cum æqualibus quantitatibus addendo, ſubſtrahendo, &c, ſemper manent in factis eædem poteſtates, & illos in ſe eodem modo multiplicando ſemper magis elevatur altior poteſtas in termino $a^3 + a^2b$ quam elevatur depreſſior poteſtas in termino $ba^2 + b^2a$, & ex illis eaſdem radices extrahendo, ubi $a$ fuerat elevatior in poteſtate erit etiam elevatior in radice: & quoniam eadem reperitur altiſſima poteſtas ipſius $a$ in termino $ab^2 + b^3$ quæ reperitur in termino $2b^2a$, demonſtratur ut antè altiſſimam poteſtatem ipſius $a$ in ultimo producto ex termino $ab^2 + b^3$ eandem eſſe cum altiſſima poteſtate ipſius $a$ in ultimo producto ex termino $2b^2a$: in ultimo igitur producto termini $a^3 + a^2b$ reperitur altior poteſtas ipſius $a$ quam in ultimo producto termini $ba^2 + b^2a$, & in ultimo producto termini $ab^2 + b^3$ altiſſima poteſtas ipſius $a$ eadem eſt cum altiſſima poteſtate ipſius $a$ in ultimo producto termini $2b^2a$; & igitur ultima producta ex terminis $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$, eodem modo inter ſe addita, ſubducta, multiplicata, diviſa, &c. ſemper efficient quantitatem, in qua reperitur altior poteſtas ipſius $a$ quam ulla quæ reperiri poteſt in quantitate facta ex eadem prorſus additione, ſubductione, multiplicatione, diviſione, &c, productorum à terminis $ba^2 + b^2a$, $2b^2a$; quoniam altior poteſtas cum altera poteſtate ſemper altiorem facit poteſtatem quam depreſſior poteſtas cum eadem altera poteſtate; & igitur iſtæ duæ quantitates non poſſunt eſſe indefinitè æquales, cum reperiatur altior poteſtas ipſius $a$ in una quam in altera: atque hinc evidens eſt quod ſector circuli, ellipſeos vel hyperbolæ ABIP non poſſit componi analyticè à triangulo ABP & trapezio ABFP, quod demonſtrandum erat.

Ut autem evidentius fiat propoſitum, aliam demonſtrationem breviorem faciliorem & ex alio medio petitam hic ſubjun-



Digitized by Google

jungo: quantitas non poteſt componi analyticè ex terminis $a^3 + a^2 b$, $ab^2 + b^3$, eodem modo quo componitur eadem quantitas ex terminis $ba^2 + b^2 a$, $2b^2 a$; quoniam addendo, ſubſtrahendo, multiplicando, dividendo duo binomia $a^3 + a^2 b$, $ab^2 + b^3$ & radices ex ultimo facto extrahendo, plura fiunt nomina in ultimo producto, quam ſi eodem modo adderentur, ſubducerentur, multiplicarentur, dividerentur, binomium $ba^2 + b^2 a$ & ſimplex quantitas $2b^2 a$, & eædem quoque radices ex facto extraherentur; & ſi plura ſint nomina in uno producto quam in altero, impoſſibile eſt ut ſint indefinitè æqualia, quod eſt propoſitum, reliqua enim ex priore demonſtratione haberi poſſunt.

## SCHOLIUM.

Obſcurum fortaſſis videbitur hoc theorema ob multas inuſitatas in geometria voces quas hic adhibere oportet, & ob multa ſuppoſita lemmata, quæ demonſtrare pigebat, quoniam cuivis analyſtæ vel prima lectione ſunt obvia, ex natura enim operationum analyticarum omnino dependent.

Locus hic requirit ut aliquid dicam de proportione inter triangulum ABP & ſectorem ABIP; quod ut fiat, advertendum eſt veriſſimum philoſophorum axioma, nempe omnem noſtram cognitionem à ſenſu ortum habere: inter proportiones enim, ſola commenſurabilis ſenſu attingitur & perfectè ab humana mente intelligitur; incommenſurabilis enim à mathematicis ſolummodo adhuc contemplatur, quatenus commenſurabilis cujuſdam rationis eſt ſubduplicata, ſubtriplicata, &c. vel ex talium additione, ſubductione, &c. genita: hoc eſt, quantitas quæ quantitati propoſitæ eſt incommenſurabilis ex eo ſolummodo ab humana mente contemplatur, quod ex aliquot quantitatum cognitarum & propoſitæ quantitati commenſurabilium additione, ſubductione, multiplicatione, diviſione & radicum extractione componi poſſit: at ex hactenus demonſtratis manifeſtum eſt ſectorem ABIP non poſſe componi ex additione, ſubductione, multiplicatione,

tione, diviſione, & radicum extractione trianguli A B P & trapezii A B F P: triangulum autem A B P & trapezium A B F P ſupponimus eſſe quantitates inter ſe analyticas; & proinde ſector A B I P illis analytica eſſe non poteſt, hoc eſt ex quantitatum ipſis A B P, A B F P analyticarum additione, ſubductione, multiplicatione, diviſione & radicum extractione componi non poteſt; & proinde ex hoc capite nulla poteſt exhiberi ratio inter triangulum A B P & ſectorem A B I P, cum evidens ſit illam non eſſe analyticam. ſed dicet fortè aliquis rationem inter triangulum A B P & ſectorem A B I P omnifariam variari poſſe; & proinde poſſe eſſe inter ſe in ratione qualibet data ſive analytica ſive etiam commenſurabili: reſpondeo hoc eſſe veriſſimum, ſed in hoc caſu ratio inter triangulum A B P & trapezium A B F P non erit analytica; & proinde ex dato circulo ellipſe vel hyperbola nunquam dabitur in analyticis triangulum A B P, quod ex prædictis clariſſimè patet. etiamſi ex prædicto capite non poſſimus comprehendere rationem inter triangulum A B P & ſectorem A B I P, poſſumus tamen ejus aliquam habere cognitionem, ex eo quod ſector A B I P ſit terminatio ſeriei convergentis datæ; & ex hac conſideratione poſſibile eſt invenire quantitatem datæ commenſurabilem cujus differentia à ſectore A B I P minor fuerit quacunque quantitate propoſita, ad hoc enim ſemper recurrendum eſt, cum de quantitatibus quibuſcunque incommenſurabilibus tractant practici, & in hac noſtra approximatione praxis non erit operoſior quam in multis aliis etiam quantitatum analyticarum approximationibus, immo multo brevior, facilior & paratior erit illis Vietæ ſectionibus angularibus, quæ tamen ſummæ matheſeos utilitati in praxem reducuntur. non video ergo quare circuli quadratura diutius æſtimetur ignorari: cum enim demonſtratum ſit rationem circuli ad diametri quadratum non eſſe analyticam, vanum certè erit & ineptum illam ſicut talem impoſterum quærere: at rejectis quantitatibus analyticis, vix credo ullam poſſe eſſe notiorem hiſce noſtrarum ſerierum convergentium terminationibus, ſicut ex ſequentibus pleniſſimè apparebit.

PROP.

## PROP. XII. THEOREMA.

TAB. XLIII. Fig. 1. 2. 3.

Sit trapezium ABIP, A; polygonum ABEIOP, C; polygonum ABCGKNP, D; & polygonum ABDLP, B. dico D eſſe medium harmonicum inter C & B. ex hujus 4, A:C::C:B, & componendo A†C:C::C†B:B, ſed ex hujus 5, A†C:C:: 2 C:D; & ideo C†B:B:: 2 C:D, & permutando B†C: 2 C::B:D, & dividendo, differentia inter B & C eſt ad 2 C, ut differentia inter B & D ad D, & permutando differentia inter B & C eſt ad differentiam inter B & D ut 2 C ad D, hoc eſt, ut C†B ad B, & dividendo, differentia inter D & C eſt ad differentiam inter B & D ut C ad B; & proinde D eſt medium harmonicum inter C & B, quod demonſtrare oportuit.

A C D B

Hæc propoſitio eodem modo locum habet in omnibus polygonis complicatis, ut patet ex ſcholio 5 hujus.

## PROP. XIII. THEOREMA.

Inter duas quantitates A, B, ſit media arithmetica C, media geometrica D & media harmonica E. dico C, D, E, eſſe continuè proportionales. quoniam A, E, B, ſunt in ratione harmonica; erit differentia inter A & E ad differentiam inter E & B ut A ad B; & componendo erit differentia inter A & B ad differentiam inter E & B, ut A†B ad B; deinde permutando & componendo 2 A:A†B:: E:B, ſed 2 A eſt duplum ipſius A & A†B duplum ipſius C, & ideo A:C::E:B; & proinde CE=AB, & AB=DD, ideoque CE=DD; & igitur C:D::D:E, quod demonſtrare oportuit.

A B
C D E

PROP.

## PROP. XIV. THEOREMA.

Sint duo polygona complicata A, B, nempe A intra circuli vel ellipſeos ſectorem & B extra: continuetur ſeries convergens horum polygonorum complicatorum ſecundum noſtram methodum ſubduplam deſcriptorum, ita ut polygona intra circulum ſint A, C, E, &c, & extra circulum B, D, F, &c; dico A † E minorem eſſe quam 2 C: ex prædictis manifeſtæ ſunt ſequentes analogiæ; prima quoniam A, C, B, ſunt continue proportionales; & ſecunda quoniam C, D, B, ſunt harmonice proportionales: & proinde exceſſus C ſupra A, hoc eſt C -- A, eſt ad exceſſum D ſupra C ſeu D — C in ratione compoſita ex proportione A ad C & ex proportione A † C ad A, hoc eſt in ratione A † C ad C; at A † C eſt major quam C, & ideo exceſſus C ſupra A eſt major quam exceſſus D ſupra C, eſt autem D major quam E, & proinde exceſſus C ſupra A multò major eſt quam exceſſus E ſupra C; eſt igitur A † E minor quam 2 C; quod demonſtrare oportuit.

| | |
|---|---|
| A | B |
| C | D |
| E | F |

C — A : B — C :: A : C

B — C : D — C :: A † C : A

## PROP. XV. THEOREMA.

Iiſdem poſitis: dico exceſſum C ſupra A minorem eſſe quadruplo exceſſus E ſupra C. ex prædictis manifeſtæ ſunt ſequentes tres analogiæ, prima quoniam A, C, B, ſunt continuè proportionales; ſecunda, quoniam C, D, B, ſunt harmonicè proportionales; & tertia, quoniam C, E, D, ſunt continuè proportionales; & ideo exceſſus C ſupra A (hoc eſt) C — A eſt ad exceſſum E ſupra C ſeu E — C, ut AC † EC † AE † CC ad CC; at B ma-

C — A : B — C :: A : C

B — C : D — C :: A † C : A

D — C : E — C :: E † C : C

jor eſt quam E, & ideo A B ſeu C C major eſt quam A E, & igitur A E † C C minor eſt quam 2 CC: atque A C † E C eſt ad 2 CC ut A † E ad 2 C, ſed A † E minor eſt quam 2 C; & ideo A C † E C minor eſt quam 2 CC; proinde A C † E C † A E † CC minor eſt quam 4 CC; & igitur C – A minor eſt quadruplo ipſius E – C, quod demonſtrare oportuit.

## PROP. XVI. THEOREMA.

SInt duo Polygona complicata A, B; nempe A extra hyperbolæ ſectorem & B intra: Continuetur ſeries convergens horum polygonorum complicatorum ſecundum noſtram methodum ſubduplam deſcriptorum, ita ut polygona extra hyperbolem ſint A, C, E, &c. & intra hyperbolem B, D, F &c; Dico A † E majorem eſſe quam 2 C. ex prædictis manifeſtæ ſunt ſequentes duæ Analogiæ, prima quoniam A, C, B, ſunt continue proportionales; & ſecunda, quoniam C, D, B, ſunt harmonicè proportionales; &

| | |
|---|---|
| A | B |
| C | D |
| E | F |

proinde exceſſus A ſupra C, hoc eſt A – C, eſt ad exceſſum C ſupra D ſeu C – D; In ratione

A – C : C – B :: A : C
C – B : C – D :: A † C : A

compoſita ex proportione A ad C & ex proportione A † C ad A hoc eſt in ratione A † C ad C, at A † C eſt major quam C & ideo exceſſus A ſupra C eſt major exceſſu C ſupra D, eſt autem E major quam D; & proinde exceſſus A ſupra C multo major eſt exceſſu C ſupra E; manifeſtum eſt igitur A † E majorem eſſe quam 2 C, quod demonſtrare oportuit.



Digitized by Google

## PROP. XVII. THEOREMA.

ISdem poſitis: dico exceſſum A ſupra C majorem eſſe quadruplo exceſſus C ſupra E. ex prædictis manifeſtæ ſunt ſequentes tres analogiæ; prima, quoniam A, C, B, ſunt continuè proportionales; ſecunda, quoniam C, D, B, ſunt harmonicè proportionales; & tertia, quoniam C, E, D, ſunt continuè proportionales; & ideo exceſſus A ſupra C, hoc eſt A — C, eſt ad exceſſum C ſupra E, hoc eſt C — E in ratione compoſita ex proportionibus A ad C, A + C ad A & E + C ad C; & ideo A — C eſt ad C — E, ut A C + E C + A E + C C ad C C; at B minor eſt quam E,

A — C : C — B : : A : C
C — B : C — D : : A + : CA
C — D : C — E : : E + C : C

& ideo A B, ſeu C C minor eſt quam A E; & igitur A E + C C major eſt quam 2 C C. atque A C + E C eſt ad 2 C C ut A + E ad 2 C; ſed A + E major eſt quam duo C, & ideo A C + E C major eſt quam 2 C C; & proinde A C + E C + A E + C C major eſt quam 4 C C; & igitur A — C major eſt quadruplo ipſius C — E, quod demonſtrare oportuit.

## PROP. XVIII. THEOREMA.

SInt duæ quantitates inæquales; A minor, B major, C media geometrica, D media arithmetica. dico D majorem eſſe quam C, quoniam B, C, A, ſunt continuè proportionales; erit dividendo, permutando, & componendo; ut exceſſus B ſupra A ad exceſſum C ſupra A, ita A + C ad A, atque A + C major eſt duplo ipſius A; & proinde exceſſus B ſupra A major eſt duplo exceſſus C ſupra; ſed exceſſus B ſupra A duplus eſt exceſſus D ſupra A, & ideo exceſſus D ſupra A major eſt exceſſu C

E
A C B
D

ſupra A; eſt igitur D major quam C, quod demonſtrare oportuit.

## PROP. XIX. THEOREMA.

Iisdem poſitis; ſit inter A & B media harmonica E. dico C majorem eſſe quam E. ex hujus 13, D eſt ad C ut C ad E, ſed D major eſt quam C; & ideo C major eſt quam E, quod demonſtrare oportuit.

## CONSECTARIUM.

Ex duabus præcedentibus manifeſtum eſt D majorem eſſe quam E, hoc eſt mediam arithmeticam inter duas quantitates inæquales majorem eſſe media harmonica inter eaſdem.

## PROP. XX. THEOREMA.

Sint duo polygona complicata A, B, nempe A intra circuli vel ellipſeos ſectorem, B extra. continuetur ſeries convergens horum polygonorum complicatorum ſecundum methodum noſtram ſubduplam deſcriptorum;

| | | |
|---|---|---|
| A | B | A |
| C | D | C |
| E | F | G |
| K | L | H |
| Z | | X |

ita ut polygona intra circulum ſint A, C, E, K, &c, & extra circulum B, D, F, L, &c; ſitque feriei convergentis terminatio ſeu circuli vel ellipſeos ſector Z. dico Z majorem eſſe quam C una cum triente exceſſus C ſupra A. ſit exceſſus G ſupra C quarta pars exceſſus C ſupra A, & exceſſus H ſupra G quarta pars exceſſus G ſupra C; continueturque hæc ſeries in infinitum, ut ejus terminatio ſit X. Exceſſus C ſupra A minor eſt quadruplo exceſſus E ſupra C; & ideo exceſſus E ſupra C major eſt exceſſu G ſupra C, eſt ergo E major quam G. deinde exceſſus E ſupra C minor eſt quadruplo exceſſus K ſupra E, & ideo exceſſus G ſupra C multo minor eſt quadruplo exceſſus K ſupra E, eſt igitur exceſ-

ceſſus K ſupra E major exceſſu H ſupra G; cumque E major ſit quam G, manifeſtum eſt K majorem eſſe quam H: eodem prorſus modo demonſtratur in omni ſerierum A, C, E; A, C, G, continuatione, terminum quemcunque ſeriei A, C, E, majorem eſſe quam idem numero terminus ſeriei A, C, G; & ideo terminatio ſeriei A, C, E, nempe Z major erit terminatione ſeriei A, C, G, nempe X, at ex Archimedis quadratura parabolæ conſtat X æqualem eſſe ipſi C una cum triente exceſſus C ſupra A, & proinde Z eadem major eſt, quod demonſtrare oportuit.

## PROP. XXI. THEOREMA.

Iſdem poſitis quæ ſupra; dico Z ſeu ſectorem circuli vel ellipſeos minorem eſſe quam major duarum mediarum continuè proportionalium arithmeticè inter A & B. inter A & B ſit media Arithmetica G, & inter G & B ſit media Arithmetica H; item inter G & H ſit media Arithmetica M, & inter M & H ſed media Arithmetica N; continueturque hæc ſeries convergens A B, G H, M N, O P, in infinitum, ut fiat ejus terminatio X. ſatis patet ex prædictis G majorem eſſe quam C, atque H media Arithmetica inter G & B major eſt media harmonica inter eaſdem G, B; media autem harmonica inter G & B major eſt quam D media harmonica inter C & B, quoniam G major eſt quam C; & ideo media Arithmetica inter G & B, hoc eſt H, major eſt quam D media harmonica inter C & B. eodem modo M media arithmetica inter G & H major eſt media geometrica inter eaſdem G & H: & quoniam G eſt major quam C, & H quam D; media geometrica inter G & H major eſt quam E media geometrica inter C & D; & proinde M major eſt quam E. deinde N media arithmetica inter M & H major eſt media harmonica inter eaſdem, & quoniam H major eſt quam D & M quam E, media harmonica inter M & H major eſt quam F media harmonica inter E & D; & ideo N ea-

| | |
|---|---|
| A B | A B |
| C D | G H |
| E F | M N |
| K L | O P |
| Z | X |

eadem F major eſt. eadem modo utramque ſeriem in infinitum continuando, ſemper demonſtratur terminum quemlibet ſeriei A B, C D, minorem eſſe quam idem numero terminus ſeriei. A B, G H; & igitur terminatio ſeriei A B, C D, nempe Z minor erit terminatione ſeriei A B, G H, nempe X; atque ex hujus 7, terminatio ſeriei A B, G H, ſeu X æqualis eſt majori duarum mediarum arithmeticè continuè proportionalium inter A & B, & ideo Z eadem minor eſt, quod demonſtrandum erat.

## PROP. XXII. THEOREMA.

Iſdem poſitis quæ ſupra; dico Z ſeu ſectorem circuli vel ellipſeos minorem eſſe quam major duarum mediarum geometricè continuè proportionalium inter A & B. inter A & B ſit media geometrica G, & inter G & B ſit media geometrica H; Item inter G & H media Geometrica M, & inter M & H media Geometrica N; continuetúrque hæc ſeries convergens A B, G H, M N, O P, &c, in infinitum, ut fiat ejus terminatio X.

| | |
|---|---|
| A B | A B |
| C D | G H |
| E F | M N |
| K L | O P |
| Z | X |

ſatis patet ex prædictis C & G eſſe inter ſe æquales, item H majorem eſſe quam D; atque ob hanc rationem M media Geometrica inter G & H major eſt quam E media geometrica inter G & D. deinde N media Geometrica inter M & H major eſt media harmonica inter eaſdem; & quoniam M major eſt quam E & H major quam D, erit media harmonica inter M & H major quam F media harmonica inter E & D; & ideo N media Geometrica inter M & H major erit quam F. eadem methodo utramque ſeriem in infinitum continuando ſemper demonſtratur terminum quemlibet ſeriei A B, C D, minorem eſſe quam idem numero terminus ſeriei A B, G H; & igitur terminatio ſeriei A B, C D, nempe Z minor erit terminatione ſeriei A B, G H, nempè X; atque ex hujus 9 terminatio ſeriei A B, G H, ſeu X, æqualis eſt majori duarum mediarum Geometricè continuè proportionalium inter A & B; & ideo Z eadem minor eſt, quod demonſtrare oportuit.

SCHO-

Digitized by Google

## SCHOLIUM.

NOn opus eſt ut hic demonſtrem majorem duarum mediarum arithmeticè continuè proportionalium inter duas inæquales quantitates majorem eſſe quam major duarum mediarum Geometricè continuè proportionalium inter eaſdem, & igitur hujus propoſitionis approximationem præcedentis eſſe exactiorem, quod etſi fiat; præcedente tamen ob facilitatem potius utimur.

## PROP. XXIII. THEOREMA.

Sint duo polygona complicata A, B, nempè A extra hyperbolæ ſectorem, B intra. continuetur ſeries convergens horum polygonorum complicatorum ſecundum methodum noſtram ſubduplam deſcriptorum, ita ut polygona extra

| | | |
|---|---|---|
| A | B | A |
| C | D | C |
| E | F | G |
| K | L | H |
| Z | | X |

hyperbolam ſint A, C, E, K, &c, & intra hyperbolam B, D, F, L, &c; Sitque ſeriei convergentis terminatio ſeu hyperbolæ ſector Z. dico Z majorem eſſe quam C dempto triente exceſſus A ſupra C. ſit exceſſus C ſupra G quarta pars exceſſus A ſupra C, & exceſſus G ſupra H quarta pars exceſſus C ſupra G, continueturque hæc ſeries in infinitum ut ejus terminatio ſit X. exceſſus A ſupra C major eſt quadruplo exceſſus C ſupra E, & ideo exceſſus C ſupra E minor eſt exceſſu C ſupra G, eſt ergo E major quam G. Deinde exceſſus C ſupra E major eſt quadruplo exceſſus E ſupra K, & ideo exceſſus C ſupra G multò major eſt quadruplo exceſſu E ſupra K, & igitur exceſſus G ſupra H major eſt exceſſu E ſupra K; cumque E major ſit quam G, manifeſtum eſt K etiam majorem eſſe quam H: eodem prorſus modo demonſtratur in omni ſerierum A, C, E, K; A, C, G, H, continuatione, terminum quemcumque ſeriei A, C, E, majorem eſſe quam idem numero terminus ſeriei A,

C,

C, G; & ideo terminatio ſeriei A, C, E, nempe Z; major erit terminatione ſeriei A, C, G, nempè X; at ex Archimedis quadratura parabolæ conſtat X æqualem eſſe ipſi C dempto triente exceſſus A ſupra C, & proinde Z eadem major eſt, quod demonſtrare oportuit.

## PROP. XXIV. THEOREMA.

Iſdem poſitis; dico Z ſeu ſectorem hyperbolæ minorem eſſe quam minor duarum mediarum arithmeticè continuè proportionalium inter A & B. Inter A & B ſit media arithmetica G, & inter G & B ſit media Arithmetica

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | B | A | B |
| C | D | G | H |
| E | F | M | N |
| K | L | O | P |
| Z | | X | |

H, Item inter G & H ſit media Arithmetica M, & inter M & H ſit media Arithmetica N: continueturque hæc ſeries convergens A B, G H, M N, O P, in infinitum, ut fiat ejus terminatio X. ſatis patet ex prædictis G majorem eſſe quam C; atque H media arithmetica inter G & B major eſt media harmonica inter eaſdem G & B; media autem harmonica inter G & B; major eſt media harmonica inter C & B, nempe D, quoniam G major eſt quam C; & ideo media Arithmetica inter G & B nempe H major eſt quam D media harmonica inter C & B eodem modo M media Arithmetica inter G & H major eſt media geometrica inter eaſdem G & H; & quoniam G eſt major quam C & H quam D, media geometrica inter G & H major eſt quam E media geometrica inter C & D; & proinde M major eſt quam E. Deinde N media Arithmetica inter M & H major eſt media harmonica inter eaſdem; & quoniam H major eſt quam D & M quam E, media harmonica inter M & H major eſt quam F media harmonica inter E & D; & ideo N eadem F major eſt. eodem modo utramque ſeriem in infinitum continuando, ſemper demonſtratur terminum quemlibet ſeriei A B, C D, minorem eſſe quam idem numero terminum ſeriei A B, G H; & igitur terminatio ſeriei A B, C D, nempe Z, minor erit terminatione ſeriei A B, G H,

GH, nempe X; atque ex hujus 7 terminatio ſeriei AB, GH, nempe X, æqualis eſt minori duarum mediarum arithmeticè continuè proportionalium inter A & B, & ideo Z eadem minor eſt, quod demonſtrare oportuit.

## PROP. XXV. THEOREMA.

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | B | A | B |
| C | D | G | H |
| E | F | M | N |
| K | L | O | P |
| Z | | X | |

Iisdem poſitis; dico Z ſeu ſectorem hyperbolæ minorem eſſe quam minor duarum mediarum geometricè continuè proportionalium inter A & B. Inter A & B ſit media geometrica G, & inter G & B media geometrica H; Item inter G & H media geometrica M, & inter M & H media geometrica N; continueturque hæc ſeries convergens AB, GH, MN, OP, &c. in infinitum ut fiat ejus terminatio X. ſatis patet ex prædictis C & G eſſe inter ſe æquales, & H majorem eſſe quam D; atque ob hanc rationem M media geometrica inter G & H major eſt quam E media geometrica inter C & D. Deinde N media geometrica inter M & H major eſt media harmonica inter eaſdem; & quoniam M major eſt quam E & H quam D, erit media harmonica inter M & H major quam F media harmonica inter E & D; proinde N media geometrica inter M & H major erit quam F. eadem methodo utramque ſeriem in infinitum continuando, ſemper demonſtratur terminum quemlibet ſeriei AB, CD, minorem eſſe quam idem numero terminus ſeriei AB, GH; & igitur terminatio ſeriei AB, CD, nempe Z minor erit quam terminatio ſeriei AB, GH, nempe X; atque ex hujus 9 terminatio ſeriei AB, GH, ſeu X, æqualis eſt minori duarum mediarum geometricè continuè proportionalium inter A & B; & ideo Z eadem minor eſt, quod demonſtrare oportuit.

Ex dictis manifeſtum eſt hanc approximationem exactiorem eſſe illa, in antecedenti propoſitione, demonſtrata, etiamſi hæc ſit paulò laborioſior. ſed non diſſimulandum eſt duas poſſe eſſe ſeries æquales terminationes habentes, ita

ut ſemper quilibet terminus unius ſeriei ſit major quam idem numero terminus alterius ſeriei; ſed in talibus ſeriebus quò longius producuntur, eò minor eſt eorundem numero terminorum differentia: ſed è contra noſtræ ſeries quò longius producuntur, eò magis differunt iidem numero termini, ſicut facillimè demonſtrari poteſt.

Experientia obſervo differentiam inter ſecundam duarum mediarum arithmetice proportionalium & ſecundam duarum mediarum geometricè proportionalium ſemper eſſe multò majorem differentia inter ſecundam duarum mediarum geometricè proportionalium & ſectorem circuli, ellipſeos vel hyperbolæ; quod notatu dignum exiſtimo, hinc enim colligitur ſectorem differre vix ultra unitatem à ſecunda duarum mediarum arithmeticè continuè proportionalium, quando medium arithmeticum non excedit medium geometricum ultra unitatem, quod ſummopere notandum, nam ex hoc evidens eſt approximationem audacter eſſe adhibendam, quando ita continuatur ſeries ut medietas prima notarum ſit eadem in utroque termino convergente, quod experientia etiam evincit; nunquam enim in hoc caſu differt ſector unitate à ſecunda duarum mediarum arithmeticè continuè proportionalium.

Eſt etiam alia approximatio omnium breviſſima & maximè admiranda, etiamſi mihi non contingat illam demonſtratione geometrica munire; nempe ſi primus notarum triens in utroque termino convergente ſit eadem, ſector circuli, ellipſeos vel hyperbolæ ſemper differt infra unitatem à maximo quatuor arithmeticè continuè proportionalium inter terminos noſtræ approximationis.

## PROP. XXVI. THEOREMA.

TAB. XLIII. fig. 4. Sit hyperbola quæcunque C F N cujus centrum A, aſymptota A B, A O; ſitque ejus ſector A F G L cum triangulo circumſcripto A F L: aſymptotorum uni A B parallelæ ducantur rectæ F D, I M; & compleantur parallelogramma F D M K,

FDMK, PLMD. dico triangulum AFL eſſe medium arithmeticum inter parallelogramma FDMK, PLMD. Gregorius à S. Vincentio in Lib. de Hyperbola demonſtrat triangulum AFL eſſe æquale trapezio DFLM, ſed manifeſtum eſt trapezium DFLM eſſe medium arithmeticum inter parallelogramma FDMK, PLMD; & ideo patet propoſitum.

## PROP. XXVII. THEOREMA.

Iisdem poſitis: ducatur AI rectam FL bifariam dividens in I & hyperbolam interſecans in puncto G, fiatque trapezium ſectori circumſcriptum AFGL, quod dico eſſe medium geometricum inter parallellogramma FDMK, PLMD. ex demonſtratis Gregorii à S. Vincentio evidens eſt trapezium AFGL æquale eſſe rectilineo DFGLM. & quoniam AGI recta ſecat rectam FL bifariam in I, ex ejuſdem Gregorii à S. Vincentio Lib. de hyperbola, manifeſtum eſt rectas LM, GH, FD, eſſe continuè proportionales in eadem ratione cum tribus continuè proportionalibus AD, AH, AM. aſymptoto AO per punctum G ducatur parallela recta RGS rectis FD, MK, occurrens in punctis R, S: quoniam rectæ FD, GH, LM, ſunt continuè proportionales, erit dividendo & permutando FR ad SL ut GH ad LM: & quoniam rectæ MA, HA, DA, ſunt continuè proportionales, erit etiam dividendo & permutando MH ad HD hoc eſt SG ad GR ut HA ad DA, vel ut GH ad LM; & proinde FR eſt ad SL ut SG ad GR, cumque anguli FRG, GSL, ſint æquales ob parallelas FR, SL, erunt triangula FRG, GLS, æqualia; & proinde parallelogrammum RDMS æquale eſt rectilineo DFGLM ſeu trapezio AFGL; ſed parallelogrammum RDMS eſt medium geometricum inter paralelogramma PDML, FDMK, quoniam eandem habentia altitudinem eorum baſes nempe LM, SM, KM, ſunt continuè proportionales; & ideo trapezium AFGL eſt medium geo-

TAB. XLVIII. fig. 4.



Digitized by Google

metricum inter parallelogramma P D M L, F D M K, quod demonſtrare oportuit.

## PROP. XXVIII. THEOREMA.

TAB. XLIII. fig. 4. Iisdem poſitis ducantur rectæ F E, L E, hyperbolam tangentes in punctis F, L, ut compleatur trapezium A F E L, quod dico eſſe medium harmonicum inter parallelogramma P D M L, F D M K. triangulum A F L, trapezium A F G L, & medium harmonicum inter parallelogramma P D M L, F D M K, ſunt continuè proportionalia, quoniam triangulum A F L eſt medium arithmeticum & trapezium A F G L medium geometricum inter eadem parallelogramma, ut patet ex hujus 13; ſed triangulum A F L, trapezium A F G L, & trapezium A F E L ſunt continuè proportionalia ex hujus 1; & proinde trapezium A F E L eſt medium harmonicum inter parallelogramma P D M L, F D M K, quod demonſtrare oportuit.

## PROP. XXIX. PROBLEMA.

*Dato circulo æquale invenire quadratum.*

Sit quadratum circulo circumſcriptum 4000000000000000; erit ergo eidem inſcriptum 2000000000000000, inter quæ quadrata ſit medium geometricum 2828427124746190 octagonum nempe intra circulum: deinde inter octagonum intra circulum & quadratum extra ſit medium harmonicum, quod levi labore invenitur dividendo duplum quadrati octagoni intra circulum ſeu duplum rectanguli à quadratis intra & extra circulum per ſummam quadrati & octagoni intra; eritque inventum medium harmonicum, octagonum circumſcriptum, nempe 3313708498984760. continuetur hæc ſeries convergens polygonorum complicatorum donec prima medietas notarum ſit eadem in utroque termino

con-

Digitized by Google

convergente, nimirum uſque ad polygona laterum 16384; inſcriptum enim eſt 31415925765868860 & circumſcriptum 31415926920912581; non conſideratur nota ultima, quoniam in diviſionibus & radicum extractionibus ſemper à vera quantitate paululum aberramus, quod ultimam notam imperfectam plerumque reddit. adhibeatur deinde approximatio in hujus 20 & 21 demonſtrata, & invenientur termini intra quos eſt vera circuli menſura, poſito diametri quadrato 4000000000000000, 3141592653589789 minor circulo & 3141592653589792 eodem major, & proinde non latet circuli menſura, quam invenire oportuit. polygonorum ſeriem hic appono.

| | Intra circulum | extra circulum |
|---|---|---|
| 4 | 2000000000000000 | 4000000000000000 |
| 8 | 2828427124746190 | 3313708498984760 |
| 16 | 3061467458920718 | 3182597878074527 |
| 32 | 3121445152258051 | 3151724907429255 |
| 64 | 3136548490545938 | 3144118385245904 |
| 128 | 3140331156954752 | 3142223629942456 |
| 256 | 3141277250932772 | 3141750369168965 |
| 512 | 3141513801144299 | 3141632080703181 |
| 1024 | 3141572940367090 | 3141602510256808 |
| 2048 | 3141587725277158 | 3141595117749588 |
| 4096 | 3141591421543029 | 3141593269613390 |
| 8192 | 3141592345578073 | 3141592807595664 |
| 16384 | 3141592576586860 | 3141592692091258 |

Circulus intra ſequentes terminos conſiſtit

3141592653589789, 3141592653589792.

eodem omnino modo reperitur rectilineum æquale cuicunque ſectori circulari vel elliptico ex cognito triangulo inſcripto & trapezio circumſcripto.



Digitized by Google

## PROP. XXX. PROBLEMA.

### *Ex dato ſinu invenire arcum.*

TAB. XLIII. fig. 5. Sit arcus circuli AE deſcriptus ex centro B. hujus arcus datur radius nempe AB & ſinus nempe AD: oportet invenire quam proportionem habet ipſe arcus ad integram circuli circunferentiam. ſit arcus chorda AE & ejus ſemiſſis tangens AC vel CE. ex quadrato radii AB auferatur quadratum ſinus AD & relinquetur quadratum ſinus complementi BD, datur igitur BD; & ideo datur area trianguli rectanguli ABD; datur quoque area trianguli ABE nempe rectangulum ſinus dati AD in ſemiſſem radii BE. deinde fiat ut ſumma triangulorum ABD, ABE, ad triangulum ABE ita duplum trianguli ABE ad trapezium ABEC, ut conſtat ex hujus 5. & ex dato triangulo inſcripto ABE & trapezio circumſcripto ABEC, inveniatur per præcedentem ſector ipſe ABE., qui ad circulum integrum datum quæſitam habet proportionem arcus AE ad totam circumferentiam, quam invenire oportuit.

## PROP. XXXI. PROBLEMA.

### *Ex dato arcu invenire ſinum.*

TAB. XLIII. fig. 5. Ex dato arcu manifeſtum eſt dari ſectoris aream; hoc igitur ſectore dato conſideretur ex quot notis arithmeticis conſtet ſinus totus: deinde ſumatur ſectoris dati talis pars aliquota nempe ſector ABE, ut trianguli inſcripti ABE & trapezii circumſcripti ABEC toties multiplicia, quoties ſector datus multiplex eſt ſectoris ABE, concordent in tot notis arithmeticis quot continet radix quadrata ſinus totius; hoc enim facile fieri poteſt ex ſpeculatione tabellæ hujus 29: non enim requiritur in hoc praxis præciſa, nam nihil refert etiamſi in magnis radiis diſcrepantia ſit notarum aliquot. Sectoris cogni-

Digitized by Google

cogniti A B E, cujus arcus A E etiam innoteſcit, datur radius B A: ſit ejus ſinus A D, $z$; & proinde è dato ſinu & radio, dabitur ut in antecedente triangulum ſectori inſcriptum A B E & eidem trapezium circumſcriptum A B E C; atque ipſe ſector datus, eſt ſecunda duarum mediarum arithmeticè continuè proportionalium inter triangulum ſibi inſcriptum & trapezium circumſcriptum; & proinde datur æquatio inter duplum trapezii A B E C unà cum triangulo A B E & triplum ſectoris cogniti A B E, cujus reſolutio manifeſtat valorem quantitatis ignotæ $z$, hoc eſt ſinum A D: at dato arcu A E & ejus ſinu, dantur etiam ex vulgata ſectionum angularium doctrina ſinus omnium multiplicium ejuſdem arcus A E; & proinde non latet ſinus arcus in initio propoſiti, cum ſit ad arcum A E in data ratione multiplici, quem invenire oportuit.

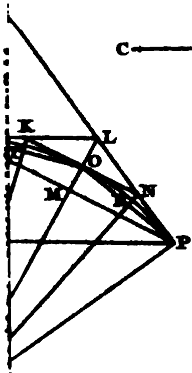
## PROP. XXXII. PROBLEMA.

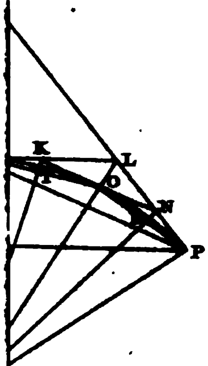
*Invenire quadratum æquale ſpatio hyperbolico contento à curva hyperbolica, uno aſymptoto & duabus rectis alteri aſymptoto parallelis; quod ſpatium æquale eſt ſectori hyperbolico cujus baſis eſt eadem curva.*

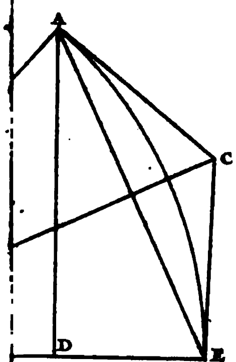
Sit hyperpola D I L, cujus aſymptota A O, A K, ſibi occurrunt in angulo recto O A K. proponitur hujus hyperbolæ ſpatium I L M K, contentum à curva hyperbolica I L, aſymptoto K M & duabus rectis I K, L M, alteri aſymptoto A O parallelis. oportet è datis recti I K 10 00000000000, L M 10000000000000, A M 1000000000000, & proinde recta quoque K M 9000000000000, invenire menſuram ſpatii I L M K. Producantur rectæ I K, O L, & ducatur recta I P, ut compleantur rectangula L N K M, Q I K M; manifeſtum eſt rectangulum L N K M eſſe 9000000000000000000000000 & Q I K M 9000000000000000000000000 & trapezium TAB. XLIV. fig. 1.

pezium L I K M eſſe medium arithmeticum inter prædicta rectangula, hoc eſt 4950000000000000000000000. inveniatur inter rectangula L N K M, Q I K M, medium geometricum 2846049894151541398799042 quod erit pentagonum ſpatio hyperbolico L I K M regulariter circumſcriptum. Sitque ut trapezium LIKM unà cum dicto pentagono circumſcripto ad dictum pentagonum, ita duplum dicti pentagoni ad hexagonum ſpatio hyperbolico L I K M regulariter inſcriptum, nempe 2077975413183662816000983 5; quod hexagonum erit polygonum complicatum cum prædicto pentagono; quæ duo rectilinea efficiant primos ſeriei terminos convergentes: inter quæ ſit medium geometricum cujus quadrati duplum dividatur per idem medium geometricum unà cum majori termino ſeu pentagono circumſcripto; eruntque medium geometricum & quotus, ſecundi termini convergentes: atque ita continuetur ſeries hæc convergens polygonorum complicatorum, donec medietas prima notarum eadem ſit in utroque termino convergente, nempe ad terminum vigeſimum; polygonum enim circumſcriptum eſt 2302585092995896153417 3864, & inſcriptum 2302585092993120359318 1124: adhibeatur deinde approximatio in hujus 23 & 24 demonſtrata, & invenientur termini intra quos conſiſtit vera ſpatii hyperbolici L I K M menſura, nempe 230258509299404562 40178681, minor ſpatio, & 2302585092994045624017870 4 eodem major, & ideo non latet ſpatii menſura, quam invenire oportuit: totam polygonorum ſeriem hic appono unà cum numero rectarum curvam hyperbolicam ſubtendentium in unoquoque polygono circumſcripto.

Extra



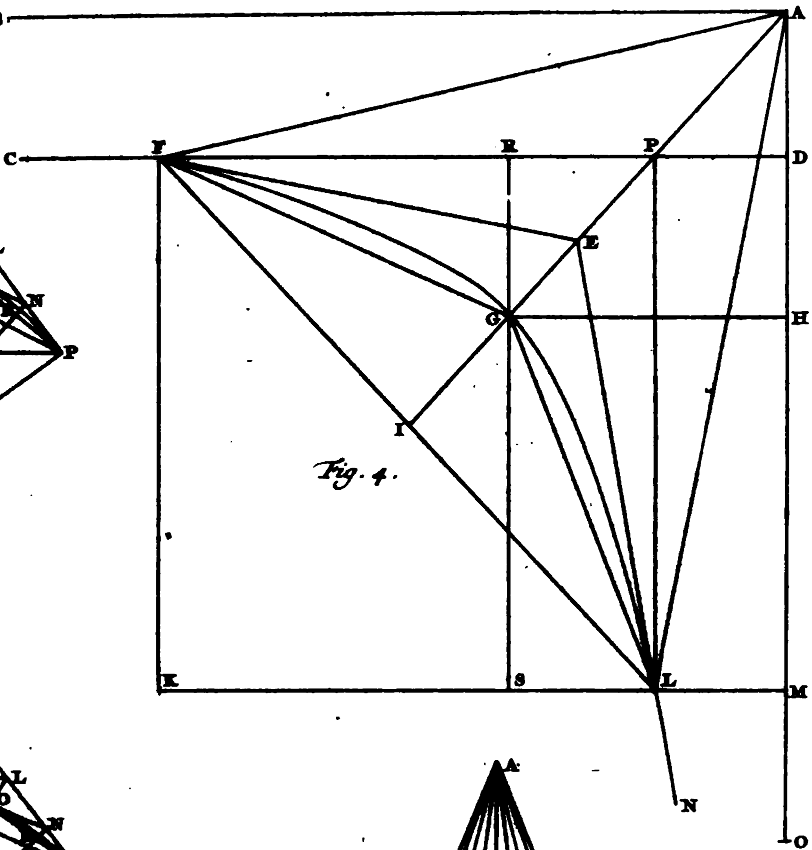




Fig. 4.

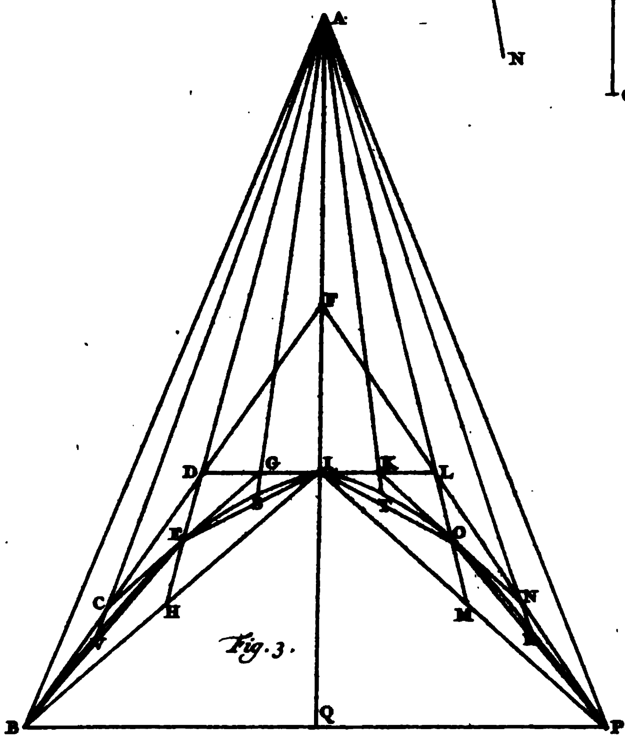
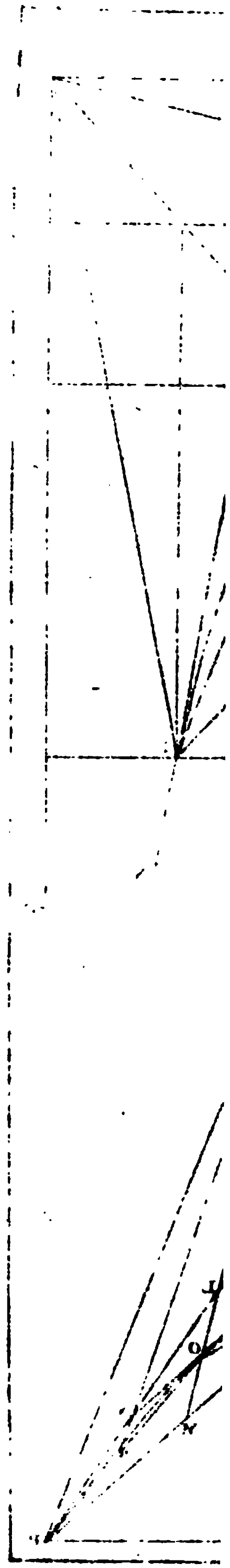



Fig. 3.

Digitized by Google



Digitized by Google

| | Extra hyperbolam | Intra hyperbolam |
|---|---|---|
| 2 | 28460498941515413987990042 | 20779754131836628160009835 |
| 4 | 24318761696971474416609403 | 22410399968461612921314879 |
| 8 | 23345088913234727934949897 | 22868197570682058351436953 |
| 16 | 23105412906351426185065096 | 22986193244865462241217428 |
| 32 | 23045725982658962868047234 | 23015921117139340153267671 |
| 64 | 23030818728479610745741910 | 23023367512879647736902891 |
| 128 | 23027092819292183214705676 | 23025230015404383009313933 |
| 256 | 23026161398510805910921810 | 23025695697539046352276636 |
| 512 | 23025928546847571901068394 | 23025812121604634087915779 |
| 1024 | 23025870334152518169052273 | 23025841227841783762272302 |
| 2048 | 23025855780992551911165543 | 23025848504414868310197241 |
| 4096 | 23025852142703422669729927 | 23025850322559001769499206 |
| 8192 | 23025851233131119425454390 | 23025850778345089029496888 |
| 16384 | 23025851005728140519209367 | 23025850892041614212944994 |
| 32768 | 23025850948889877295901163 | 23025850920465745719335070 |
| 65536 | 23025850934677811503232115 | 23025850927571778609090592 |
| 131072 | 23025850931124795055887228 | 23025850929348286832351848 |
| 262144 | 23025850930236540944102405 | 23025850929792413888218560 |
| 524288 | 23025850930014477416159412 | 23025850929903445652188450 |
| 1048576 | 23025850929958961534173864 | 23025850929931203593181124 |
| | hyperbolæ ſector intra ſequentes terminos conſiſtit | |
| | 23025850929940456240178681 | 23025850929940456240178704 |

 Poteſt

Poteſt igitur abſque periculo erroris ſumi ſequens numerus pro hyperbolæ ſectore, cujus numeri multiplices uſque ad decem, diviſionis facilitandæ gratia in compoſitione logorithmorum, hic ſubjicimus; in magnis namque diviſionibus præſtat uti repetita diviſoris multiplicium ſubſtractione quam ordinaria diviſione, ut conſtat expertis arithmeticis.

Manifeſtum eſt hoc problema eodem ferè modo poſſe reſolvi, etiamſi aſymptota AO, AK, non ſint conſtituta ad angulum rectum: nos autem ita ſuppoſuimus, ut facilior & paratior eſſet problematis uſus in doctrina logorithmica, quam primò invenit nobiliſſimus noſter Neperus, & quam nos (ni fallor) ad ſummum perfectionis faſtigium nunc elevamus.

| | |
|---|---|
| 1 | 23025850929940456240178700 |
| 2 | 46051701859880912480357400 |
| 3 | 69077552789821368720536100 |
| 4 | 92103403719761824960714800 |
| 5 | 115129254649702281200893500 |
| 6 | 138155105579642737441072200 |
| 7 | 161180956509583193681250900 |
| 8 | 184206807439523649921429600 |
| 9 | 207232658369464106161608300 |
| 10 | 230258509299404562401787000 |

## PROP. XXXIII. PROBLEMA.

*Propoſiti cujuscunque numeri logorithmum invenire.*

TAB. XLIV. fig. 1. Eiſdem poſitis quæ in antecedente, manifeſtum eſt, poſita IK unitate, ML eſſe decem: poſita ergo IK unitate ſit GH aſymptoto quoque AO parallela numerus propoſitus cujus deſideratur logorithmus. manifeſtum eſt ex data rectà GH dari KF, & ex præcedenti dari etiam ſpatium hyperbolicum GIKH, quod ſpatium hyperbolicum dico eſſe logorithmum numeri propoſiti GH, poſito ſpatio hyperbolico LIKM logorithmo numeri denarii: eſt enim (ex Gregorio à S. Vincentio) ſpatium GHKI in eadem ratione ad ſpatium LMKI, in qua ratio GH ad IK eſt multiplicata rationis LM ad IK; ſed ratio GH ad IK eſt multiplicata ratio-

rationis LM ad IK in eadem ratione qua numerus GH eſt multiplicatus numeri LM, quoniam idem eſt conſequens in utraque ratione; & proinde ſpatium GIKH eſt in eadem ratione ad ſpatium LIKM, in qua numerus GH eſt multiplicatus numeri LM; & ideo (quoniam ex hypotheſi ſpatium LIKM eſt logorithmus numeri LM ſeu denarii) erit ſpatium GIKH logorithmus numeri propoſiti GH, quoniam hæc eſt logorithmorum eſſentialis proprietas, ut ſint inter ſe in eadem directa ratione, in qua eorum numeri ſunt unus alterius multiplicati: at ponitur communiter logorithmus numeri denarii ad arbitrium unitas cum numero quodam cyphrarum: ſi igitur fiat, ut ſpatium LIKM ad ſpatium GIKH, ita arbitrarius denarii logorithmus ad alium numerum; erit inventus ille numerus, logorithmus numeri propoſiti GH, quem invenire oportuit.

## SCHOLIUM.

PRaxis prædicti problematis prolixa eſt & laborioſa; & proinde, ut abbrevietur labor noſter in compoſitione tabulæ logorithmorum; ſciendum eſt nos ſolummodo laborare in inventione logorithmorum, numerorum primorum; numerorum enim compoſitorum logorithmi ex primorum additione & ſubductione nullo negotio invenientur. ſed ut numerorum primorum logorithmi facilius inveniantur, ordine progrediendum eſt à prioribus ad poſteriores, nempe à 10 cujus logorithmus eſt arbitrarius ad 2 numerum omnium primum, & à 10 & 2 ad 3, item à 10, 2 & 3 ad 7, item à 10, 2, 3 & 7 ad 11, & ſic deinceps. deinde inveniendi ſunt duo numeri compoſiti parum inter ſe differentes, quorum unus compoſitus eſt ex numeris logorithmos cognitos habentibus, & ideo logorithmum datum habens, alter autem numerus compoſitus eſt ex ſolo numero primo (cujus quæritur logorithmus) vel ex illo unà cum aliis numeris logorithmos cognitos habentibus. deinde applicentur hi numeri compoſiti

(qui exempli gratia ſint GH, EF) in hyperbola aſymptoto OA paralleli; & inveniatur ſpatium hyperbolicum EGHF per hujus 32, quod breviter, fit quoniam GH, EF, parum inter ſe differunt. ex ſuppoſitione, unius numeri, exempli gratia GH, datur logorithmus, & proinde datur ejus logorithmi ratio ad logorithmum denarii arbitrarium, quæ eadem eſt (ex hactenus demonſtratis) cum ratione ſpatii hyperbolici GIKH ad ſpatium hyperbolicum LIKM, datur autem ex hujus 32 ſpatium LIKM; & ideo innoteſcit quoque ſpatium IKHG, cumque detur ſpatium EGHF, innoteſcit quoque EIKF; & proinde datur logorithmus numeri compoſiti EF; cumque ex ſuppoſitione dentur logorithmi omnium numerorum numerum EF componentium, excepto numero illo primo cujus logorithmus deſideratur, dabitur quoque illius numeri primi logorithmus, quem invenire oportuit. Exempli gratia, propoſitum ſit invenire logorithmum numeri binarii, ſuppoſito arbitrario numeri denarii logorithmo, unitate cum 25 cyphris. duo numeri compoſiti parum inter ſe differentes ſunt 1000 & 1024; numeri 1000 datur logorithmus, nempe triplum ſpatii 2302585092994045624017870 in antecedente inventi, poſito ſcilicet illo ſpatio numeri denarii logorithmo arbitrario; numeri 1024 ignoratur logorithmus, eſt enim compoſitus ex ſolo numero primo 2, nempe ejus decies multiplicatus eſt. applicentur hi numeri compoſiti in hyperbola, ut dictum eſt; ſitque GH 1000, EF 1024: ſed quoniam IK unitas eſt 1000000000000, erit GH 1000000000000000 & EF 1024000000000000, & per hujus 32 inveniatur ſpatium EGHF 2371652661731604211830 67 (ſeriem convergentem hic appono,

ut lecto-

| | Extra hyperbolam | Intra hyperbolam |
|---|---|---|
| 2 | 237170824512628449899917 | 237162487062045867846886 |
| 4 | 237166655750699903737556 | 237164571388054419219371 |
| 8 | 237165613567087322970403 | 237165092476425954356426 |
| 16 | 237165353021613523599438 | 237165222748948181485250 |
| 32 | 237165287885271907848389 | 237165255317105572320456 |
| 64 | 237165271601188181041012 | 237165263459146597159038 |

hyperbolæ ſector intra ſequentes terminos conſiſtit

| | |
|---|---|
| 237165266173160272103220 | 237165266173160458453029 |

Sit inter hos terminos maximus quatuor continuè arithmeticè proportionalium 237165266173160421183067; qui proinde erit verus hyperbolæ ſector in notarum numero propoſito, quoniam primus triens notarum idem eſt in utroque termino convergente,

ut lectori compendium patefiat) ſeu logorithmus numeri $1\frac{24}{1000}$ poſito logorithmo denarii arbitrario 2302585092994045 6240178700; deinde eodem ſuppoſito logorithmo arbitrario denarii, addatur logorithmus numeri 1000, ſeu triplus logorithmi denarii, logorithmo numeri $1\frac{24}{1000}$, eritque ſumma logorithmus numeri 1024, cujus pars decima erit logorithmus numeri binarii, pro eodem logorithmo denarii arbitrario, nempe 6931471805599452914171917: fiatque ut logorithmus numerii denarii 23025850929940456240178700 ad logorithmum numeri binarii correſpondentem 69314718055 9945291417 1917, ita logorithmus numeri denarii arbitrarius propoſitus nempe 10000000000000000000000000 ad logorithmum numeri binarii quæſitum 30102999566398119 52405804, quem invenire oportuit: eodem modo invenitur logorithmus ternarii 477121254719662437350 2993, &c.

Ut in promptu habeantur numeri illi compoſiti parum inter ſe differentes pro unoquoque numero primo, hic tabellam exhibeo pro numeris primis uſque ad 100, & unam regulam pro numeris primis inter 100 & 1000 & alteram pro numeris primis ſupra 1000; quæ omnia ita excogitata ſunt, ut verus cujuſcunque numeri primi logorithmus inveniri poſſit correſpondens logorithmo arbitrario denarii 10000000000000000000000000 ex una ſola multiplicatione, duabus diviſionibus & una radicis quadratæ extractione, ultra inconſiderabiles aliquot operatiunculas.

| | |
|---|---|
| 2 | 1000 $(^{3})$ 10<br>1024 $(^{10})$ 2 |
| 3 | 32805 factus ex 5 & 6561 $(^{8})$ 3<br>32768 $(^{15})$ 2 |
| 7 | 2400 factus ex 3 & 32 $(^{5})$ 2 & 25 $(^{2})$ 5<br>2401 $(^{4})$ 7 |
| 11 | 9800 factus ex 2, 49 $(^{2})$ 7 & 100 $(^{2})$ 10<br>9801 factus ex 121 $(^{2})$ 11 & 81 $(^{4})$ 3 |

13

Digitized by Google

13 123200 factus ex 7, 11, 25 $^{(2)}$ 5, 64 $^{(6)}$ 2
123201 factus ex 169 $^{(2)}$ 13 & 729 $^{(6)}$ 3

17 2600 factus ex 13, 8 $^{(3)}$ 2 & 25 $^{(2)}$ 5
2601 factus ex 9 $^{(2)}$ 3 & 289 $^{(2)}$ 17

19 28899 factus ex 169 $^{(2)}$ 13, 9 $^{(2)}$ 3 & 19
28900 factus ex 100 $^{(2)}$ 10 & 289 $^{(2)}$ 17

23 25920 factus ex 10, 32 $^{(5)}$ 2 & 81 $^{(4)}$ 3
25921 factus ex 49 $^{(2)}$ 7 & 529 $^{(2)}$ 23

29 613088 factus ex 17, 23, 32 $^{(5)}$ 2, & 49 $^{(2)}$ 7
613089 factus ex 729 $^{(6)}$ 3 & 841 $^{(2)}$ 29

31 116280 factus ex 10, 17, 19, 4 $^{(2)}$ 2, & 9 $^{(2)}$ 3
116281 factus ex 121 $^{(2)}$ 11 & 961 $^{(2)}$ 31

37 165648 factus ex 3, 7, 17, 29, & 16 $^{(4)}$ 2
165649 factus ex 121 $^{(2)}$ 11 & 1369 $^{(2)}$ 37

41 1413720 factus ex 7, 10, 11, 17, 4 $^{(2)}$ 2 & 27 $^{(3)}$ 3
1413721 factus ex 1681 $^{(2)}$ 41 & 841 $^{(2)}$ 29

43 978120 factus ex 10, 11, 13, 19, 4 $^{(2)}$ 2, 9 $^{(2)}$ 3
978121 factus ex 529 $^{(2)}$ 23 & 1849 $^{(2)}$ 43

47 664848 factus ex 7, 13, 32 $^{(5)}$ 2 & 729 $^{(6)}$ 3
664849 factus ex 961 $^{(2)}$ 31 & 2209 $^{(2)}$ 47

53 3059000 factus ex 7, 19, 23, 8, $^{(3)}$ 2, & 125 $^{(3)}$ 5
3059001 factus ex, 9 $^{(2)}$ 3, 121, $^{(2)}$ 11 & 2809 $^{(2)}$ 53

57 5851560 factus ex 3, 5, 13, 31, & 121 $^{(2)}$ 11
5851561 factus ex 1681 $^{(2)}$ 41 & 3481 $^{(2)}$ 59

61 3575880 factus ex 5, 7, 11, 43, 8 $^{(3)}$ 2 & 27 $^{(3)}$ 3
3575881 factus ex 961 $^{(2)}$ 31 & 3721 $^{(2)}$ 61

67 1620528 factus ex 3, 13, 16 $^{(4)}$ 2 & 49 $^{(2)}$ 7
1620529 factus ex 361 $^{(2)}$ 19 & 4489 $^{(2)}$ 67

71 2016399 factus ex 3, 11, 29, 43 & 49 $(^{2})$ 7
2016400 factus ex 16 $(^{4})$ 2, 25 $(^{2})$ 5 & 5041 $(^{2})$ 71

73 5116644 factus ex 4 $(^{2})$ 2, 9 $(^{2})$ 3, 169 $(^{2})$ 13, & 841 $(^{2})$ 29
5116645 factus ex 7, 17, 19, 31, 73

79 5997600 factus ex 17, 32 $(^{5})$ 2, 9 $(^{2})$ 3, 25 $(^{2})$ 5 & 49 $(^{2})$ 7
5997601 factus ex 961 $(^{2})$ 31 & 6241 $(^{2})$ 79

83 1164240 factus ex 5, 11, 49 $(^{2})$ 7, 16 $(^{4})$ 2, 27 $(^{3})$ 3
1164241 factus ex 169 $(^{2})$ 13 & 6889 $(^{2})$ 83

89 2859480 factus ex 5, 47, 8 $(^{3})$ 2, 169 $(^{2})$ 13 & 9 $(^{2})$ 3
2859481 factus ex 361 $(^{2})$ 19 & 7921 $(^{2})$ 89

97 1138488 factus ex 3, 13, 41, 89, & 8 $(^{3})$ 2
1138489 factus ex 121 $(^{2})$ 11 & 9409 $(^{2})$ 97

Pro numeris primis inter 100 & 1000 ſit hæc regula: ante numerum primum cujus logorithmus quæritur, ſumantur immediatè duo numeri proximi, & poſt eum numerus immediatè ſequens, qui tres numeri cum illo primo ſunt quatuor numeri in ſuo naturali ordine ſe invicem ſequentes; deinde multiplicetur primus numerus in cubum tertii & quartus in cubum ſecundi, eritque factorum differentia æqualis ſummæ primi & quarti vel ſecundi & tertii, ut facile demonſtrari poteſt; iſtique numeri facti habent ad minimum ſex notas primas omnino eaſdem, & proinde parum inter ſe differunt; atque omnium horum quatuor numerorum (excepto tertii) logorithmi cognoſcuntur ex ipſa progrediendi methodo, & ideo ad noſtram abbreviationem ſunt idonei. in numeris ultra 1000 non opus eſt tanto apparatu, quoniam rectangulum numerorum, inter quos immediatè comprehenditur numerus primus cujus quæritur logorithmus, unitate ſolummodo deficit à quadrato numeri primi; eorumque ideo primæ ſex notæ ad minimum ſunt eædem; atque primi & tertii dantur logorithmi, & ideo ad noſtrum inſtitutum ſunt idonei.

PROP.

## PROP. XXXIV. PROBLEMA.

### *Ex dato logorithmo invenire ejus numerum.*

Ex demonſtratis manifeſtum eſt hoc problema idem eſſe ac ſi quis proponeret; ex dato ſpatio hyperbolico, & una recta uni aſymptotorum parallela illud comprehendente, alteram invenire idem ſpatium comprehendentem, & eidem aſymptoto parallelam. Conſideretur ex quot notis arithmeticis conſtet logorithmus denarii arbitrarius; & ſumatur logorithmi vel ſpatii dati talis pars aliquota nempe ſpatium LIKM, ut pentagoni ſpatio LIKM regulariter circumſcripti, & hexagoni eidem regulariter inſcripti toties multiplicia, quoties ſpatium datum multiplex eſt ſpatii LIKM, concordent in tot notis arithmeticis, quot continet radix quadrata logorithmi arbitrarii; hoc enim facile fieri poteſt ex inſpectione tabellæ 32 hujus: datur ergo ſpatii LIKM menſura & recta IK unitas ex ſuppoſitione. Sit LM, z; ſicut in hujus 32 datur pentagonum ſpatio LIKM regulariter circumſcriptum & hexagonum eidem regulariter inſcriptum, inter quæ ſpatium datum LIKM eſt ſecunda duarum mediarum arithmeticè continuè proportionalium; & ideo duplum haxagoni una cum pentagono æquatur triplo ſpatii, cujus æquationis reſolutio manifeſtat ignotam z ſeu numerum LM, cujus toties multiplicatus, quoties ſpatium LIKM eſt ſubmultiplex ſpatii vel logorithmi dati, eſt numerus quæſitus, quem invenire oportuit. TAB. XLIV. fig. 1.

Hoc problema idem eſt cum hujus 8, ſed aliter generalius & methodo plerumque minus operoſa hic reſolutum.



Digitized by Google

## PROP. XXXV. PROBLEMA.

*Rectâ per datum punctum in diametro ductâ, ſemicirculum in ratione data dividere.*

TAB. XLIV. fig. 2. Sit ſemicirculus ADG, cujus diameter AG, centrum E, punctum in diametro datum B. ſupponatur factum quod jubetur; ſitque recta BD ſemicirculum dividens in ratione data: quoniam datur ſemicirculi menſura & ratio in qua dividitur, igitur datur ejus portio nempe DBG. Sit recta BD, z: ex datis rectis BD, BE, ED, innoteſcunt triangula DEB, DEF, DEG: deinde ſicut DEF una cum DEG ad DEG ità duplum DEG ad trapezium circumſcriptum DEGH: & poſitis primis terminis convergentibus DEG, DEGH continuetur ſeries convergens polygonorum complicatorum, ſecundum circuli proprietates ſæpius repetitas, donec conveniens fuerit approximationem adhibere ita ut exhibeatur ſector DEG, qui una cum triangulo DBE æquatur portioni DBG cognitæ, cujus æquationis reſolutio manifeſtat ignotam quantitatem z ſeu rectam BD: reliqua patent.

Idem problema eodem omnino modo reſolvitur in ellipſe, hyperbola vel earum ſectore dato.

## SCHOLIUM.

Si quis prædictorum problematum mechanicam deſideret praxim, non difficile erit calculum, approximationem, & æquationis reſolutionem ſecundum vulgatas Geometriæ practicæ regulas quodammodo imitari, multa talia problemata poſſem hic reſolvere ope analyſios & noſtræ ſerierum convergentium doctrinæ, quæ antea impoſſibilia æſtimabantur: ſed dicet fortè aliquis has reſolutiones non eſſe geometricas; reſpondeo, ſi per geometricum intelligatur praxis

ope

ope ſolius regulæ & circini peracta, hanc in his non ſolum eſſe impoſſibilem ſed etiam in omnibus problematis quæ ad æquationem quadraticam reduci non poſſunt; ſicut facile demonſtrari poſſet: & ſi per geometricam intelligatur reductio problematis ad æquationem analyticam, omnia hæc problemata ſunt geometricè impoſſibilia, cum ex hic demonſtratis, manifeſtum ſit talem reductionem fieri non poſſe: ſi verò per geometricum intelligatur methodus omnium poſſibilium ſimpliciſſima, invenietur forſan poſt maturam conſiderationem omnia prædicta problemata eſſe geometriciſſimè reſoluta; diligenter animadvertendum totam ſerierum convergentium doctrinam poſſe etiam nullo negotio applicari ſeriebus ſimplicibus. Sit enim ſeries A, B, C, D, E, &c talis naturæ ut tertius terminus C eodem modo componatur ex primo & ſecundo A, B, quo quartus D componitur ex ſecundo & tertio B, C, & quintus E ex tertio & quarto C, D, & ſic deinceps in infinitum; ſitque differentia antecedentium A, B, major ſemper differentia immediatè

A
B
C
D
E
$z$

ſequentium B, C; ſupponamus hanc ſeriem ita in infinitum continuari donec duorum terminorum immediate ſe invicem ſequentium nulla ſit differentia, ſitque unus ex illis terminis $z$, quem ſeriei terminationem appellamus: dico $z$ eodem modo componi ex A & B quo ex B & C vel C & D; demonſtratio vix differt ab hujus 10 & ejus conſectario: hac ratione ſi ponatur triangulum, ſectori circulari vel elliptico inſcriptum, vel ſectori hyperbolico circumſcriptum a, & trapezium, ſectori circulari vel elliptico regulariter inſcriptum vel hyperbolico regulariter circumſcriptum b; erit hexagonum ſectori circulari vel elliptico regulariter inſcriptum vel hyperbolico regulariter circumſcriptum $Vq\,\frac{2\,b;}{a+b;}$ & proinde ſector circuli, ellipſeos vel hyperbolæ eodem modo componitur ex a & b quo ex b & $Vq\,\frac{2\,b;}{a+b;}$ atque hinc etiam demonſtrari poteſt, quod ratio inter ſectorem & ejus triangulum datum non ſit analytica, ſecundum te-

tenorem hujus 11: poſſem quoque adhuc alia methodo particulari demonſtrare arcum circularem non habere rationem analyticam ad ſuam chordam datam: ſed plura non addo, geometras interim pro ſcientiæ incremento admonens, me reperiſſe in quibuſdam figuris (quas Carteſius ſecundi generis appellat) tres focos, ſeu tria puncta, à quibus ductarum in quodlibet curvæ punctum rectarum ſumma vel differentia ſemper eſt eadem: unde mihi veriſimile videtur ſicut omnis curvæ primi generis duos habent focos vel reales vel imaginarios, ita omnes ſecundi generis habere tres, omnes tertii quatuor, & ſic in infinitum: quæ certè ſpeculatio ſcrutatu digniſſima eſt, eſſet enim admiranda figurarum geometricarum proprietas, & mechanicæ omnium æquationum praxi utiliſſima.

# FINIS.

HU-

Digitized by Google

## II.

# HUGENII OBSERVATIONES IN LIBRUM JACOBI GREGORII, DE VERA CIRCULI ET HYPERBOLÆ QUADRATURA.

D^nus Hugenius rogatus à Societate quæ Pariſiis ſuos habebat conventus (1668) in Bibliotheca Regia, ut vellet hunc librum examinare, ſocietati retulit ſe multos errores obſervaſſe in demonſtratione, qua Auctor contendit impoſſibilitatem quadraturæ Circuli & Hyperboles probare.

I. in 11ª. Propoſitione, in qua auctor contendit Circuli quadraturam analytice impoſſibilem demonſtrare, hæc habentur *Si terminatio magnitudinum propoſitarum analytice componatur a primis terminis* $a^3 + a^2b$ & $ab^2 + b^3$, *componetur etiam analyticè & eodem omnino modo a ſecundis terminis* $ba^2 + bba$ & $2b^2a$. ſed licet id verum ſit quando terminatio inventa eſt per Methodum, quam indicat, non poteſt generalis inde deduci concluſio. niſi ponamus, non poſſe inveniri, niſi per ejus Methodum, terminationem ſeriei Magnitudinum, quas appellat *convergentes*, vel ſi aliâ methodo inveniatur illam etiam per ſuam methodum inveniri poſſe quod non demonſtravit.

II. Autor immediate poſt addit, *nullam quantitatem poſſe* co-

*eodem modo analytice componi e terminis* $a^3 + aab$, $abb + b^3$ *quo componitur e terminis* $aab + bba$, $2bba$. Hæc nihilominus invenitur per eandem methodum quam indicat in 7. Propoſitione. Methodus autem hæc eſt. Primo quærenda eſt quantitas, per quam ſi multiplices $a^3 + aab$, & producto addas productum $abb + b^3$ multiplicati per datam quantitatem $m$, ſumma æqualis ſit ſummæ duorum aliorum productorum, unius $aab + bba$ multiplicati per eandem quantitatem quæſitam, alterius $2bba$ multiplicati per datam quantitatem $m$. Ponamus igitur quantitatem illam æqualem $z$; erit $a^3 z + aabz + abbm + b^3 m = aabz + bbaz + 2bbam$; & $z = \frac{bbm}{aa + ab}$. Et certum eſt, ſive multiplicetur $\frac{bbm}{aa + ab}$ per $a^3 + aab$ & addatur $abb + b^3$ multiplicatum per $m$, ſive eadem illa quantitas multiplicetur per $aab + bba$ & addatur $2bbam$, ſemper prodire eandem quantitatem $2abbm + b^3 m$, & conſequenter ultimam hanc quantitatem componi eodem modo e primis & ſecundis terminis progreſſionis convergentis propoſitæ, quod Autor fieri poſſe negavit.

III°. Datâ autem hac quantitate $2abbm + bbbm$, ſi hac utamur ad quærendam terminationem progreſſionis propoſitæ, juxta methodum ab auctore indicatam in 7 propoſitione, & in 10, reperietur $= \frac{3aab^3 + ab^4 + 2a^3bb}{bb + ab + aa}$; & poſito $a = 1$ & $b = 2$, illa terminatio, quæ deſignat in eo caſu ſectorem circuli continentem $\frac{1}{3}$ totius circuli, erit $= \frac{48}{7}$; & primus terminus progreſſionis $a^3 + aab$, qui deſignat $\frac{1}{3}$ trianguli æquilateri inſcripti in eodem Circulo, erit æqualis 3; ita ut proportio circuli ad triangulum æquilaterum inſcriptum ſit ut $\frac{16}{7}$ ad 3, id eſt 16 ad 7. a vero nihilominus omnes has proportiones aberrare facile patet.

IV°. Si examinemus, cur terminatio aliquando occurrat vera per methodum Autoris, ut in 7 Propoſitione, interdum verò non; reperiemus id ex eo oriri quod problema $10^{me}$

Pro-

Propoſitionis non bene ſit ſolutum.; Non enim ſufficit, ut inveniatur terminatio progreſſionis convergentis, inveniſſe quantitatem compoſitam eodem modo e primis & ſecundis terminis; nam talis ſolutio tantum locum habet quando quantitas illa detegitur, non inveſtigatâ quantitate quæ dicitur $z$ in 7 Propoſitione; vel quum eadem quantitas non componitur ex ulla quantitate quæ datur in terminis progreſſionis, ut in 7ª. Propoſitione, ubi $z = \frac{me}{d}$; nam Autor ſumendo $z = \frac{mac-mbc}{ad-bd}$ non videtur obſervaſſe, diviſionem poſſe fieri per $a-b$.

In exemplo propoſitionis 10, non quæritur quantitas $z$. ſed $z$ appellatur ipſa terminatio; & in tranſitu notandum eſt exemplum illud allatum eſſe citra propoſitum nam progreſſio, cujus primi termini ſunt $a$, $b$, & ſecundi & $\sqrt{ab}$, $\frac{aa}{\sqrt{ab}}$ non eſt progreſſio convergens, neque habet terminationem, quamvis autor illam inveniat.

Quod attinet ad methodum, quam Autor propoſuit ad appropinquandum per numeros ad dimenſionem Circuli; Dⁿˢ Hugenius dixit ſibi videri ſe quid magis accuratum dediſſe in libro cui titulus eſt *de Circuli magnitudine*, edito 1654. Addidit illa, quæ Gregorius habet de dimenſione Hyperbolæ & ratione quam habet cum Logarithmis, bona quidem eſſe ſed minime nova membris ſocietatis, cum poſſint recordari, ſe ipſis idem jam propoſuiſſe, regulamque ad inveniendos logarithmos, jamdudum actis eorum inſertam eſſe. Se etiam non credere illud novum videri regiæ ſocietati Anglicanæ, cum qua jam ante plures annos communicavit methodum ad invenienda pondera aëris in diverſis altitudinibus ſupra terram, quæ fundamentum in hac ipſâ Hyperbolæ dimenſione habet.

Hæc autem eſt methodus, quam Dⁿˢ Hugenius propoſuit ad inveniendum per logarithmos dimenſionem Spatii Hyperbolici contenti inter Curvam & unam ex Aſymptotis & duas lineas paralelas ad alteram Aſymptoton, data ratione quam in-

inter ſe habent duæ hæ lineæ. *Si logarithmus differentiæ logarithmorum horum numerorum ſemper addatur ad 0, 36221, 56868, ſumma erit logarithmus numeri partium, quas continet Spatium Hyperbolicum, illarum quarum* 1.0000000000 *continet parallelogrammum Hyperbolæ, id eſt illud, quod eſt contentum a duabus lineis ductis ex uno Hyperbolæ puncto, & quarum quævis parallela eſt uni ex Aſymptotis*; Exempli gratia ſi parallelæ, quæ includunt ſpatium Hyperbolicum ſint inter ſe ut 36 ad 5 operatio hoc pacto fiet.

1, 5563025008 *Logarithmns* 36.
0, 6989700043 *Logar.* 5.
0, 8573324965. *Differentia.*
9, 9331492856 *Logar. Differentiæ.*
0, 36221 56868 *Logar. qui ſemper additur.*
10, 2953649724; *Logar. cujus numerus facit contentum in Spatio Hyperbolico, quod hic eſt* 1.9740810180.

## III.

# DOMINI GREGORII RESPONSUM
## AD
## ANIMADVERSIONES
## DOMINI HUGENII,
## IN EJUS LIBRUM, DE VERA CIRCULI ET HYPERBOLÆ QUADRATURA.

AD ea quæ dicit D. *Hugenius* contra meam *Circ.* & *Hyperb. Quadraturam*, ingenuè fateor (cum illa ſcriberem) me non animadvertiſſe exemplum in prop. 10. non eſſe ſeriem convergentem expe-



Digitized by Google

perientiam enim feci ſolummodo de primis & ſecundis terminis, non conſiderando tertios cum primis coincidere, nam ratiociniis inſiſtebam, de exemplis parum ſollicitus. Ut autem appareat in hoc nihil contineri contra noſtram Doctrinam, agedum hoc loco 10. *prop.* totidem verbis, ſed cum legitimo exemplo repetamus.

## PROP. X. PROBLEMA.

*Ex data quantitate eodem modo compoſita à duobus terminis convergentibus cujuſcunque ſeriei convergentis, quo componitur ex terminis convergentibus ejuſdem ſeriei immediate ſequentibus; ſeriei propoſitæ terminationem invenire.*

Sit ſeries convergens, cujus duo termini convergentes quicunque ſint $a$, $b$, & termini convergentes immediatè ſequentes $\frac{2ab}{a+b}$, $\frac{a+b}{2}$, termini priores inter ſe multiplicati efficiunt eandem $ab$, item ſequentes inter ſe multiplicati efficiunt eandem $ab$; ex his invenienda ſit propoſitæ ſeriei terminatio. Manifeſtum eſt, quantitatem $ab$ eodem modo fieri à terminis convergentibus $a$, $b$, quo à terminis convergentibus immediatè ſequentibus $\frac{2ab}{a+b}$, $\frac{a+b}{2}$: & quoniam quantitates $a$, $b$, indefinitè ponuntur pro quibuslibet totius ſeriei terminis convergentibus, evidens eſt, duos quoſcunque terminos convergentes propoſitæ ſeriei inter ſe multiplicatos idem efficere productum, quod faciunt termini immediatè ſequentes etiam inter ſe multiplicati; cumque duo termini convergentes duos terminos convergentes ſemper immediatè ſequantur, manifeſtum eſt, duos quoſcunque terminos convergentes inter ſe multiplicatos idem ſemper efficere productum, nempe $ab$; atque ultimi termini convergentes ſunt æquales, & proinde ſit ultimus ille terminus, ſeu ſeriei terminatio Z, quæ in ſe ipſam multiplicata facit

$Z^2 = ab$; eſt igitur Z. ſeu ſeriei terminatio $r^2\,ab$, quam invenire oportuit: & proinde ad inveniendam cujuſcunque ſeriei convergentis terminationem opus eſt ſolummodo invenire quantitatem eodem modo compoſitam ex terminis convergentibus primis, quo componitur eadem quantitas ex terminis convergentibus ſecundis.

## CONSECTARIUM.

*Quoniam non refert in* Problemate, *ſive termini convergentes*, a, b, *ſint primi, ſecundi vel tertii, &c. manifeſtum eſt, omnis ſeriei convergentis terminationem eodem modo eſſe compoſitam ex terminis convergentibus primis, quo ex ſecundis, tertiis, &c.*

Si quis aliud Exemplum deſideret, ſint primi termini $a$, $b$, ſecundi $r^7\,a^5\,b^2$, $r^2\,ab$, quantitas eodem modo compoſita &c. eſt $a^7\,b^4$ & ſeriei terminatio $r^{11}\,a^7\,b^4$: videat *Hugenius*, duo exempla legitima hic adducta inquiſitionem *Septimæ* non admittere; ope tamen *prop. decimæ* (ſuppoſita tertia illa quantitate) facilè reſolvuntur, neque ullo modo conſectarium reſpuunt, quod ſolummodo eſſe momenti ſatis ſit indicaſſe; plura autem exempla deſideranti millena afferam.

Ad primam *Hugenii* objectionem quod ſpectat, miror eum non conſideraſſe præcedens *conſectarium*, ubi illa, quæ deſiderat, evidenter deduco ex *prop.* 10. At agnoſcit hoc verum eſſe in illis ſeriebus, quæ ope noſtræ methodi terminantur: velim certè ut aſſignet mihi Nobiliſſimus Vir ſeriem aliquam convergentem cum ſua terminatione, quæ conſectarium noſtrum reſpuat; vel ſi eam aſſignare non poſſit, ſolidam dubitandi rationem tantum deſidero. Ut autem funditus evertatur hæc objectio, ſequentem exhibeo demonſtrationem Geometricam.

Sit

Digitized by Google

Sit A. Polygonum regulare ſectori *inſcriptum*. B eidem ſimile *circumſcriptum*; continetur ſeries convergens polygonorum &c. ut ſit ejus terminatio ſeu circuli ſector Z: ſit X eodem modo compoſita à terminis C, D, quo Z à terminis A, B; dico Z & X eſſe indefinitè æquales; ſi non ſint indefinitè æquales, ſit inter illas indefinita differentia *a*, & continuetur ſeries convergens in terminos convergentes I, K, ita ut eorum differentia ſit minor quam *a*; hoc enim abſque dubio concipi poteſt, etiamſi hic omnes quantitates ſint indefinitæ, quoniam definitis quantitatibus A, B, definitur etiam *a*, ſed adhuc reſtat K-I quantitas indeterminata in infinitum decreſcens. Manifeſtum eſt, *ſectorem* Z eſſe indefinitè minorem quam K, & majorem quam I: item quoniam Z eodem modo componitur ex quantitatibus A, B, quo X. è quantitatibus C, D, & Z indefinitè minor eſt quam K & major quam I, patet ex Proprietatibus ſerierum convergentium, X etiam eſſe indefinitè majorem quàm I, & minorem quàm K (eſt enim revera indefinitè major quàm L & minor quam M) & proinde ſunt quatuor quantitates indefinitæ, quarum maxima & minima ſunt I, K, intermediæ autem Z & X, & ideo differentia extremarum K-I major eſt quàm *a* differentia mediarum, quod eſt abſurdum, ponitur enim minor; quantitates ergò Z & X non ſunt indefinitè inæquales, & ideo ſunt indefinitè æquales, quod demonſtrandum erat. Manifeſtum eſt hanc demonſtrationem eodem modo applicabilem eſſe omni ſeriei convergenti.

| | |
|---|---|
| A | B |
| C | D |
| E | F |
| G | H *a* |
| I | K |
| L | M |
| Z | |
| X | |

In objectionibus 2, 3, & 4, contra ſuas ipſius imaginationes argumentatur *Hugenius*: Ego enim ſatis dilucidè affirmo in *Scholio propoſit*. 5. & in *fine prop*. 9. Septimam & nonam propoſitionem eſſe Particularem, unamquamque ſuo caſui; item in *Prop. decima* (quàm ergo pro generali ſubſtituo) evidenter ſuppono, & non quæro, illam quantitatem eo modo compoſitam ex primis, quo ex ſecundis terminis convergentibus; ſatis enim ſcio, talem methodum genera-

lem eſſe impoſſibilem. Sed omnium maxime admiror, Clariſſimum Virum non animadvertiſſe in 8. *definitione*, Quantitates C, D, E, compoſitionem ingredientes, ſemper eſſe eaſdem, nempe definitas & invariabiles, ipſos autem terminos A, B, eſſe indefinitos & variabiles, nimirum in F, G, & infinitos alios: at quis eſt qui non videt *Hugenii* $\frac{b^2m}{a^2+ba}$ non minus eſſe indefinitam, quam ſunt ipſi termini? Deinde in *Proœmio noſtræ Geometriæ partis univerſalis*, ſic dico. *Alii objiciunt contra prop.* 11. *ita: ſi addatur* $a^3$ *termino* $a^3 + a^2b$ & *temino* $ba^2 + b^2a$, *enervetur vis utriuſque demonſtrationis. Reſpondeo*, $a^3$ *eſſe quantitatem indefinitam*, & *alias quantitates indefinitas præter ipſos terminos convergentes compoſitionem non poſſe ingredi, quod analyſtam latere non poteſt*: Eodem modo reſpondeo *Hugenio* $\frac{bbm}{a^2+ab}$ eſſe quantitatem indefinitam, & ideo compoſitionem non poſſe ingredi: Si autem mihi objiciat, in *ſeptima* me credidiſſe, $\frac{mai-mbi}{ad-bd}$ fuiſſe quantitatem indefinitam; Reſpondeo, etiamſi diviſio per *a-b* à me ſatis inconſideratè neglecta ſit, apertè tamen conſtat, me hoc cognoviſſe, ex diverſitate methodorum, quibus utor in ſeptima & decima, quippe iſta *particulari*, in qua quantitatem illam quæro, & hac *generali*, in qua illam ſuppono; nulla enim alia ratio hujus diverſitatis excogitari poteſt; quod etiam ex ipſis *ſeptima* & *decima* eſt manifeſtum, cum appellem ſemper terminos convergentes quantitates indefinitas, hoc ipſo ſatis ſignificans, nullas alias quantitates indefinitas calculo ineſſe.

Semper credidi in rebus ſcientificis verba ita candidè eſſe explicanda (ſi modò poſſibile ſit) ut diſcurſus nullum includat abſurdum; at *Hugenius* ſatis percipit, diſcurſum nihil continere abſurdi, modò nulla quantitas indefinita præter ipſos terminos compoſitionem ingrediatur; judicat tamen abſque omni ratione, me contrarium exiſtimaſſe; libenter enim optarem *Hugenium* aſſignaſſe locum, ubi aſſero, illam inqui-

quiſitionem Septimæ eſſe univerſalem. Dico igitur & declaro me intelligere, nullam quantitatem indefinitam præter ipſos terminos convergentes compoſitionem poſſe ingredi. Atque ita corruunt tres ultimæ *Hugenii* ſive diverſæ objectiones, ſive ejuſdem portiones, neſcio enim, quare in tot partes dividatur.

Præcedentibus perceptis, evidentiſſimum eſt, *Circuli*, *Ellipſeos*, vel *Hyperbolæ* ſectorem eſſe terminationem ſeriei convergentis, cujus primi termini $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$, & ſecundi $ba^2 + b^2a$, $2b^2a$ * & proinde Sectorem eodem modo componi ex primis terminis quo ex ſecundis*; atque evidens eſt, nullam dari quantitatem eodem modo analyticè compoſitam ex primis terminis quo ex ſecundis, quoniam primos eodem modo analyticè tractando quo ſecundos, ſemper reſtat altior poteſtas ipſius $a$ in primorum producto, quam in producto ſecundorum; de hoc (ſi non credatur) fiat experientia, & conſtabit non ſolum aſſertionis veritas, ſed etiam ejuſdem demonſtratio; quando autem altior eſt ejuſdem poteſtas in una quantitate quàm in altera, nulla datur indefinita æquatio, de qua hic tantum loquimur, hoc eſt, ut (poſitis $a$, $b$, ad libitum,) æqualitas ſemper rite procedat. Atque hæc eſt ſumma non ſolum propoſitionis undecimæ ſed etiam totius noſtræ *Circ.* & *Hyp. Quadraturæ*, ab *Hugenio* adhuc intactæ. Gratias tamen ago nobiliſſimo viro, quòd meas qualeſcunque lucubrationes examinare dignatus eſt, hinc enim mihi data eſt occaſio illas fuſius explicandi & confirmandi. Num *Hugeniana* methodus circulum menſurandi mea ſit præciſior, experientiæ relinquo judicandum; quod autem noſtra, *Hyperbolam quadrandi*, illi etiam innotuerat, de hoc nihil habeo quod dicam, niſi quod mihi gratuler, inventa mea ipſo *Hugenio* non æſtimare indigna.

* Schol. 5.
* Conſ. 10.

# IV.

## EXCERPTA EX LITERIS D^ni. HUGENII DE RESPONSO, QUOD D^nus. GREGORIUS DEDIT AD EXAMEN LIBRI, CUI TITULUS EST, *VERA CIRCULI ET HYPERBOLÆ QUADRATURA.*

In circuli quadraturam inquirentes Geometræ, varia & quidem pulcherrima detexere, ideo ne utili exercitio deſtituantur adverſus Gregorium defendere conſtitui, quadraturam hanc detegi poſſe; neque huc uſque reſponſionem hanc diſtuliſſem, niſi occaſione controverſiæ noſtræ examen ſuſcepiſſem exactiſſimum de proxima Circuli & Hyperboles Quadratura: in quo me interpellarunt ſæpe alia impedimenta.

Dico nunc primo; Quod ſpectat impoſſibilitatem analyticam quadraturæ illarum figurarum, tantum abeſſe etiam poſt ſupplementum demonſtrationum, quod D^nus Gregorius dedit, impoſſibilitatem hanc bene probatam eſſe, ut adhuc dum incertum maneat, num Circulus & quadratum diametri ejus ſint incommenſurabilia, id eſt an non horum ratio per numeros poſſit exprimi; quod etiam applicari poteſt portioni determinatæ Hyperboles & figuræ huic inſcriptæ. Quod ut demonſtremus ſufficit obſervaſſe; quod XI ejus **Propoſitio** & ſupplementum nil probent quando in ejus ſerie convergente determinantur quantitates *a* & *b* per numeros rationales vel ſurdos; quoniam tunc terminatio etiam poterit eſſe numerus quidam ſimilis; & contrarium per illam propoſitionem demonſtrari non pote-

terit, quoniam tunc ignotum erit, quomodo terminatio compoſita ſit ex primis & ſecundis terminis. E. G. Si $a$ ſit 1 & $b$, 2 quomodo probabitur per XI. ejus Propoſitionem, terminationem non eſſe $\frac{7}{5}$. Ut ergo concludatur, rationem Circuli ad quadratum diametri ejus non eſſe analyticam, demonſtrari non ſolum debet, quod ſector Circuli non ſit analyticus indefinite ad figuram ſuam inſcriptam, licet illa demonſtratio non careat ſuâ pulchritudine, ſed quod illud etiam verum ſit *in omni caſu definito*.

Dico præterea, ſi quantitates $a$ & $b$ maneant indeterminatæ, terminationem forte reduci ad æquationem ex iis, quarum radices dari nequeunt; & contrarium probari per XI ejus Propoſitionem, neque per Supplementum, non poterit, nihilominus ſi illa terminatio reducta ſit ad quandam æquationem ejus naturæ, crederem Quadraturam Geometricè eſſe inventam per interſectionem quarundam linearum curvarum, quæ in Geometriâ admittuntur.

Non inhærebo in aliis objectionibus, quas propoſui; Dicam tantum, has, ſicuti locum amplius non habent poſt correctionem Dn. Gregorii, ita antea firmo fundamento nixas fuiſſe; quoniam omiſſa diviſione neceſſariâ per $a$ $b$ in tot locis propoſitionis VII. poterat præſumi illum non noviſſe talem diviſionem eſſe poſſibilem, & conſequenter illum credidiſſe, in compoſitione de qua agitur indefinitas admitti debere quantitates.

Tranſeo igitur ad comparationem noſtrarum methodorum pro dimenſione Circuli proxima: Certum eſt, primas ejus approximationes quarum fundamentum ſunt ipſius propoſitiones XX, & XXI. eaſdem eſſe cum iis, quas dedi in tractatu *de Circuli magnitudine*; ubi demonſtravi eadem illa Theoremata, ſcil. ſi Polygonum in Circulo inſcriptum ſit $a$; & Polygonum ſimul circumſcriptum ſit $d$: contentum Circuli minus eſſe quam $\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}d$ *, ſed majus quam $\frac{4}{3}c - \frac{1}{3}a$ *, poſito $c$ pro Polygono inſcripto quod duplo majorem habeat laterum numerum quam $a$ vel $d$. Quidquid hic digo

* *Vide ſupra pag. 361. pr. VI.*

* *Vide ibid. prop. V.*

&

& in ſequentibus dicam de Circulo debet intelligi pariter de ſectore Circuli.

Præter hanc approximationem D. Gregorius aliam proponit in fine ſuæ xxv Propoſitionis, quam admirandam dicit, cujus demonſtrationem ſe ignorare fatetur; hæc eſt, inter duos terminos, ſtatim memoratos $\frac{1}{3}\,a + \frac{2}{3}\,d$ & $\frac{4}{3}\,c - \frac{1}{3}\,a$, inventis quatuor mediis quantitatibus in proportione Arithmetica, aſſerit maximam harum quantitatum adeo Circuli magnitudini vicinam eſſe, ut, ſi in numeris, qui deſignant Polygona ſimilia *a* & *d*, prima notarum triens ſit eadem, error ad unitatem non pertingat.

Sed invenio hanc approximationem in Circulo veram non eſſe licet in Hyperbola locum habeat, &, dum in hac utimur maxima quatuor mediarum Arithmeticarum proportionalium, minimam pro approximatione Circuli adhibendam eſſe.

Ita minima quatuor mediarum proportionalium inter terminos dictos primæ approximationis erit $\frac{16\,c + 2\,d - 3\,a}{15}$, uti facile eſt videre per Calculum; & probare poſſum non ſolum experientiâ, ſed & per demonſtrationem quantitatem hanc, poſitis numeris quorum prima notarum triens eadem eſt, exprimentibus polygonis *a* & *d*, a vera Circuli magnitudine non aberrare niſi in duabus ultimis notis, & plerumque in omnibus notis & ulterius cum vera magnitudine conincidere, quam tamen ſemper ſuperat, cum e contrario maxima quatuor Mediarum, qua utitur D[us] Gregorius in Hyperbola deficiat.

Inveni præterea, approximationem hanc pro Circulo non æque accuratam eſſe, ac eſt illa quam dedi in Tractatù de *Circuli magnitudine*, juxta quam, quando *a*, *c* & *d* deſignant eadem Polygona, ac ſupra, terminus excedens contentum Circuli eſt $a + \frac{10cc - 10aa}{6c + 9a}$ * Neque demonſtratio difficilis eſt, quoniam ſi neges illum terminum eſſe minorem ideoque magis exa-

* *vide ſupra p. 383. in fine.*

ctum

ctum quam præcedentem $\frac{16c + 2d - 3a}{15}$, ſequetur, cubum $c - a$ non fore majorem nihilo, & $c$ non majorem quam $a$ contra hypotheſin, uti facile videre eſt per calculum analyticum, obſervando quod $d$ ſit $= \frac{cc}{a}$.

Poſſunt etiam $a$ & $c$ ſumi pro circumferentiis Polygonorum inſcriptorum, quorum unum ſubduplum laterum habet numerum; Et tum terminus $a + \frac{10cc - 10aa}{6c + 9a}$ eſt longitudo circumferentiæ Circuli, aut arcus ſectoris parum admodum excedens, ut ſi notarum triens in $a$ & $c$ ſit eadem, error dari non poterit niſi in ultima nota, & ſæpius nequidem in quatuor vel quinque notis ſequentibus ultra illas quæ dantur in numeris $a$ vel $c$.

Sed & ut illi, qui contemplationes has negligunt, tamen quid commodi ex noſtra controverſia capiant, addam hic Geometricam conſtructionem ex ultimâ approximatione deductam qua invenitur longitudo arcus Circuli dati adeo acurata quam ad uſum deſideratur.

Sit arcus Circuli, qui non excedat ſemicircumferentiam A B C, cujus ſubtenſa ſit A C; dividat hanc ut & arcum in duas partes æquales linea B D. TAB. XLIV. fig. 1.

Ducta ſubtenſa A B ſumantur ejus $\frac{2}{3}$ & ponantur ab A ad E in producta lineâ C D; tum diminuta D E decimâ parte E F, ducatur F B, & tandem ipſi perpendicularis B G. Erit linea A G æqualis arcui A B, vel dupla linea æqualis arcui A B C, quæ tam parum excedet, ut tunc etiam, quum arcus erit æqualis ſemicircumferentiæ Circuli exceſſus non ſit $\frac{1}{1400}$. longitudinis; ſed ſi tantum ſit $\frac{1}{43}$ circumferentiæ, differentia non erit $\frac{1}{23000}$, ſi autem arcus tantum ſit pars quarta circumferentiæ error non erit $\frac{1}{90000}$ longitudinis.

Poſſem hic addere approximationem & conſtructionem omnino ſimilem pro quadratura Hyperboles, paulo magis accedentem ad veram quam media Arithmetica D^ni^. Grego-

rii, de qua ſuperius dixi, ſed vererer, ne nimium hoc ſcriptum producerem, & certus ſum præterea, poſt illa, quæ Dns. Mercator nuper feliciter invenit de illa quadratura, & correctionem Dni. Wallisii, inventa noſtra hac de re parum eſſe conſideranda.

## V.

### EXCERPTA EX EPISTOLA

# D. JACOBI GREGORII,

### CONTINENTE QUASDAM EJUS CONSIDERATIONES, SUPER EPISTOLA

# D. HUGENII,

### IMPRESSA IN VINDICATIONEM EXAMINIS SUI LIBRI, DE VERA CIRCULI ET HYPERBOLÆ QUADRATURA.

Ex duobus argumentis, quibus conatur Nob. D. *Hugenius* doctrinam meam evertere, primo quidem, reſponſionis fundamentum dedi in *Proœm.* ad *Geometr. partem univerſalem*; alterum autem provenit ſolummodo à Prop. 11. non recte, opinor, ab *Hugenio* intellecta, quam tandem admittit poſt correctiones (ut inquit) à me factas. Ut autem, ſimul cum reſolutione Objectionum, omnem evertam dubitandi rationem, ex admiſſâ *Prop.* 11. in forma probare conabor Syllogiſtica, Nullam eſſe rationem analyticam inter Circulum & Diametri Quadratum: Præter Modum quippe & figuram nil deeſt in hactenus à me publicatis, quin

quin id integrè demonſtretur; quæ interim forma raro à Geometris exigitur. Dico itaque;

Si daretur ratio Analytica (ſeu ratio notis Analyticis exprimenda) inter Circulum & Diametri Quadratum, tunc Circulus analyticè componeretur ex Quadratis, inſcripto & circumſcripto. Sed poſterius eſt abſurdum E. Sequela Majoris ſic probatur;

Quantitas quæſita & determinata invenitur ex quantitatibus quibuſcunque eam determinantibus, in ea ratione, ſeu relatione, quam habet quantitas determinata ad dictas quantitates determinantes. Sed Quadratum inſcriptum & circumſcriptum Circulum determinat, idemque ex illis Circulus daretur in ea relatione, quam habet ad Diametri Quadratum vel ejus ſemiſſem, h. e. ſi eſſet ratio analytica inter Circulum & diametri Quadratum; Ex dictis quantitatibus determinantibus *analyticè* componeretur Circulus. Ex dictis enim quantitatibus omnia analyticè componi poſſunt, quæ ad ea rationem habent analyticam.

Secundi Syllogiſmi *Minor* eſt evidentiſſima. *Major* autem eſt axioma ab omnibus Geometris tacitè admiſſum.

*Minor* Syllogiſmi prioris ſic probatur.

Eodem modo componitur Circulus ex Quadrato inſcripto & circumſcripto, quo componitur Quadrans Circuli ex Triangulo inſcripto & Trapezio vel potius Quadrato circumſcripto. Sed ex 11. *Prop*. Quadrans Circuli ſeu ſector non poteſt componi analyticè ex Triangulo inſcripto & Quadrilatero circumſcripto. E.

Major eſt evidens. At poterit fortaſſe diſtingui *Minor*, dicendo; Prop. 11. veram eſſe in Methodo indefinita; ſed poſſe eſſe falſam in methodis Particularibus: At inſto. Omnis methodus indefinita in methodos ſeu caſus Particulares eſt reſolubilis. Sed hæc methodus indefinita, nempe quod ſector ſit terminatio datæ ſerie convergentis, in nullam particulararem reſolvi poteſt. Nulla igitur datur hic methodus particularis. *Major* patet, quia quantitates æquales in ſe mutuò ſunt reſolubiles. *Minorem* ita probo; Si hæc Methodus

indefinita reſolvetur in aliquam particularem, reſolutio fieret vel ab Analyſi *ſpecioſa* vel *numeroſa*. Sed neutrum dici poteſt. E. *Major* patet ex ſufficienti enumeratione. *Minor* ſic probatur: Non ab Analyſi *ſpecioſa*, quoniam hæc Methodus *indefinita* ad eam eſt irreducibilis, ut patet ex Prop. 11. Non à *Numeroſa*, quæ hic eſt interminabilis, proindeque invariabilis.

In hanc ultimam diſtinctionem reſolvitur 1. objectio *Hugenii*. Velim enim Nobiliſſ. Virum conſiderare, omnem plenam Problematis ſolutionem eſſe *indefinitam*. Nam Methodi *particulares*, cum ſint *infinitæ*, exhiberi omnes nequeunt; neque dirigi poſſunt à tenore Problematis quippe illis omnibus communi: Ideoque requiritur Methodus *Generalis* ſeu Indefinita, Particularium directrix. Agnoſco utique Methodos Particulares caſu ſæpe inveniri abſque ope Generalis; attamen fatendum eſt Geometris, nullam eſſe, nec poſſe fieri Mothodum Particularem, in quam reſolubilis non ſit Methodus indefinita. Si igitur Methodus Indefinita omni reſolutioni ſit impervia (ut in *Prop.* 11. eſt demonſtratum) eodem modo omnes Particulares reſolutionem etiam reſpuent; proindeque tam Definita, quam Indefinita nullam compoſitionem agnoſcit. Talis enim Compoſitio, qualis Reſolutio.

Etiamſi prædicta, meo quidem judicio, adundè ſufficiant, ne tamen ullus relinquatur cavillationi locus, 11$^{mam}$ noſtram *Prop.* etiam in *Definitis* hic demonſtrabimus. Sit ergò B Polygonum intra Circuli ſectorem, 2 B Polygonum circumſcriptum & priori ſimile; ſufficit enim Polygonorum proportionem definire, ut Theorema definitè demonſtretur. Continuetur ſeries convergens ut ſit ejus teminatio ſeu Circuli Sector Z. Dico, Z non poſſe componi *analyticè* ex Polygonis *definitis* B, 2 B. Si fieri poteſt, componatur Z Analytice ex Polygonis Definitis B, 2 B. ſintque duæ quantitates Indefinitæ *a* & *x*, è quibus componatur *m* eo-

| | |
|---|---|
| B | 2 B |
| C | D |
| E | F |
| G | H |
| Z | |
| *a* | *x* |

dem

| | |
|---|---|
| $\sqrt{ax}$ | $\frac{2ax}{a+\sqrt{ax}}$ |
| $m$ | $n$ |

dem modo, quo Z. componitur à quantitatibus B, 2 B; Item eodem modo componatur $n$ ex quantitatibus $\sqrt{ax}$, $\frac{2ax}{a+\sqrt{ax}}$: quantitates $m$, $n$, non ſunt indefinite æquales ex *prop*. 11. Si igitur inter $m$ & $n$ fingatur æquatio; $a$ manente quantitate indefinita, æquatio inter $m$ & $n$ tot habebit radices ſeu quantitates, in quas reſolvitur $x$, quot quantitatum, inter ſe diverſas rationes habentium, binarii ſunt in rerum natura, quæ vices quantitatum $a$, $x$, ſubire poſſunt, h. e. quæ eandem quantitatem *Analyticè* ex ſe ipſis componit eodem modo, quo eandem quantitas componitur ex ipſarum media Geometrica $\sqrt{ax}$, & ex media Harmonica inter dictam mediam Geometricam & $x$, nempe $\frac{2ax}{a+\sqrt{ax}}$, ita ut compoſitio ſit eodem modo quo Z componitur ex B & 2B. atque ex Conſectario *Prop*. 10. omnes quantitatum binarii, rationes quoque diverſas inter ſe habentium, B 2B, CD, EF, GH, &c. in infinitum, poſſunt ſupplere vices quantitatum $a$, $x$, quoniam Z eodem modo componitur ex B 2B, quo ex CD, EF, vel GH, &c. & proinde æquatio inter $m$ & $n$ radices habet numero infinitas. Sed omnis æquatio habet ad ſummum tot radices, quot habet dimenſiones; & proinde æquatio inter $m$ & $n$ dimenſiones habet numero infinitas, quod eſt abſurdum; ideoque Z ſeu Circuli Sector non poteſt analyticè componi ex Polygonis definitis B, 2B. quod demonſtrandum erat. Hinc manifeſtum eſt, Terminationem cujuſlibet ſeriei convergentis, ſi non poſſit componi ex terminis convergentibus *indefinitè*, nec poſſe componi *definitè*; adeoque evaneſcit ſimul cum noſtra diſtinctione Objectio *Hugenii* prima.

Idem in Objectione ſua ſecunda non videtur advertiſſe, me non ſolum in Prop. 11. ſed etiam in toto meo Tractatulo intelligere per Extractionem radicum, Reſolutionem omnium poteſtatum ſive purarum ſive affectarum, omnium quippe eadem eſt ratio, neque ulla imaginabilis eſt in demonſtratione diverſitas, ſive Sector ſupponatur Radix ali-



Digitized by Google

cujus poteſtatis puræ, ſive affectæ ad puram irreducibilis. Nam ſi Sector eodem modo fiat ex primis terminis convergentibus, quo ex ſecundis (ut in Conſect. *Prop.* 10. eſt demonſtratum) etiam omnes ejus poteſtates ſive puræ, ſive quocunque modo affectæ eodem modo componitur è primis, quo è ſecundis terminis convergentibus, quæ (in Analyticis exhibitæ) erunt æquales quantitates eodem modo Analyticè compoſitæ ex primis, quo ex ſecundis terminis convergentibus; quod eſt abſurdum, nempe contra *Prop.* 11. admiſſam. Senſus igitur integer *Prop.* 11. eſt Hoc Problema (*E datis duobus polygonis complicatis, invenire Sectorem ſive Circularem ſive Hyperbolicum ab illis determinatum*) non poteſt reduci ad ullam æquationem Analyticam.

In comparatione *Hugeniana* inter noſtras methodos, agnoſco, meas approximationes prop. 20. & 21. eaſdem eſſe cum *Hugenianis*, ſed methodo mihi peculiari demonſtratas. At meam approximationem in fine *prop.* 25. non percipere videtur *Hugenius*; aliam interim ſibi fingit: hanc primò meam non eſſe probat, deinde tamen eam cum ſua comparat, victoriaque potitur. Sed lentè hic feſtinandum.

Sit *a* Polygonum, Circulo vel ſectori inſcriptum, *c* Polygonum inſcriptum duplo plura habens latera, *d* autem ſit Polygonum circumſcriptum ſimile ipſi *c*. Ex 20. *prop.* Sector eſt major quam $\frac{4c-a}{3}$; & ex 21. Sector eſt minor quam $\frac{2d+c}{3}$, inter quos terminos ſit maximus quatuor continuè proportionalium $\frac{8d+8c-a}{15}$, nempe noſtra approximatio; quam rigidiſſimis *Hugenii* cenſuris ſubjicio. Hallucinatur autem *Hugenius*, quod Polygona *a* & *d* ſimilia ſumeret, cum debeant eſſe *c* & *d*, quæ duplò plura habent latera. Ne autem dicat, factam eſſe à me correctionem, conſideret hanc approximationem non ſolum verbis *prop.* 25. ſed & praxi *prop.* 30. eſſe conſonam, ubi approximationem *prop.* 21. ex ultimis ſimilibus Polygonis conſtruo: ridiculum enim eſſet, illam è penultimis minus præciſam dare, cum eadem ope-

Digitized by Google

opera detur magis præciſa ex ultimis. At miror, cum *Hugenius* incidiſſet in meam *Hyperbolæ* approximationem, quod eam non potuerit *Circulo* applicare; Nam in Hyperbola abſque dubio 24. *prop.* approximationem ex ultimis ſimilibus polygonis conſtruxit: Omnis enim ad *Circulum* approximatio ex polygonis deducta, *Hyperbolæ* eſt etiam applicabilis, & vice verſa. Sed hoc non videtur animadvertiſſe *Hugenius*; alioqui in fine ſuarum Animadverſionum non promitteret talem Hyperbolicam approximationem, de cujus applicatione ad Circulum nihil dicit. Quæ autem illic affirmat (ſi de ſemet loquitur in plurali) tranſeant; ſi verò etiam de me adeo fidenter ſibi perſuadeat, falli ipſum putem, cum hæc eadem quadratura, de qua loquitur, antequam ab eo videretur, ad laboris dimidium à me ſit reducta.

Ne autem *Hugenii* praxis geometrica minus peritis videatur noſtram ſuperaſſe, ex noſtra approximatione, ab *Hugenio* rejecta, ſequentem praxin exhibebo.

In fig. *Hugeniana* ſit $AC = A$, $ABC = B$, ſitque $A + B : B :: 2B : C$; eritque $\frac{8C + 8B - A}{15}$ major, quam arcus $ABC$; differentia autem, in ſemi-circumferentia minor erit quàm ipſius $\frac{1}{2500}$, in triente minor quam ipſius $\frac{1}{40000}$, & in quadrante minor quam ipſius $\frac{1}{300000}$. Sed quoniam præcedens approximatio major eſt quàm arcus, aliam addamus eodem minorem. Sit $A : B :: B : D$; $\frac{12C + 4B - D}{15}$ minor erit quam arcus $ABC$; differentia autem in ſemi-circumferentia minor erit quam ipſius $\frac{1}{1000}$, & in quadrante minor quam ipſius $\frac{1}{60000}$, inter has approximationes ſit maxima, penultima ſex continuè Arithmeticè proportionalium, quæ minor erit quàm arcus, differentia autem in ſemi-circumferentia minor erit quam ejuſdem $\frac{1}{19000}$, & in quadrante

TAB. XLIV. fig. 3.

mi-

minor quam ejuſdem $\frac{1}{3000000}$. Sed hæc levia mihi videntur, cum poſſim Approximationes exhibere, quæ ab ipſa ſemi-circumferentia differant minori intervallo, quam quælibet ejus pars aſſignata, neque nobis amplius apparent hæc mirabilia, cum demonſtratio ſolida innoteſcat. Ad reliqua ab *Hugenio* publicata, cum à meo inſtituto ſint aliena, nihil dico, niſi quod ipſa Hugenii dicta (non obſtante exactiſſima ſua, ut ait, materiæ hujus examinatione) à meæ *Appendiculæ* factis ni fallor, longè ſuperentur. Vale. *Decemb.* 15. 1668.

Figura *Hugenii* hæc eſt, quam ipſe hoc ſenſu, licet Gallicè, ſic explicat. Sit Arcus Circuli, qui non excedat ſemicircumferentiam, A B C, cujus ſubtenſa ſit A C, & dividantur ambo in partes æquales per lineam B D. Ducta ſubtenſa A B, capias inde $\frac{2}{3}$, eaſque jungas inde ab A ad E in linea C A protracta. Dein, reſecta lineæ D E parte decima E F, ducas F B, & tandem B G, ipſi perpendicularem: & habebis lineam A G æqualem Arcui A B C, cujus exceſſus tantillus erit, ut etiam tunc, quando hic arcus æqualis erit ſemicircumferentiæ Circuli, futura non ſit differentia $\frac{1}{1400}$ ſuæ longitudinis; at quando non eſt niſi tertiæ partis circumferentiæ, differentia non erit $\frac{1}{13000}$; & ſi non ſit niſi quartæ partis, non differet niſi $\frac{1}{90000}$, ſuæ longitudinis.

# F I N I S.

CHRIS-

Digitized by Google

# CHRISTIANI HUGENII
# GEOMETRICA
# VARIA.

*Tom. II.* Ppp

Digitized by Google

Digitized by Google

I.

# CONSTRUCTIO LOCI AD HYPERBOLAM PER ASYMPTOTOS.

In æquatione loci ad hyperbolam, ſi neutra indeterminatarum linearum in ſeipſam ducta inveniatur, velut ſi ſit $xy = bb$; vel $xy = cx . bb$; (literis $x$ & $y$ lineas indeterminatas AB, BC ſignificantibus, quæ in dato angulo ſibi mutuò ſint applicatæ, quarumque altera, ut AB, poſitione data intelligitur, & in ea datum punctum A) conſtructio per aſymptotorum inventionem facilè abſolvitur, ut oſtenſum eſt à *Fl. de Beaune* in Notis ad Geometriam Carteſii. Cum verò habetur $xx$ vel $yy$ in æquatione, vel utrumque nihilominus ad aſymptotos rem deduci poſſe, & quidem brevius quàm ad diametri laterumque recti & tranſverſi inventionem, oſtendemus hoc modo. TAB. XLIV. fig. 4. 5. 6. 7.

Sit æquatio ejuſmodi reducta, $y = l . \frac{nx}{z} \sqrt{mm . ox + \frac{ppxx}{gg}}$; ſemper enim ad hos terminos reduci poteſt, nempe ut $y$ altera linearum indeterminatarum, quæ applicata eſt ad poſitionem datam, ſola ab una parte æquationis habeatur, ab altera verò non plures termini quàm hîc inveniantur; nam ſæpe pauciores etiam eſſe poſſunt, cum ſoli neceſſarii ſint $+ \frac{ppxx}{gg}$ cum alterutro horum $mm$ vel $ox$.

Quum angulus ABC datus ſit, ducatur per A punctum linea XY quæ ſit rectæ BC parallela, & in ea accipiatur AI æqualis $l$, idque ad partes BC, ſi habeatur $+ l$ in æquatione, in contrarias verò ſi habeatur $- l$, & agatur IK pa-



Digitized by Google

rallela AB. Si verò non habeatur omnino $l$, recta IK in AB incidere intelligenda eſt.

Deinde ſicut $z$ ad $n$, quæ ratio data, ita ſit IK ad libitum ſumpta, ad KL; quæ ipſi AI parallela ducenda eſt; ſumendaque hoc pacto, ut puncta KL ſita ſint quo ordine AI, ſi habeatur $+ \frac{nx}{z}$, at contrà ſi habeatur $- \frac{nx}{z}$, & ducatur recta per IL; ſi verò deſit $\frac{nx}{z}$, eadem eſt IL & IK.

Porro ut $p$ ad $g$, ita ſit $\frac{1}{2}o$ ad ſingulas IX, IY ſumendas in recta AI; atque ita quoque IX ad IV ſumendam in IK ad partes AB ſi habeatur $- ox$, aut in contrarias ſi habeatur $+ ox$; & ſit VM parallela AI, occurratque rectæ IL in M: erit jam M centrum hyperbolæ quæſitæ; aſymptoti vero, rectæ per MX, MY ductæ.

Si vero non habeatur $ox$ in æquatione, erit I centrum hyperbolæ; ſumptiſque IX, IY ad libitum ſed inter ſe æqualibus, inventiſque inde punctis V & M, ut ante, ducentur aſymptoti per I parallelæ ipſis MX, MY.

Jam porro ſi habeatur $+ mm$, puncta S & R, per quæ hyperbola vel oppoſitæ ſectiones tranſire debent, invenientur ſumendo in recta AI à puncto I, ſingulas IS, IR æquales $m$: unde jam hyperbola data erit ac deſcribi poterit, in qua BC erit ordinatim applicata ad diametrum, ſi $\frac{\frac{1}{2}og}{z}$ major quam $m$; ſin verò $\frac{\frac{1}{2}og}{p}$ minor quam $m$, erit BC parallela diametro hyperbolæ ad quam eſt C punctum, ut hic caſu ſecundo. Quod ſi forte punctum S incidat in X, locus puncti C, erunt ipſæ aſymptoti. Si verò non habeatur $mm$, erit ipſum I punctum in hyperbola quæſita.

At ſi habeatur $- mm$, accommodanda eſt intra angulum XMI recta GN parallela IX, quæque poſſit quadrata ab IX & IS, vel tantum ipſi IS æqualis, ſi non habeatur

$ox$;

Digitized by Google

*ox;* eritque punctum N in hyperbola quæſita, quæ proinde rurſus data erit.

Sumpta enim in caſu primo $AB = x$ ad arbitrium, eique fig. 4.
applicata $BC = y$ in angulo dato, quæ ad hyperbolam inventam terminetur, oſtendendum ſit quod

$$y = l - \frac{nx}{z} + \sqrt{mm - ox + \frac{ppxx}{gg}}.$$

## DEMONSTRATIO.

Occurrat B C utrinque ſi opus ſit producta, aſymptotis in O & Q. Ex conſtructione eſt I X vel I Y $= \frac{\frac{1}{2}og}{p}$, I V $= \frac{\frac{1}{2}ogg}{pp}$, Ratio verò data I K ad K L, eadem nempe quæ $z$ ad $n$. Sed & angulus I K L datus eſt. Ergo & ratio I K ad I L, quæ ſit ea quæ $z$ ad $a$. Ergo quia ut I K ad I L ita I V ad I M, erit I M $= \frac{\frac{1}{2}aogg}{zpp}$. Ut autem I M ad I X, hoc eſt ut $\frac{\frac{1}{2}aogg}{zpp}$ ad $\frac{\frac{1}{2}go}{p}$, ſive ut $ag$ ad $pz$, ita M L, ſive M I minus I L, hoc eſt, $\frac{\frac{1}{2}aogg}{zpp} - \frac{ax}{z}$ ad L O vel L Q; quæ itaque erit $\frac{\frac{1}{2}og}{p} - \frac{px}{g}$. Porro quia $BK = l$, & $LK = \frac{nx}{z}$, erit $BL = l - \frac{nx}{z}$, quâ ablatâ à $BC = y$, fit $LC = y - l + \frac{nx}{z}$. Propter hyperbolam verò erit rectangulum Q C O æquale rectangulo Y S X. Sed rectangulum Q C O æquale eſt quadrato L O minus quadrato L C, hoc eſt quadrato ab $\frac{\frac{1}{2}go}{p} - \frac{px}{g}$ minus quadrato ab $y - l + \frac{nx}{z}$; quorum quadra-

torum differentia eſt $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp} - ox + \frac{ppxx}{gg} - yy + 2ly - ll + \frac{2nxy}{z} + \frac{2lnx}{z} - \frac{nnxx}{zz}$. Ergo hæc æquatur rectangulo YSX, hoc eſt quadrato IX minus quadrato IS, hoc eſt $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp} - mm$; quia IX $= \frac{\frac{1}{2}go}{p}$ & IS $= m$. In qua æquatione deleto utrinque $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp}$, invenietur $y = l - \frac{nx}{z} + \sqrt{mm - ox + \frac{ppxx}{gg}}$, ut oportebat.

fig. 5. In Secundo caſu rectangulum QCO æquatur quadrato LC minus quadrato LO; & rectangulum YSX quadrato IS minus quadrato IX. Unde rurſus valor Y idem qui caſu primo invenietur.

fig. 6. Sit tertius caſus quo habeatur $-mm$, ſitque æquatio $y = l - \frac{nx}{z} + \sqrt{-mm + ox + \frac{ppxx}{gg}}$, producta GN occurrat alteri aſymptoto in D. Hîc jam eadem ratione qua prius, apparebit LO vel LQ eſſe $\frac{\frac{1}{2}go}{p} + \frac{px}{g}$, & LC $= y + \frac{nx}{z} - l$. Et propter hyperbolam erit rectangulum QCO = rectangulo DNG ſeu quadrato NG, hoc eſt $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp} + mm$, quia XI $= \frac{\frac{1}{2}go}{p}$, & IS $= m$, quorum quadratis æquale fecimus quadratum GN. Rectangulum autem QCO æquatur quadrato LO minus quadrato LC, hoc eſt $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp} + ox + \frac{ppxx}{gg} - yy - \frac{2nxy}{z} - \frac{nnxx}{zz} + 2ly + \frac{2nlx}{z} - ll$. Ergo hoc æquale $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp} + mm$. In qua æquatione deleto rurſus utrinque

Digitized by Google

que $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp}$, invenitur $y = l - \frac{nx}{z} + \sqrt{-mm + ox + \frac{ppxx}{gg}}$

Eademque eſt demonſtrandi ratio in caſu quarto, & aliis quibusvis, habita ratione ſignorum + & −.

Cum non habetur $\frac{nx}{z}$ in æquatione, puncta M & V unum ſunt, tunc vero ſi $p = g$, hoc eſt ſi habeatur $+ xx$ pro $\frac{ppxx}{gg}$, erunt ſemper aſymptoti ſibi mutuò ad angulos rectos, quia ut $p$ ad $g$, ita fecimus $\frac{1}{2}o$ ad IX & ad IY, & ita IX ad IV; fiunt enim jam æquales IX, IY, IV, & ſingulæ $= \frac{1}{2}o$, unde punctum V eſt in ſemicirculo ſuper XY & proinde angulus XVY rectus. Item quia IM $= \frac{\frac{1}{2}aogg}{zpp}$, patet quod ſi $ag = zp$, hoc eſt ſi $g$ ad $p$ ut $z$ ad $a$, tunc erit IM $= \frac{\frac{1}{2}og}{p}$, ac proinde æqualis ipſi IX & IY quæ etiam erant $\frac{\frac{1}{2}og}{p}$. Adeoque hoc caſu erunt aſymptoti ſibi mutuo ad angulos rectos; cum rurſus punctum M ſit futurum in circumferentia circuli deſcripti ſuper XY centro I.

DE.

II.

# DEMONSTRATIO REGULÆ DE MAXIMIS ET MINIMIS.

Ad inveſtiganda Maxima & Minima in Geometricis quæſtionibus, regulam certam primus, quod ſciam, Fermatius adhibuit: cujus originem ab ipſo non traditam cum exquirerem, inveni ſimul quo pacto ea ipſa regula ad mirabilem brevitatem perduci poſſet, utque inde eadem illa exiſteret quam poſtea vir ampliſſimus Joh. Huddenius dederat, tanquam partem regulæ ſuæ generalioris atque elegantiſſimæ, quæ ab alio prorſus principio pendet. Hæc à Fr. Schotenio edita eſt unà cum Carteſianis de Geometria libris. Fermatianæ autem regulæ examen quod inſtitui eſt hujuſmodi.

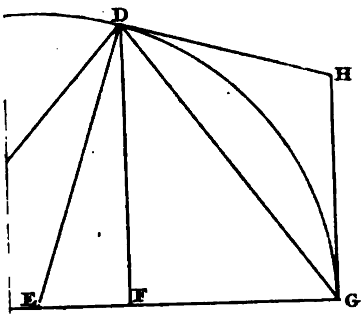
TAB. XLV. fig. 1.

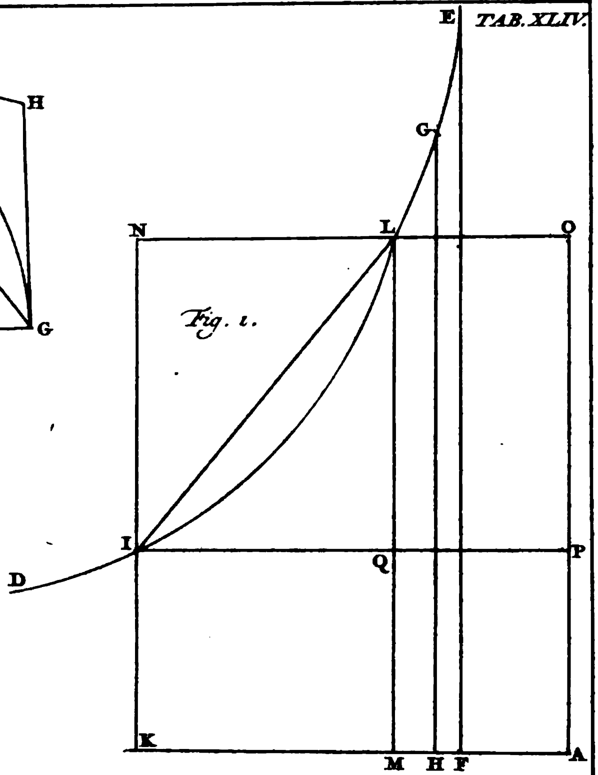
Quoties Maximum aut Minimum in problemate aliquo determinandum proponitur, certum eſt utrinque æqualitatis caſum exiſtere: ut ſi data ſit poſitione recta E D & puncta A, B, oporteatque invenire in E D punctum C, unde ductis C A, C B, quadrata earum ſimul ſumpta, ſint minima quæ eſſe poſſint; neceſſe eſt ab utraque parte puncti C, eſſe puncta G & F, à quibus ducendo rectas G A, G B; F A, F B oriatur ſumma quadratorum G A, G B æqualis ſummæ quadratorum F A, F B, & utraque ſumma major quadratis C A, C B ſimul ſumptis.

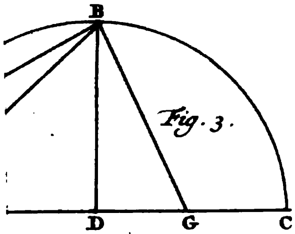
Ut igitur inveniam punctum C, unde ductis C A, C B fiat ſumma quadratorum ab ipſis omnium minima; ductis A E, B D perpendicularibus in E D, quarum A E dicatur $a$; B D, $b$; intervallum verò E, D, $c$: fingo primùm G F, differentiam dua-

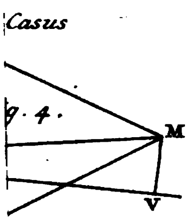
Digitized by Google

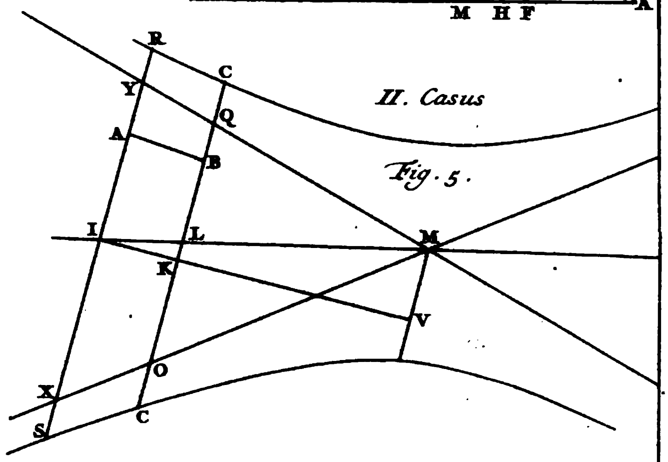
TAB. XLIV.

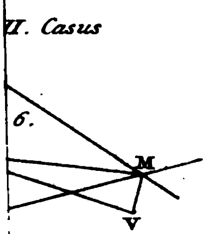

D
H
E
F
G

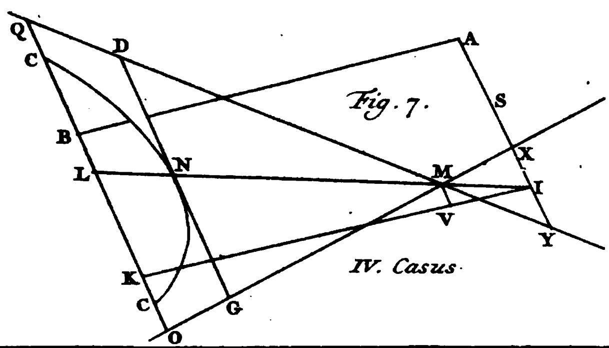

E
G
N
L
O
Fig. 1.
I
Q
P
D
K
M
H
F
A


B
Fig. 3.
D
G
C


Casus
g. 4.
M
V


R
C
Y
II. Casus
Q
A
B
Fig. 5.
I
L
M
K
V
O
X
S
C


II. Casus
6.
M
V


Q
D
A
C
Fig. 7.
S
B
X
N
L
M
I
V
Y
IV. Casus
K
C
G
O

Digitized by Google

duarum E G, E F æqualem datæ lineæ quæ vocetur $e$; & quæro quanta futura ſit E G, quam appello $x$, ut quadrata G A, G B ſimul ſumpta æquentur quadratis F A, F B.

Itaque quia A E $= a$, & E G $= x$, erit quadratum A G $= aa + xx$. Et quia G D $= c - x$, & D B $= b$, erit quadratum G B $= bb + cc - 2cx + xx$, unde quadrata A G, G B ſimul ſumpta fient $= aa + bb + cc - 2cx + 2xx$; qui dicantur termini priores; idque ſimiliter in quovis alio problemate intelligendum, ubi maximum aut minimum inquiritur. Rurſus autem quia E F $= x + e$, ſi ubique in ſumma quadratorum inventa ſubſtituam $x + e$ pro $x$, & quadratum ab $x + e$ pro $xx$, adque ita deinceps ſi altior poteſtas ipſius $x$ reperiatur, certum eſt exorituram ſummam quadratorum F A, F B; quæ quidem erit $aa + bb + cc - 2cx - 2ce + 2xx + 4ex + 2ee$, æquanda ſummæ quadratorum AG, GB; dicantur autem hi termini poſteriores.

Itaque erit $aa + bb + cc - 2cx + 2xx = aa + bb + cc - 2cx - 2ce + 2xx + 4ex + 2ee$. Ex qua æquatione prodibit valor E G ſive $x$, quando G F ſive $e$ certæ magnitudinis lineam refert.

Ponendo autem $e$ infinitè parvam, apparebit ex eadem æquatione quanta futura ſit E G, cum ipſi E F æqualis eſt, adeoque habebitur determinatio quæſita puncti C, unde ductæ C A, C B faciant ſummam quadratorum minimam; nempe ſublatis primùm, ſi quæ ſunt, fractionibus, (quæ in hoc exemplo nullæ ſunt) delentur termini qui utrinque iidem habentur, quales ſunt neceſſariò omnes quibus litera $e$ admixta non eſt; idque facile eſt intelligere, cum dixerimus poſteriores terminos ex prioribus deſcribi, ponendo $x + e$ vel poteſtatem ejus, quoties invenitur $x$ vel poteſtas ejus aliqua in prioribus. Deinde omnes termini per $e$ dividuntur, quibuſque poſt eam diviſionem adhuc unum $e$ aut plura ineſſe inveniuntur, ii delentur, quippe cum quantitates infinitè parvas contineant reſpectu cæterorum terminorum quibus nullum amplius ineſt $e$. Ex quibus denique ſolis invenitur quantitas $x$ quæſita in caſu determina-

tionis propoſito; & hæc eſt ratio methodi Fermatianæ, quâ in compendium redactâ hanc aliam inveni, cujus partes duæ ſunt. Nam primò,

„ Quando termini, quos maximum aut minimum deſignare volumus, nullam fractionem habent, in cujus denominatore quantitas incognita quæſita continetur; multiplicandus eſt terminus quiſque per numerum dimenſionum, quem in illo habet quantitas incognita, omiſſis terminis iis in quibus incognita quantitas non reperitur; omniaque illa producta æquanda nihilo.

Ita in exemplo propoſito, ubi termini priores inventi ſunt $aa + bb + cc - 2cx + 2xx$, ſummam duorum quadratorum continentes, quam volo eſſe minimam; tantummodo hujuſmodi inſtituenda erit multiplicatio,

$$\begin{array}{ccccc} aa + bb + cc & - & 2cx & + & 2xx \\ \hline & & 1 & & 2 \end{array}$$

Ex qua orientur termini æquandi nihilo $- 2cx + 4xx = 0$;

Unde fit $\frac{1}{2}c = x$.

Ita quoque ſi priores termini ſint $3ax^3 - bx^3 - \frac{2bba^2}{2c}x + ab^2$,

multiplicatio erit hujuſmodi. $\underline{\;3 \qquad 3 \qquad\qquad 1\;}$

Unde termini æquandi nihilo $9ax^3 - 3bx^3 - \frac{2bba^2}{3c}x = 0$

$$9axx - 3bxx - \frac{2bba^2}{3c} = 0.$$

Hujus compendii ratio ut intelligatur, ſciendum primò, quoniam termini poſteriores ex prioribus deſcribuntur, ponendo tantum ubique $x + e$ pro $x$, neceſſariò omnes terminos priores etiam in poſterioribus reperiri; ideoque illos nihil

nihil opus eſſe deſcribi, cum utrobique mox delendi forent, atque adeo illos tantum ſcribendos in quibus unum *e* vel plura inſunt, ut in exemplo noſtro $- 2ee + 4ex + 2ee$; eoſque æquandos nihilo. Sed etiam illos quibus plura quam unum *e* inerunt, ſcribi fruſtra apparet, cum diviſione facta per *e* delendos poſtea conſtet, ut paulò ante diximus. Itaque nulli præterea ab initio deſcribendi inter terminos poſteriores quam quibus inerit *e* ſimplex.

Hi autem termini ex terminis prioribus facilè deducuntur, cum conſtet nihil aliud eſſe quam ſecundos terminos poteſtatum ab $x + e$, quia cæteri omnes plura quam unum *e* vel nullum habent. Adeo ut ubicunque in prioribus terminis habetur $x$, ſcribendum ſit in poſterioribus $e$; & ubi habetur $xx$ in prioribus, ponendum $2ex$ in poſterioribus; & ubi $x^3$ in prioribus, in poſterioribus $3exx$, atque ita deinceps. Dicti autem termini ſecundi cujuſque poteſtatis $x + e$ ex ipſa poteſtate $x$ facilè deſcribuntur mutando unum $x$ in $e$, & præponendo numerum dimenſionum ipſius $x$, ita enim ab $xx$ fit $2ex$, & ab $x^3$, $3exx$; atque in cæteris pari modo. Itaque ex terminis prioribus in quibus $x$, quos ſolos conſiderandos eſſe patuit, facilè etiam termini poſteriores, ii quos nihilo adæquandos diximus, deſcribuntur; multiplicando tantum ſingulos in numerum dimenſionum quas in ipſis habet $x$. Nam mutare unum $x$ in $e$ ne quidem opus eſt, cum eodem redeat, ſive omnes poſtea per $e$ ſive per $x$ dividantur, & ex his quidem aperta eſt ratio compendii ad primam partem regulæ pertinentis: nunc ad alteram veniamus quæ eſt hujuſmodi.

„Si termini quos maximum aut minimum deſignare volu„mus fractiones habeant in quarum denominatore occurrat „quantitas incognita, delendæ primùm ſunt quantitates co„gnitæ ſi quæ adſint; deinde ſi reliquæ quantitates non ha„beant eundem denominatorem, eò reducendæ ſunt. Tunc „termini ſinguli numeratorem fractionis conſtituentes, du„cendi in terminos ſingulos denominatoris, productaque „ſingula multipla ſumenda ſecundum numerum quo dimen-



Digitized by Google

„ſiones quantitatis incognitæ in termino numeratoris diffe-
„runt à dimenſionibus ejuſdem incognitæ quantitatis in ter-
„mino denominatoris. Signa autem affectionis productis
„ſingulis præponenda qualia lex multiplicationis exigit, quo-
„ties dimenſiones quantitatis incognitæ plures ſunt in termi-
„no numeratoris quam in termino denominatoris: at quo-
„ties contra evenit, contraria quoque ſigna productis præ-
„ponenda; quæ denique omnia æquanda nihilo.

Sint, exempli gratiâ, inventi termini priores, quos maximum deſignare velimus, iſti $\frac{bx^3 - ccxx - 2bccx}{bcc + x^3}$, ubi nulla eſt quantitas cognita. Hîc ergo, ſecundum regulam, multiplico terminos omnes numeratoris primum per $bcc$, priorisque producti ex $bx^3$ in $bcc$, ſcribo triplum, quia $bx^3$ habet tres dimenſiones quantitatis incognitæ $x$, $bcc$ verò nullam. Secundi producti ex $-ccxx$ in $bcc$ ſcribo duplum, propterea quod in $-ccxx$ duæ ſunt dimenſiones $x$, & in $bcc$ nulla. Tertium verò productum ex $-2bccx$ in $bcc$ ſcribo ſimplex, quia in $-2bccx$ & $bcc$ differentia dimenſionum $x$ eſt unitas. Tribus autem hiſce productis vera ſigna affectionis adſcribo, quoniam dimenſiones $x$ in terminis numeratoris excedunt eas quæ in termino $bcc$, quippe quæ nullæ ſunt, ita ut tria hæc producta ſint

$$3bbccx^3 - 2bc^4xx - 2bbc^4x.$$

Jam porrò terminos omnes eoſdem numeratoris duco in $x^3$, terminum alterum denominatoris, primumque productum ex $bx^3$ in $x^3$ ſcribere omitto, ſive per $o$ multiplico, quoniam eædem dimenſiones utrobique ſunt ipſius $x$, ideoque differentia nulla. Secundum autem productum ex $-ccxx$ in $x^3$ ſcribo ſimplex, quia in his terminis differentia dimenſionum $x$ eſt unitas. At tertium productum ex $-2bccx$ in $x^3$ ſcribo duplum, quia differentia dimenſionum $x$ in his eſt 2. Signa verò affectionis productis hiſce duobus adſcribo contraria iis quæ requireret lex multiplicationis, eo quod dimen-

menſiones $x$ pauciores ſunt utrobique in terminis numeratoris quam in $x^3$, termino denominatoris.

Itaque producta bina erunt hæc $+ ccx^5 + 4bccx^4$; quæ addita tribus præcedentibus

$$+ 3bbccx^3 - 2bc^4xx - 2bbcx^4,$$

faciunt ſummam æquandam nihilo

$$ccx^5 + 4bccx^4 + 3bbccx^3 - 2bc^4xx - 2bbc^4x = 0;$$

qua æquatione diviſa per $ccbx + ccxx$, fit $x^3 + 3bxx - 2bcc = 0$.

Quomodo autem ad hæc perventum ſit uno exemplo rurſus explicabimus, ex quo eandem in omnibus cæteris rationem eſſe intelligetur. Videamus igitur priores terminos quos modò propoſueram, nempe $\frac{bx^3 - ccxx - 2bccx}{bcc + x^3}$; ex quibus ſi alios quibuſcum eos comparem, ut initio factum eſt, deſcribere velim, ponendo ubique $x + e$ ubi eſt $x$; video quidem primò omnes illos in poſterioribus terminis poſſe negligi in quibus plura quam unum $e$ inerit, quia ſemper ex iis quantitates orientur in quibus plura uno $e$ inerunt, quæque proinde delendæ tandem erunt, ob cauſam in ſuperioribus traditam.

Itaque erunt termini priores æquandi poſterioribus

$$\frac{bx^3 - ccxx - 2bccx}{bcc + x^3} = \frac{\begin{array}{c} bx^3 - ccxx - 2bccx, \\ + 3bexx - 2ccex - 2bcce, \end{array}}{bcc + x^3 + 3exx}$$

qui nempe ex prioribus hac lege deſcripti ſunt, ut ubicunque eſt $x$ vel poteſtas ejus in prioribus, ibi ponatur $x + e$ vel poteſtatis $x + e$ duo priores termini; quoniam ſcimus in cæteris plura quam unum $e$ contineri.

Jam verò porrò, quia termini in quibus nullum $e$ in numeratore ac denominatore priorum ac poſteriorum terminorum, iidem planè reperiuntur, patet multiplicationes alternas eorum terminorum denominatoris in terminos nu-



Digitized by Google

meratoris partis alterius $e$ carentes, omitti poſſe, cum quantitates inde ortæ eædem utrinque eſſent futuræ ideoque delendæ. Quare in terminis poſterioribus ii tantum ab initio ſcribendi erant in quibus unum $e$, omiſſis omnibus reliquis, ut æquatio hîc futura ſit iſta

$$\frac{bx^3 - ccxx - 2bccx}{bcc + x^3} = \frac{3bexx - 2ccex - 2bcce}{3exx}.$$

Hîc jam multiplicationes alternæ per denominatores inſtituendæ eſſent ad tollendas fractiones. Verum examinando diligentius quænam futura ſint harum multiplicationum producta, aliud adhuc compendium inveniemus, & nec ſcribendos quidem omnino eſſe terminos poſteriores: quia enim deſcribuntur ex prioribus mutato $x$ in $e$, præpoſitoque numero dimenſionum ipſius $x$, non difficile eſt colligere ex ſolis terminis prioribus quænam futura ſint iſta omnia producta.

Ita quoniam propter $- ccxx$ in prioribus, habetur $- 2ccex$ in poſterioribus; & propter $x^3$ in denominatore priorum, in poſteriorum denominatore eſt $3exx$; facile perſpicitur utraque producta ex $- ccxx$ in $3exx$ & ex $- 2ccex$ in $x^3$, quæ ſunt $- 3ccex^4$ & $- 2ccex^4$, eaſdem literas habitura, ſed diverſos numeros præpoſitos 3 & 2, idque inde fieri quòd in termino $ccxx$ unam dimenſionem minus habeat $x$ quam in termino $x^3$. Itaque & auferendo poſtea ex utraque parte æquationis, $- 2ccex^4$, apparet ſuperfuturum $- ccex^4$ à parte terminorum priorum. Quare ab initio hoc ſciri poteſt, multiplicando tantum in terminis prioribus $- ccxx$ numeratoris in $x^3$ denominatoris, unumque $x$ in $e$ mutando, ac productum ſimplex ſcribendo; quia differentia dimenſionum $x$ in iſtis duobus terminis eſt unitas.

Eadem ratione producta ex $- 2bccx$ in $3exx$, & ex $- 2bcce$ in $x^3$, quæ eaſdem literas habent, ſunt enim $- 6bccex^3$ & $- 2bccex^3$, habebunt numeros præpoſitos diver-

verſos, propterea quod in $- 2bccx$ una tantum eſt dimenſio $x$; at in $x^3$ tres, unde ablato ex utraque parte æquationis $- 2bccex^3$, ſcio ſuperfuturum à parte terminorum priorum $- 4bccex^3$: quod rurſus ab initio cognoſci potuit, quia eadem quantitas oritur, multiplicando $- 2bccx$ numeratoris terminorum priorum, in $x^3$ denominatoris, mutandoque unum $x$ in $e$, & productum multiplicando per $2$, quæ eſt differentia dimenſionum $x$ in terminis $- 2bccx$ & $x^3$.

At quoniam in $bx^3$ & in $x^3$ eadem eſt dimenſio $x$, ſequetur producta ex $bx^3$ in $3exx$, & ex $3bexx$ in $x^3$, tum literas eaſdem, tum eoſdem numeros præpoſitos habitura, ideoque ſeſe mutuo ſublatura, ut proinde multiplicatio illa omitti poſſit.

Atque hujuſmodi animadverſionibus inventum eſt quod in regula præcipitur, terminos ſingulos numeratoris in ſingulos denominatoris terminos eſſe ducendos, productaque quælibet multipla ſumenda ſecundum differentiam dimenſionum quantitatis incognitæ in terminis binis qui in ſe mutuò ducuntur. Nam quod non præcipitur unum $x$ in $e$ mutandum, id hanc rationem habet, quod non referat utrum poſtea per $e$ an per $x$ omnes termini dividantur.

Quod vero ſi ſigna affectionis vera productis ſingulis præponenda dicuntur, quoties dimenſiones $x$ plures ſunt in numeratore quam in denominatore, id quoque ex jam dictis intelligetur; uti conſequenter etiam hoc quod contraria ſigna ſunt adponenda, quoties dimenſionum numerus contra ſe habet. Velut hîc, productum ex $bx^3$ in $bcc$ ſcribendum eſt cum ſigno $-$ præpoſito numero 3, ut fiat $- 3bbccx^3$, quia nempe propter $bx^3$ ſcimus in poſterioribus terminis fore $3bexx$; quod ductum in $bcc$ faciet $+ 3bbccexx$, ſed translatum in partem priorem æquationis, fiet $- 3bbccexx$; ſive, non mutato $x$ in $e$, $- 3bbccx^3$.

Quod denique in regula habetur, quoties in prioribus terminis priusquam ad eundem denominatorem reducantur, quantitates cognitæ occurrunt, eas primum omnium delendas,

id

id ex hoc ſequenti exemplo intelligetur rectè præcipi. Sint enim reperti termini priores, quos maximum aut minimum deſignare oporteat, iſti $\frac{x^3}{2a - x} - 2vx + xx + vv$; ubi $vv$ quantitatem cognitam ſignificet: id igitur delendum eſſe ut appareat, videamus quid futurum ſit ſi non deleatur. Nempe ut ad eundem denominatorem cum cæteris omnibus reducatur, ducendum erit $vv$ in $2a - x$, fietque inde $\frac{2avv - xvv}{2a - x}$ in terminis prioribus. Propter quos in terminis poſterioribus, ſecundum ſuperius, explicata ſcribetur $\frac{-evv}{-e}$, adeoque multiplicatione alternatim utrinque per denominatores inſtituta, ducendum erit hinc $2a - x$ in $- evv$; inde $- e$ in $2avv - xvv$. Ex quibus multiplicationibus eoſdem utrinque terminos oriri neceſſe eſt, cum utrobique eadem hæc tria in ſe mutuo ducantur $2a - x$ in $- e$ in $vv$, qui proinde termini ſe ſe mutuo ſublaturi eſſent, eoque fruſtra ſcriberentur; ac proinde liquet tuto deleri poſſe ab initio quantitatem $vv$, idemque quod in hoc exemplo accidit, neceſſario quoque in quibuslibet aliis contingere, diligenter intuenti manifeſtum erit.

III.

## REGULA

### *Ad inveniendas Tangentes linearum curvarum.*

IDem *Fermatius* linearum curvarum Tangentes regula ſibi peculiari inquirebat, quam *Carteſius* ſuſpicabatur non ſatis ipſum intelligere quo fundamento niteretur, ut ex epiſtolis ejus hac de re ſcriptis apparet. Sanè in *Fermatii* operibus poſt mortem editis, nec bene expoſitus eſt regulæ uſus, nec demonſtrationem ullam adjectam habet. *Carteſium* vero in his quas dixi literis, rationem ejus aliquatenus aſſecutum invenio, nec tamen tam perſpicuè eam explicuiſſe quam per

per hæc quæ nunc trademus fiet, quæ jam olim, multò ante iſtas literas vulgatas conſcripſimus.

Præcipuum vero operæ pretium tunc fuit compendioſa hujuſce regulæ contractio, quam, quoad potui, proſecutus, tandem in ipſas illas inſignes Huddenii, Sluſiique regulas deſinere inveni, quas mihi Viri hi Clariſſimi uterque ferè eodem tempore exhibuerant: an vero hac eadem viâ an aliâ in illas inciderint nondum mihi compertum.

Sit data linea curva ut BC, quæ cognitam relationem habeat ad rectam aliquam poſitione datam AF; ac proinde applicatâ è puncto quolibet curvæ, ut B, rectâ BF, in dato angulo BFA, datoque in recta AF puncto A, certa æquatione relatio quæ eſt inter AF & FB expreſſa habeatur. Exempli gratiâ, appellando AF, $x$; FB, $y$, ſit æquatio $x^3 = xya - y^3$, ubi $a$ lineam quandam datam ſignificare cenſenda eſt. TAB. XLV. fig. 4.

Quod ſi jam ad punctum B tangens ducenda ſit BE, quæ occurrat rectæ AF in E, voceturque FE, $z$, ejus longitudo per hanc regulam Fermatianæ regulæ compendiariam, invenietur, ex ſola æquatione data.

Tranſlatis terminis omnibus æquationis datæ ad unam æquationis partem, qui proinde æquales fiunt nihilo, multiplicentur primò termini ſinguli, in quibus reperitur $y$, per numerum dimenſionum quas in ipſis habet $y$, atque ea erit quantitas dividenda. Deinde ſimiliter termini ſinguli in quibus $x$, multiplicentur per numerum dimenſionum quas in ipſis habet $x$, & è ſingulis unum $x$ tollatur; atque hæc quantitas pro diviſore erit ſubſcribenda quantitati dividendæ jam inventæ. Quo facto habebitur quantitas æqualis $z$ ſive FE. Signa autem + & − eadem ubique retinenda ſunt; atque etiam ſi forte quantitas diviſoris, vel dividenda, vel utraque minor nihilo ſive negata ſit, tamen tanquam affirmatæ ſunt conſiderandæ: hoc tantum obſervando, ut cum altera affirmata eſt, altera negata, tunc FE ſumatur verſus punctum A, cum verò utraque vel affirmata eſt vel negata, ut tunc ſumatur FE in partem contrariam.

In curvâ propoſita cujus æquatio $x^3 + y^3 - axy = o$, fiet ſecundum hanc regulam dividenda quantitas $3y^3 - axy$, diviſor vero $3xx - ay$; ideoque $z = \frac{3y^3 - axy}{3xx - ay}$, quæ eſt longitudo cognita, cum dentur $x$, $y$ & $a$.

TAB. XLV. fig. 3. Eſto item alia curva A B H, cujus æquatio $axx - x^3 - qqy = o$, poſito ſcilicet $a$ & $q$ eſſe lineas datas, A F vero $= x$, F B $= y$. Sit B E tangens, & F E dicatur ut ante, $z$. Hic fiet ſecundum regulam, dividenda quantitas $- qqy$; diviſor autem $2ax - 3xx$, unde $z = \frac{- qqy}{2ax - 3xx}$ Ubi cum dividenda quantitas ſit negata, ſi fuerit etiam diviſor minor nihilo, hoc eſt ſi $2a$ minor quam $3x$, erit $z$ ſive *fe* ſumenda in partem ab A averſam. Si vero $2a$ major quam $3x$, ſumenda erit F E verſus A, ex præcepto regulæ.

TAB. XLV. fig. 4. Horum vero rationem, ipſiuſque regulæ & compendii quò reducta eſt, originem ut explicemus, proponatur ut ante curva B C, ad cujus punctum B tangens ducenda ſit.

Intelligatur primum recta E B D, quæ non tangat curvam ſed eam ſecet in B, atque item in alio puncto D, ipſi B proximo; rectæ autem A G occurrat in E; & ab utriſque punctis B, D ducantur ad rectam A G, iiſdem angulis inclinatæ B F, D G; & ſit A F $= x$, F B $= y$, ſicut antea; ponaturque etiam F G data eſſe, quæ ſit $e$, quæraturque F E $= z$.

Eſt itaque ſicut E F ad F B, hoc eſt, ſicut $z$ ad $y$, ita E G, hoc eſt, $z + e$ ad G D; quæ erit $y + \frac{ey}{z}$; & hoc quidem in qualibet curva ita ſe habere manifeſtum eſt.

Nunc porrò conſideretur æquatio naturam curvæ continens, ex. gr. illa ſuperius propoſita $x^3 + y^3 - xya = o$, ubi $a$ rectam longitudine datam, velut A H ſignificabat; & patet, cum punctum D in curva ponatur, debere eodem modo duas A G, G D, hoc eſt $x + e$ & $y + \frac{ey}{z}$ ad ſe mutuo referri

atque

Digitized by Google

atque AF, FB, hoc eſt $x$ & $y$. Nempe ſi in æquatione propoſita pro $x$ ſubſtituatur ubique $x + e$, & pro $y$, ubique $y + \frac{ey}{z}$, debebit æquatio hinc formata terminos omnes habere æquales nihilo; hoc eſt

$$x^3 + [3exx] + 3eex + e^3, + y^3 + [\frac{3ey^3}{z}] + \frac{3eey^3}{zz} + \frac{e^3y^3}{z^3} = 0.$$
$$- axy - [aey] - [\frac{aeyx}{z}] - \frac{aeey}{z}$$

In hac autem æquatione conſtat neceſſario terminos prioris æquationis, ex qua formata eſt, contineri debere, nempe $x^3 + y^3 - axy$: qui cùm ſint æquales nihilo ex proprietate curvæ, idcirco his in æquatione deletis, neceſſe eſt etiam reliquos nihilo æquari, in quibus ſingulis manifeſtum quoque eſt vel unum $e$ vel plura reperiri, ideoque omnes per $e$ dividi poſſe. Qui autem poſt hanc diviſionem non amplius habebunt $e$, eos, neglectis reliquis, ſcio nihilo æquari debere, quantitatemque lineæ $z$ ſive FE oſtenſuros; ſi nempe BE jam tanquam tangens conſideretur, ideoque FG, ſeu $e$, infinitè parva. Nam termini in quibus adhuc $e$ ſupereſt, etiam quantitates infinite parvas ſive omnino evaneſcentes continebunt. Et his quidem hactenus Fermatianæ regulæ origo ac ratio declaratur: nunc porro oſtendemus quomodo eadem ad tantam brevitatem perducta ſit. Video itaque ex æquatione totâ noviſſimâ, tantum eos terminos ſcribi neceſſe eſſe quibus ineſt $e$ ſimplex, velut hic $3exx + \frac{3ey^3}{z} - aey - \frac{aeyx}{z} = 0$. Qui termini quomodo facili negotio ex datis æquationis terminis $x^3 + y^3 - axy = 0$, deſcribi poſſint, deinceps explicandum. Et primò quidem apparet $3exx + \frac{3ey^3}{z}$ nihil aliud eſſe quam ſecundos terminos cuborum ab

$x + e$ & ab $y + \frac{e}{z}$ ideo ſcriptos quia in æquatione habentur cubi ab $x$ & $y$. Nam reliqui omnes termini cuborum, ut & quarumvis aliarum poteſtatem ab $x + e$, & ab $y + \frac{ey}{z}$, vel plura quam unum $e$ habent, vel nullum; ideoque, ut jam diximus, fruſtra ſcriberentur. Eâdem itaque ratione, ſi aliæ poteſtates ab $x$ vel $y$ eſſent in æquatione propoſitæ, ſcribendi forent in æquatione alterâ termini ſecundi tantùm ſimilium poteſtatum ab $x + e$ & ab $y + \frac{ey}{z}$. Notandumque ſecundos hoſce terminos, ex ipſis datis poteſtatibus ab $x$ & $y$, certa ratione confici; nempe ex poteſtate quavis $x$, velut $x^3$, mutando unum $x$ in $e$, & præponendo numerum dimenſionum ipſius $x$: ita hîc fit $3exx$. Ex poteſtate $y$ verò ducendo eam in $\frac{e}{z}$ præponendoque ſimiliter numerum dimenſionum ipſius $y$: ita hîc ab $y^3$ fit $\frac{3y^3e}{z}$. Quorum quidem rationem ex poteſtatum formatione intelligere facillimum eſt.

Porrò propter $xy$ in termino æquationis $- axy$, facile quoque apparet quid in æquatione ſecunda ſcribendum ſit. Cum enim ſubſtituendum ſit pro $xy$ productum ab $x + e$ in $y + \frac{ey}{z}$, ſed ea tantum ſcribenda in quibus unum $e$, ideo de duobus $x + e$ tantùm $e$ ducemus in $y$, & tantùm $x$ in $\frac{ey}{z}$; adeoque fient $ey + \frac{exy}{z}$; quibus in $a$ ductis, præpoſitoque ſigno $-$, quia habetur $- axy$, exiſtet $- aey - \frac{aexy}{z}$, ſicut ſuprà.

Sic

Sic quoque ſi in æquatione propoſita haberetur $xxy^3$; ſumerem propter $xx$ duos priores terminos quadrati ab $x + e$, nempe $xx + 2ex$; & propter $y^3$ duos priores terminos cubi ab $y + \frac{ey}{z}$, nempe $y^3 + \frac{3ey^3}{z}$; quorum productum pro $xxy^3$ ſurrogandum. Sed etiam hîc de duobus $xx + 2ex$ tantùm $xx$ ducendum in $\frac{3ey^3}{z}$, tantumque $2ex$ in $y^3$ (nam cætera vel plura quàm unum $e$ vel nullum haberent) adeo ut fiat $\frac{3exxy^3}{z} + 2exy^3$.

Atque ex his animadvertere licet, ſemper utrumque horum terminorum deſcribi poſſe ex dato termino, qui hic $xxy^3$, alterum quidem mutato uno $x$ in $e$, & præponendo numerum dimenſionum ipſius; ita enim fit $2exy^3$: alterum verò ducendo datum terminum in $\frac{e}{z}$, præponendoque ſimiliter numerum dimenſionum ipſius $y$; ita enim fit $\frac{3exxy^3}{z}$. Cumque hac eadem immutatione, paulo ante, etiam ſecundos terminos poteſtatum ab $x + e$ & ab $y + \frac{ey}{z}$ ex poteſtatibus $x$ & $y$ æquationis datæ deſcribi oſtenſum ſit, manifeſtum jam eſt à ſingulis terminis æquationis datæ, in quibus $x$ vel poteſtas ejus, deſcribi prædicta methodo in ſecunda æquatione totidem terminos in quibus non eſt $z$; à ſingulis verò in quibus $y$ vel poteſtas ejus, deſcribi totidem terminos, dicta etiam methodo, quarum fractionis denominator ſit $z$; nec alibi hanc literam in ſecunda æquatione repertum iri.

Hoc igitur cognito, quo pacto ex æquatione quavis propoſita, velut hîc $x^3 + y^3 - axy = 0$, alia deſcribenda ſit, ut hîc $3exx + \frac{3ey^3}{z} - aey - \frac{aeyx}{z} = 0$, animadverto porro, ſi termi-

ni diviſi per $z$ ad alteram partem æquationis transferantur, ductisque omnibus in $z$, diviſio deinde fiat per terminos in quibus initio non erat $z$, exiſtere tunc ipſam quantitatem $z$ ab una æquationis parte; uti hîc fiet $z = -\frac{3ey^3 + aeyx}{3exx - aey}$. Atque hinc intelligo ad conſequendam quantitatem $z$, ponendos tantum eos terminos æquationis ſecundæ, qui deſcripti ſunt ex terminis æquationis primæ in quibus $y$, ſublato tantum denominatore $z$, mutatiſque ſignis + & −. Deinde dividendo iſtos terminos per eos qui deſcripti ſunt ex terminis æquationis primæ in quibus $x$. Porro ex omnibus, tam diviſis quàm dividentibus, patet rejici poſſe $e$, adeo ut in hoc exemplo fiat $z = -\frac{y^3 3 + ayx}{3xx - ay}$. Itaque rejicitur $\frac{e}{z}$ ex terminis qui deſcripti ſunt ab iis qui habent $y$. Sic autem deſcriptos eos ſuperius diximus ut ducerentur in idem $\frac{e}{z}$, præponereturque numerus dimenſionum $y$. Itaque nihil requiri apparet ad terminos hoſce (quatenus ad definiendam quantitatem $z$ hic adhibentur) ex terminis æquationis primæ, in quibus $y$, deſcribendos, quam ut præponamus tantum iis numerum dimenſionum quas in ipſis habet $y$, ſignaque + & − invertamus. Sic nempe ab $y^3 - axy$, deſcribetur $-3y^3 + axy$. A terminis verò qui deſcripti ſunt à terminis æquationis primæ in quibus $x$, cum tantum $e$ hîc rejiciendum patuerit, cumque hos ita prius deſcriptos dixerimus ut unum $x$ mutaretur in $e$, præponereturque numerus dimenſionum ipſius $x$, apparet eos, quatenus hic ad conſtituendum diviſorum adhibentur, ſic tantum deſcribi opus eſſe ex terminis propoſitæ æquationis in quibus $x$, ut præponatur iis numerus dimenſionum ipſius $x$, ac deinde unum $x$ auferatur. Sic nempe ab $x^3 - axy$ deſcribetur $3x^3 - axy$; & dempto ubique $x$ uno, fiet $3xx - ay$. Atque ex his ratio regulæ ab initio poſitæ manifeſta eſt. Nam quod ſigna + & − in terminis qui deſcribuntur ab iis in quibus $y$, hîc immutanda diximus, in regulâ

verò

verò nulla omnino immutanda, id eodem redire liquet cùm quantitatem negatam, ſive minorem nihilo, tanquam affirmatam conſiderandam ibi dixerimus. Ut autem ratio obſervationis ibidem adjectæ, in utram partem linea F E accipienda ſit, intelligatur, repetemus figuram in principio poſitam, ubi vidimus A G eſſe $x + e$, E G vero $z + e$; unde fiebat GD $+ y + \frac{ey}{z}$. Si autem tangens ab altera parte lineæ B F cadere intelligatur, velut $be$, atque hæc primùm curvam ſecare fingatur, ut ibi factum eſt in $d$, ducaturque $dg$ parallela $bf$; fiet ponendo rurſus $fg = e$, $fe = z$, ut A $g$ quidem fiat $x + e$, ſed $eg$ erit $z - e$, unde $gd = y - \frac{ey}{z}$. Atque hinc porrò facile eſt perſpicere æquationem ſecundam, quæ ex propoſita æquatione, $x^3 + y^3 - axy = 0$ deſcribitur, hoc caſu fore $3exx - \frac{3ey^3}{z} - aey + \frac{aeyx}{z} = 0$, termini ut nempe qui per $z$ dividuntur, habeant ſigna contraria iis, quæ habebant in æquatione deſcripta caſu priori, quæ erat $3exx + \frac{3ey^3}{z} - aey - \frac{aeyx}{z}$: Ex hac verò priori ſequitur, quando quantitas $3exx - aey$, ſive quando $3xx - ay$ (quæ diviſorem conſtituit ſecundum regulam) fuerit minor nihilo, ſive negata, tunc quantitatem reliquam $\frac{3ey^3}{z} - \frac{aeyx}{z}$; ſive etiam $3y^3 - ayx$ (quæ quantitatem dividendam ſecundùm regulam conſtituit) eſſe affirmatam, aut cum illa eſt affirmata, hanc eſſe negatam; quia omnes ſimul æquationis termini æquantur nihilo. At contra ex illa æquatione $3exx - \frac{3ey^3}{z} - aey + \frac{aeyx}{z} = 0$, ſequitur, quando quantitas $3exx - aey$, ſive $3xx - ay$, fuerit negata, tunc reliquam $- \frac{3ey^3}{z} + \frac{aeyx}{z}$, ſive

TAB. XLV. fig. 5.

ſive etiam $-3y^3 + ayx$ eſſe affirmatam, ac proinde $3y^3 - ayx$ eſſe negatam: aut quando $3xx - ay$ fuerit affirmata, tunc $-3y^3 + ayx$ eſſe negatam; ac proinde $3y^3 - ayx$ eſſe affirmatam. Per hæc itaque apparet ex quantitatibus per regulam inventis, quæ erant $\frac{3y^3 - ayx}{3xx - ay} = z$ judiciari poſſe ad utrum caſum conſtructio tangentis pertineat; nempe ex comperta diſſimilitudine affectionis in diviſore & dividendo, ſequi ad priorem caſum eam pertinere, hoc eſt $z$, ſive FE, accipiendam eſſe verſus A: ex ſimilitudine verò eorum affectionis ſequi ad contrariam partem ſumendam.

TAB. XLV. fig. 6.

Poteſt autem quantitas $z$ ſive FE per regulam inventa, nonnunquam ad ſimpliciores terminos reduci ope æquationis datæ, quæ naturam curvæ continet: velut in hac curva AC, axem habente AD, verticem A, cujuſque ea eſt proprietas ut, ſi à puncto C in eâ ſumpta, applicetur ordinatim CD, fiat productum ex cubo BD (eſt autem B punctum in axe extra curvam datam) in quadratum DA æquale cubo quadrato DC. Sive ponendo BA $= a$, BD $= x$, DC $= y$, fiat æquatio curvæ naturam continens, iſta $x^5 - 2ax^4 + aax^3 - y^5 = 0$. Hîc ponendo CG eſſe tangentem, quæ occurrat axi in G, vocandoque GD, $z$, fit ſecundum regulam $z = \frac{-5y^5}{5x^4 - 8ax^3 + 3aaxx}$. Quia autem ex datâ æquatione eſt $y^5 = x^5 - 2ax^4 + aax^3$, reſtituendo pro $5y^5$ id quod ipſi æquale eſt, fiet $z = \frac{-5x^5 + 10ax^4 - 5aax^3}{5x^4 - 8ax^3 + 3aaxx}$; ſive dividendo per $xx$, erit $z = \frac{-5x^3 + 10axx - 5aax}{5xx - 8ax + 3aa}$. Et rurſus, dividendo hanc fractionem per $x - a$, habebitur $z = \frac{-5xx + 5ax}{5x - 3a}$. Quod ſignificat faciendum ut ſicut BD quinquies ſumpta minus BA ter, ſive ut BA bis unà cum AD quinquies ad AD quinquies, ita BD ad DG; atque ita GC tacturam in C curvam AC.

IV.

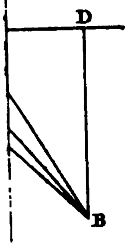



Fig. 2.

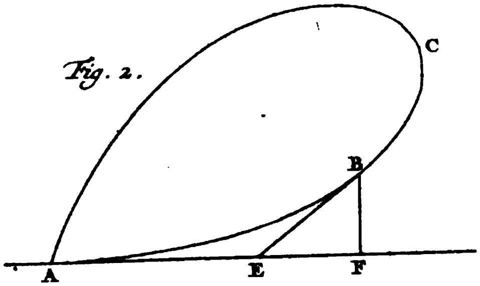



Fig. 3.

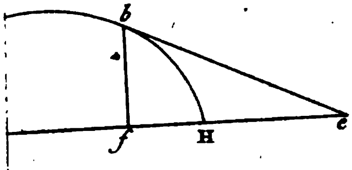
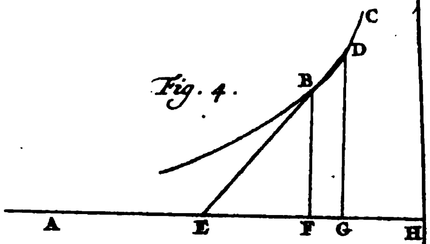



Fig. 4.



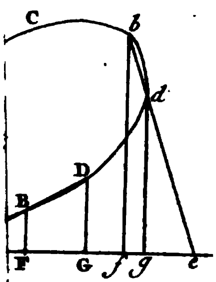
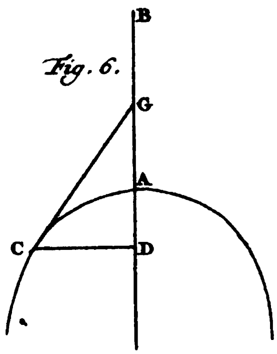




Fig. 6.




Digitized by Google

Digitized by Google

IV.

# CHRISTIANI HUGENII EPISTOLA

## DE

## CURVIS QUIBUSDAM PECULIARIBUS.

MItto tibi conſtructionem Problematis, quod ſine dubio Geometris placebit, ſi id cum ipſis communicare velis, cum pulcherrimum ſit, & ſingularia quædam contineat: accepi hoc a Marchione de l'Hoſpital, quem ex ſpecimine hoc & variis aliis, inter ſummos noſtri ævi Geometras referendum puto. Hac etiam occaſione ad te mitto quaſdam ex poſterioribus, ſuper rebus fere ſimilibus, contemplationibus noſtris.

Problema March. eſt; Invenire lineam rectam æqualem datæ portioni lineæ logarithmicæ. Ut hujus inveniat ſolutionem, ſagaciter utitur *Calculo differentiali* celeberrimi Leibnitii, & reducit problema ad quadraturam curvæ, cujus æquatio eſt, $a^6 = aaxxyy + y^4xx$; poſitis $x$ & $y$ indeterminatis, quæ angulum rectum efficiunt; Hanc quadraturam oſtendit dependere à quadraturâ Hyperboles; quæ datur, ut notum eſt, poſitâ logarithmicâ deſcriptâ; conſtructio autem huc redit. Sit logarithmica indefinita A C D, aſymptotos L O, ſubtangens conſtans data $a$, & portio curvæ ſit C D, cui æqualem rectam invenire oportet. TAB. XLVI. fig. 1.

Duc D L, C O perpendiculares ad aſymptoton, CE perpendicularem ad D L, & fac L T in aſymptoto æqualem ſubtangenti $a$, & ductis rectis T D, T E, fiat T V = T D & T I

 = TE:

= TE: tunc junge VD, ductâque ipſi parallelâ IK, e puncto K, ubi occurrit ipſi DL, duc parallelam aſymptoto KA, ſecantem DV in F, CO in X, & Logarithmicam in A. Tum rectæ AX & FK ſimul ſumtæ erunt æquales curvæ CD.

Solutio hujus Problematis, prout ego invenio, poteſt etiam reduci ad quadraturam curvæ, cujus Æquatio eſt $a^4 = xxyy - aayy$, quæ, ut & altera, dependet à quadratura Hyperboles, uti poſſem ſatis facile demonſtrare; ſed conſtructio à modo deſcripta non differt.

Neſcio, an multæ lineæ curvæ hanc habeant proprietatem ut ipſarum longitudines per ipſas curvas menſurari queant; interim ecce unam, quam haud ita pridem inveni, dignam, ut

TAB. XLVI. fig. 2. videbis, quæ & ob alia etiam notetur; Eſt curva AXKO extenſa in infinitum ſecundum rectam DN, quæ eſt ejus aſymptos, ad quam AD, tangens ad verticem A, inſiſtit perpendicularis; curvæ princeps & ſimpliciſſima proprietas eſt, ut omnis tangens inter punctum contactus & aſymptoton, ut KN, ſit æqualis lineæ AD; curva pariter extenditur ad alteram partem hujus perpendicularis AD. Ut invenias rectam lineam æqualem portioni hujus curvæ datæ a vertice A, ut AK (ſic enim invenies alias portiones quaſcunque) duc KP perpendicularem ad AD, & deſcripto arcu circuli PQ, qui habeat centrum D & radium DP, quære in AB parallelâ Aſymptoto punctum B, quod ſit centrum circumferentiæ circuli, quæ tranſit per A & tangit arcum PQ, quod facile eſt; porro ductâ rectâ BD, ſume in illâ DY = DA, & e puncto Y due parallelam Aſymptoto uſque ad curvam in X, tunc YX erit æqualis curvæ AK; Et natura hujus lineæ talis eſt, ut ſi ſumas tot proportionales quot volueris, in recta AD, incipiendo a D, ut DS, DI, DP & ducas applicatas SR, IO, PK: partes interceptæ curvæ, ut RO, OK, omnes ſint æquales.

Ad quadraturam Hyperboles quoque inſervit curva hæc; nam eadem recta YX facit cum AD rectangulum æquale ſpatio Hyperbolico ADEV, terminato lineis AD, EV perpendicu-

dicularibus ad FDE, unam ex Aſymptotis, & quæ ſunt inter ſe in ratione AD ad DP, ſi Hyperbola AV ſit æquilatera & quadratum ejus ad angulum Aſymptoton ſit ADFH; unde reciproce patet, quomodo queant & inveniri puncta hujus curvæ poſitâ quadraturâ Hyperboles.

Habet illa adhuc alias notabiles affectiones, quales ſunt, quod ſpatium infinitum, inter curvam, Aſymptoton, & rectam AD, ſit æquale $\frac{1}{4}$ circuli cujus radius eſt AD: quod ſolidum infinitum, quod producit hoc ſpatium rotando circa Aſymptoton, ſit æquale $\frac{1}{4}$ ſphæræ ejuſdem radii; quod ſuperficies ejus ſolidi infiniti, ſine baſi, ſit æqualis circulo, cujus radius eſt diagonalis quadrati ex AD.

Non autem propter ea qua huc uſque propoſui de hac curva hic egi, ſed quia ſimplici Machinâ deſcribi poteſt, quo reducitur Hyperbola ad quadratum, quod mihi viſum eſt Geometrarum conſideratione dignum.

Conſtructio Machinæ nititur in dictâ Tangentis proprietate & principio vel lege motus; ſcilicet, ſi in plano horizontali detur punctum, quod ſuo pondere vel alio modo aliquantulum reſiſtit, junctum extremitati fili vel vectis inflexilis, cujus altera extremitas movetur, punctum illud deſcribet curvam, cujus Tangens ſemper erit filum vel vectis. In inſtrumento vel machinâ, de qua dixi, movenda eſt extremitas D fili vel vectis DA juxta lineam rectam DN, & cavendum ut cuſpis in extremitate altera A hærens erecta maneat dum interim premetur in planum horizontale, potius elaterio quam pondere, quoniam ſic curva AK deſcribitur ſine errore ſenſibili, licet planum non ſit exacte horizontale; Et detegitur, an habeat veram figuram reducendo extremitatem vectis N per eandem rectam ND; quoniam requiritur, ut cuſpis regrediatur ex K in A, per eandem viam.

Si hæc deſcriptio, quæ per leges Mechanicæ eſt acurata poſſet haberi pro Geometricâ, eodem modo ut de-

ſcriptiones ſectionum Conicarum, quæ fiunt per inſtrumenta, haberemus inde & quadraturam Hyperboles & perfectam conſtructionem omnium Problematum, quæ ad hanc quadraturam reducuntur; ut inter alia ſunt, determinatio punctorum *Catenariæ*, & logarithmi. Si enim BY ſit = AC, quæ ſumitur in axe Catenariæ, id eſt DB = DC applicata ejus CG erit = YX; & eadem quoque YX eſt logarithmus rationis quam habet AD ad PD, id eſt, æqualis eſt diſtantiæ duarum linearum AD, PD, vel aliarum duarum quarumcunque, quæ eandem habent rationem, ordinatarum perpendicularium ad Aſymptoton lineæ logarithmicæ, quæ habet DA pro Subtangente univerſali; unde poſſunt inveniri logarithmi tabularum, prout demonſtravi in additione ad *diſſertationem de cauſa gravitatis*. Leibnitius, qui primus initium fecit reductionis curvæ Catenariæ ad leges Geometriæ, ipſam illam lineam ope veræ Catenæ tenuiſſimæ formatam, dixit inſervire poſſe inventioni logarithmorum, vel quadraturæ Hyperboles; licet ad id cognita requiratur (ut quidem ipſe noverat) longitudo rectæ, quam vocat curvæ Parametrum, cujus inventionem non demonſtrat. Ita ut noſtra quadratrix in his uſibus præferenda videatur, quia poſt deſcriptionem Parameter ejus, quæ eſt univerſalis ejus Tangens, datur.

Sed quoniam hæc materia me perduxit ad conſiderationem Catenariæ quæ elegantiſſimis hujus temporis Geometrarum inquiſitionibus occaſionem præbuit, libet hic addere quam inveni peculiarem ſatis methodum qua hæc delineatur curva, quod eſt omnium difficillimum inter ea quæ de hac ſibi inquirenda propoſuere Mathematici. Inter illa, quæ inſerenda dedi in actis Lipſienſibus cum pulcris & eruditis Leibnitii & Bernoullii inventis, dixi, me reduxiſſe conſtructionem vel inventionem punctorum hujus lineæ ad quadraturam curvæ, cujus æquatio eſt $a^4 = aaxx + yyxx$ *; & me cognoviſſe, hanc quadraturam dependere à cognitione ſummæ ſecantium arcuum circuli, quæ æqualiter creſcerent *per minima*; quæ ſumma jam dudum reducta fuerat ad quadraturam

* Vide ſupra pag. 292.

ram Hyperboles per Jac. Gregorium in exercitationibus ſuis Geometricis, ubi inde deducit ſolutionem problematis longitudinum, datis vento & latitudinum differentiâ, quod novum credidit Leibnitius, & quod à Gregorio traditum tunc temporis non recordabar. Leibnitius & Bernoullius, ut cenſeo, pervenerunt ad Catenariæ Conſtructionem ope Curvæ, quam poſterior illorum habet in 1ª. Figurarum quas exhibet ad ſolvendum hoc Problema; nam Leibnitius mihi ſcripſit, ſe etiam ad eandem perveniſſe; Et invenio eandem cum illâ de qua ante, cujus æquatio eſt $a^4 = xxyy - aayy$, cujus quadratura, ut dixi, dependet à quadraturâ Hyperboles: licet nondum concipere potuerim, quomodo calculus illos perduxerit ad hanc lineam. Sed transeo ad meam conſtructionem, quæ abſque conſideratione aliûs lineæ curvæ, dat puncta Catenariæ per dimenſionem lineæ Parabolicæ.

Primum fundamentum totius inquiſitionis reſpectu hujus TAB. XLVI. fig. 1. lineæ eſt hoc; Si habeas catenam compoſitam ex variis ponderibus æqualibus filo appenſis, ut BCDEF ſemper trium interſtitiorum ſe mutuo ſequentium duæ lineæ extremæ, ut CD, FE continuatæ ſibi mutuo occurrunt in linea IH perpendiculari ad Horizontem, quæ dividit interſtitium medium in duas partes æquales. Conſiderando porro catenam ita compoſitam à ponderibus connexis ad æquales diſtantias, quas ponimus infinite exiguas, & diſpoſitis, ita, ut interſtitium infimum BC ſit horizonti parallelum, ſi ſuper quovis alio interſtitio concipiamus triangula rectangula CDK, DEL, quorum unum latus ſit horizontale, videbimus, quod ab infimo initium faciendo anguli DCK, EDL, FEM, tales ſint, ut illorum Tangentes æqualiter creſcant, ut numeri 1, 2, 3, 4, id quod demonſtratu facile eſt ex dicto principio, licet forſitan eo non perveniſſemus ſine calculo Algebraico.

Si porro concipiamus partes æquales catenæ CDEFG extenſas in recta horizontali in COPQR, & ex prima diviſione O ductam OS, quæ concurrat cum perpendiculari CS,



Digitized by Google

ita ut angulus COS ſit æqualis angulo CDO, ſi deinde ducantur aliæ rectæ SP,SQ,SR; triangula SCO, SCP, SCQ, SCR erunt neceſſario ſimilia COD, DLE, EMF, FNG, quoniam SCO eſt ſimile ipſi COD per conſtructionem, & aliorum CSP, CSQ &c. tangentes æqualiter creſcunt.

Si porro ducas CT,OV,PX &c. perpendiculares ad SO, SP,SQ evidens eſt, triangula CTO,OVP,PXQ &c. æqualia eſſe & ſimilia triangulis COD,DLE,EMF &c. eodem ordine ſumendo: unde concluditur, ſi ſpatia CD, DE &c. ſint infinite parva, ut & partes CO,OP &c., id eſt ſi CG ſit curva catenæ, & CR æqualis ejus longitudini, tum ſumma TO,VP,XQ &c. erit æqualis ſummæ perpendicularium KD,LE, MF &c. id eſt rectæ GΣ vel axi ΦC (nam ſpatium BC tum pro nihilo habetur) & ſumma CT, OV,PX erit æqualis ſummæ CK,DL,EM &c. ideſt applicatæ GΦ.

Deſcribendo autem centro S arcum CZ uſque ad ultimam ſecantium SR facile patet, ſummam infinite parvarum TO,VP,XQ æqualem eſſe rectæ ZR; conſequenter, ſi ponamus quod SCΦ ſit axis Catenæ, & linea CS certæ longitudinis, & quod CΦ ſit æqualis ZR exceſſui ſecantis cujuſvis SR ſupra radium SC, & quod applicata ΦG ſit æqualis ſummæ omnium CT,OV,PX &c. uſque ad illam, quæ cadit in SR, punctum G erit in curva catenæ, cujus longitudo CG erit æqualis rectæ CR: ſed quæritur ſumma infinitarum CT,OV,PX &c. quam obtineo hâc conſideratione, quod anguli SOV, SPX,SQY poſſint haberi pro rectis, utpote quorum differentia cum recto eſt infinite exigua, & quod tum lineæ OV,PX, productæ utrinque, ut & RΩ perpendicularis ad SR, fiant tangentes Parabolæ CΩ, cujus vertex eſt C, axis CS, focus S, & in qua SC eſt pars quarta Parametri; quarum tangentium quævis ſecatur in duas partes æqualiter per CR, ita ut una dimidia pars pertingat ad axem, altera ad punctum contactus, ſic ΔΩ ſecta eſt in R; quæ facile demonſtrantur. Hinc porro intelligo ex Evolu-

volutione linearum curvarum, de qua locutus ſum in *Horologio oſcillatorio*, quod ſumma omnium QY, PX, QV, CT, debeat eſſe æqualis exceſſui curvæ Parabolicæ ΩC ſupra rectam ΩR; id quod Geometræ ſatis facile intelligent, licet in demonſtrando non inhæream, quum non conſtituerim hic demonſtrationes ſcribere, ſed tantum indicare viam, quâ ad inventionem pervenis.

Datâ ergo Catenariæ Parametro SC, ſi ſumas in axe punctum quodcunque Φ, & centro S radio SΦ deſcribas arcum circuli, qui ſecat CR tangentem ad verticem in R; tangente RΩ ductâ ad Parabolam dictam e puncto R, & ſubtractâ hac ex longitudine curvæ ſuæ CΩ quam ponimus poſſe menſurari, quod reliquum eſt, erit recta applicata ΦG, & ſic per eandem Parabolam invenies tot puncta in illâ curvâ, quot volueris; miſi hanc conſtructionem ad Leibnitium initio Septembris 1691.

Poteſt porro in tranſitu notari, quod curva GC (ſumendo ſemper numerum interſtitiorum infinitum, & ideo punctum C ac ſi foret in axe & vertex) erit æqualis rectæ CR; & quod dimenſio ſpatii curvi quoque facile demonſtretur, perficiendo rectangulum RCSΘ & producendo perpendiculares GN, FM &c. uſque ad SΘ in Λ, Γ &c.: patet enim triangulum SQY eſſe ſemiſſem rectanguli FΛ, baſin & altitudinem eandem habentis, & pariter triangulum SPX ſemiſſem rectanguli EΓ & ſic porro de aliis. Et conſequenter triangulum SCR æquale dimidio ſpatii SCGΛ. Poſſem ita paucis demonſtrare fundamenta omnium quæ de hac lineâ curvâ detecta ſunt; ſed hæc ſpectant ad Leibnitium & Bernoullium, utpote hujus inventionis magis participes, quos rogatos oportet, ut in bonum publicum laborem hunc in ſe ſuſcipiant.

Finem ſcripto huic impoſuiſſem, niſi nuperrime literas à Marchione de l'Hoſpital accepiſſem, ubi quum duo notabilia hac de materia memorat, non poſſum quin paucis de iis loquar; primum ſpectat ad conſtructionem & plures proprietates lineæ curvæ D^ni de Beaune, quam Carteſius in Ep. 79. 3 vol. dicit ipſi inveniendam propoſitam per datam

Tangen-

Tangentis proprietatem; Problema, quod mihi apparuit difficillimum. Solutio Marchionis exſtat in 34. Diario Pariſienſi anni ultimi, quare hanc hic non trado.

Alterum eſt ejus reſponſum de aliâ curvâ valde cognitâ, & quam Carteſius aliter adhuc conſideravit, ut & Huddenius eo tempore, quo negotia Reip. non impediebant, quo-
TAB. XLVI. fig. 4. minus vacaret ſtudiis. Curva in fig. 4. exhibetur, folium ABCH circumſcribit & utrimque ſeſe extendit juxta Aſymptoton EFG. Æquatio ejus eſt $x^3 + y^3 = xyn$ ſi AD ponatur $x$ in recta, quæ cum diametro CA format angulum 45 graduum; perpendicularis DB, vel DH, vel DK, $y$; & $n$ recta data. Cum ipſi indicaſſem, me inveniſſe quadraturam hujus curvæ, & quod contentum folii ABCH eſſet $= \frac{1}{6} nn$ id eſt $\frac{1}{3}$ quadrati diametri AC; quod ſpatium infinitum inter Aſymptoton & ambo curvæ brachia etiam ejuſdem magnitudinis eſſent; & quod quadratura generalis ſegmentorum exprimeretur per unicum terminum; ille invenit veram illam quadraturam generalem. Scilicet quod contentum ſegmentorum AH vel AK exprimatur per $\frac{nxx}{6y}$ & ſegmenti AB per $\frac{nyy}{6x}$; ſed ulterius mihi affirmat ſe eo perveniſſe per tres diverſas vias; quod miror, cum perſuaſum habeam me non parum profeciſſe unicam detegendo.

PRO-

V.

# PROBLEMA AB ERUDITIS SOLVENDUM:

A

# JOHANNE BERNOULLIO

IN ACTIS LIPSIENSIBUS

ANNI MDCXCIII.

## PROPOSITUM.

QUæritur, qualis ſit curva ABC, quæ hanc habet proprietatem, ut, ducta ubicunque tangente BD terminata ab axe AE, portio ejus abſciſſa AD ſit ad tangentem BD in ratione conſtante M ad N. TAB. XLVI. fig. 5.

Problema hoc ſolutu dignum eſt, & facile Mathematicorum applicationem meretur. In quacunque enim ratione ſit M ad N, curva ABC ſemper eadem facilitate motu quodam continuo deſcribi poteſt, non obſtante, quod curva pro ratione M ad N magis vel minus compoſita evadat; in caſu quippe rationis æqualitatis illico patet, curvam ABC eſſe circulum: in reliquis ſi M ad N eſt ut numerus ad numerum, erit quidem curva geometrica, ſecus autem tranſcendentalis eſt. Quæritur generalis determatio puncti in curva.



Digitized by Google

# VI.

## C. H. Z. DE PROBLEMATE BERNOULLIANO IN ACTIS LIPSIENSIBUS PROPOSITO.

Elegans inprimis eſſe hoc Problema, cum ex iis quæ Clariſſimus inventor de eo prodidit, tum ex ſolutione & commentatione fraterna manifeſtum eſt. A quo inveſtigando cum propter inſignem difficultatem, quæ ſtatim ſeſe offerebat, abſtinere ſtatuerim (neque enim omnibus perquirendis, quæ à Viris eruditis exercitii gratia proponuntur, incumbere neceſſe exiſtimo, aut aſſequendis parem me profiteor) non deſiit tamen quaſi invitum compellere recurrens identidem quæſiti non vulgaris idea, donec tandem quod deſiderabam obtinui. Inventa nimirum *æquatione differentiali*, in qua ex altera parte erat elementum trapezii hyperbolici, ab aſymptoto perpendicularibus intercepti; ab altera elementum ſpatii curvilinei, quod itidem ad trapezium hyperbolicum reduci poſſet. Quod apertius exponerem, niſi relinquendam etiamnum aliis putarem inquirendi voluptatem. Inde eo rem deducebam, ut trapezium ejuſmodi hyperbolicum ſecandum eſſet aut augendum ſecundum rationem datam. Quod cum per medias aut continue propor-

portionales fieri poſſit, ubi ratio tangentis ad abſciſſam eſt ea quæ numeri ad numerum, hinc apparuit curvam quæſitam tunc iis accenſendam quæ geometricæ vocantur, alias eſſe ex heterogeneis; ac tamen conſtructionem dari poſita lineæ logarithmicæ deſcriptione, quam quidem hic adducerem, niſi viderem haud difficulter ex ipſa Jacobi Bernoullii doctiſſima ſimul breviſſimaque ſolutione omnia erui poſſe, ut jam ab aliis occupatam dubitem.

Colligitur vero ex his illud animadverſione dignum, nempe quandocunque in inveſtigatione curvarum ex tangentibus aut ſubtangentibus ejus, ad ſimiles ei, quam dixi, æquationes pervenietur, aut in quibus habeatur utrinque elementum ſpatii ad trapezium hyperbolicum reductibilis; tunc idem hoc, quod mirabile hic accidit, eventurum, ut curvæ geometricæ diverſorum generum graduumque exiſtant, ſi hyperbolarum ad quas devenitur rectangula quæ in aſymptotis, ſint commenſurabilia. Præterea obſervanda venit in hoc problemate inuſitata ac ſingularis analyſis via, quæ ad alia multa in hac Tangentium doctrina aditum aperit, ut egregie jam animadvertit Vir Celeberrimus *calculi differentialis* inventor, ſine quo vix eſſet, ut ad haſce geometriæ ſubtilitates admitteremur. Porro quod ad curvarum, de quibus agitur, deſignationem in plano attinet, poſſem, ſi operæ pretium eſſet, alios modos ac fortaſſe commodiores indicare quam qui a Cl. Bernoullio præſcribitur, atque etiam docere qua ratione optime peragatur deſcriptio noſtræ quadratricis hyperbolæ, quæ inter *Tractorias* (ita enim vocari poſſunt) ſimpliciſſima cenſenda eſt, cum ad eam filis nihil opus ſit, ſed bacillo tantum utrimque cuſpidem lateri infixam habente, quo fit ut & regreſſu explorari poſſit quam recte exarata ſit. Sed his ſuperſedendum arbitror, donec inſignis uſus aliquis harum linearum in lucem proferatur. Interim aliam quandam utiliſſimam curvam

vam nuper mihi repertam Geometræ ſciant, cujus opera horologiis æqualis motus conciliatur, atque ejuſmodi ut maris agitatione nequaquam turbari aut imminui queat; quod in pendulis noſtris hactenus uſurpatis non ſatis caveri potuit. Adeo ut nova ac certior ſpes nunc affulgeat perficiendi Longitudinum inventi. Curva hæc formatur,

aabbcdeeeeefiiiiilllmmmmnorrſſttuux.

## VII.

## C. H. Z. CONSTRUCTIO UNIVERSALIS PROBLEMATIS A CLARISSIMO VIRO JOH. BERNOULLIO PROPOSITI.

TAB. XLVI. fig. 6.

Cum in *actis Lipſienſibus* Conſtructionem hanc me reperiſſe ſignificarem, menſe Octobri anno 1693, edenda tamen ea superſedi quod futurum putabam, ut vel ab Auctore ipſo, vel Clariſſimo Viro fratre ejus, vel alio quopiam, non multum abſimi-

ſimilis brevi in lucem mitteretur; ac ſubverebar etiam, ne actum agerem. Quoniam vero nuſquam adhuc comparuit, & eſt inter eas quæ dari poſſint quodammodo ſimpliciſſima, non videtur abſque ea diutius relinquendum tam eximium problema. Eſt autem hujuſmodi. In recta AB ſit datum punctum A, & oporteat invenire curvam AFC talem, ut tangens ejusquævis CD abſcindat a recta AB partem AD, quæ ad ipſam CD habeat rationem datam lineæ C ad L.

Conſtructio: ſicut C ad L, ita quælibet AE, in recta AB aſſumta ad EF ipſi perpendicularem: & per F punctum ponatur ducta Logarithmica quæcunque cujus aſymptotos ſit AB, ad quam illa accedat verſus A. Deinde ab A verſus E accepta diſtantia qualibet AD, ſit ut C ad L, ſive ut AE ad EF, ita AD ad aliam DH; qua tanquam radio, centroque D, deſcribatur Circuli circumferentia HC; ac præterea applicetur ad Logarithmicam recta IG aſymptoto perpendicularis, ipſique DH æqualis. Jam ſicut L ad duplum C, ita fiat IE ad EK, ſumendam in aſymptoto in partem alterutram, nihil enim refert, & applicetur rurſus ad Logarithmicam recta KL. Utque duæ ſimul KL, EF ad earum differentiam, ita ſit DH ad DB; quæ ſumenda verſus A punctum, ſi AD major ſit quam AE; at in contrariam, ſi minor. Denique erigatur ad aſymptoton perpendicularis BC; ea ſecabit circumferentiam HC in puncto C, quod erit in curva quæſita AFC. Tangit autem hanc recta EF in F.

Porro animadverſione dignum eſt, non ſimplicem eſſe curvaturam lineæ hujus cum C major eſt quam L, ſed ex duabus eam tunc componi, ex uno quodam puncto exeuntibus, ut CFA, CM; quarum

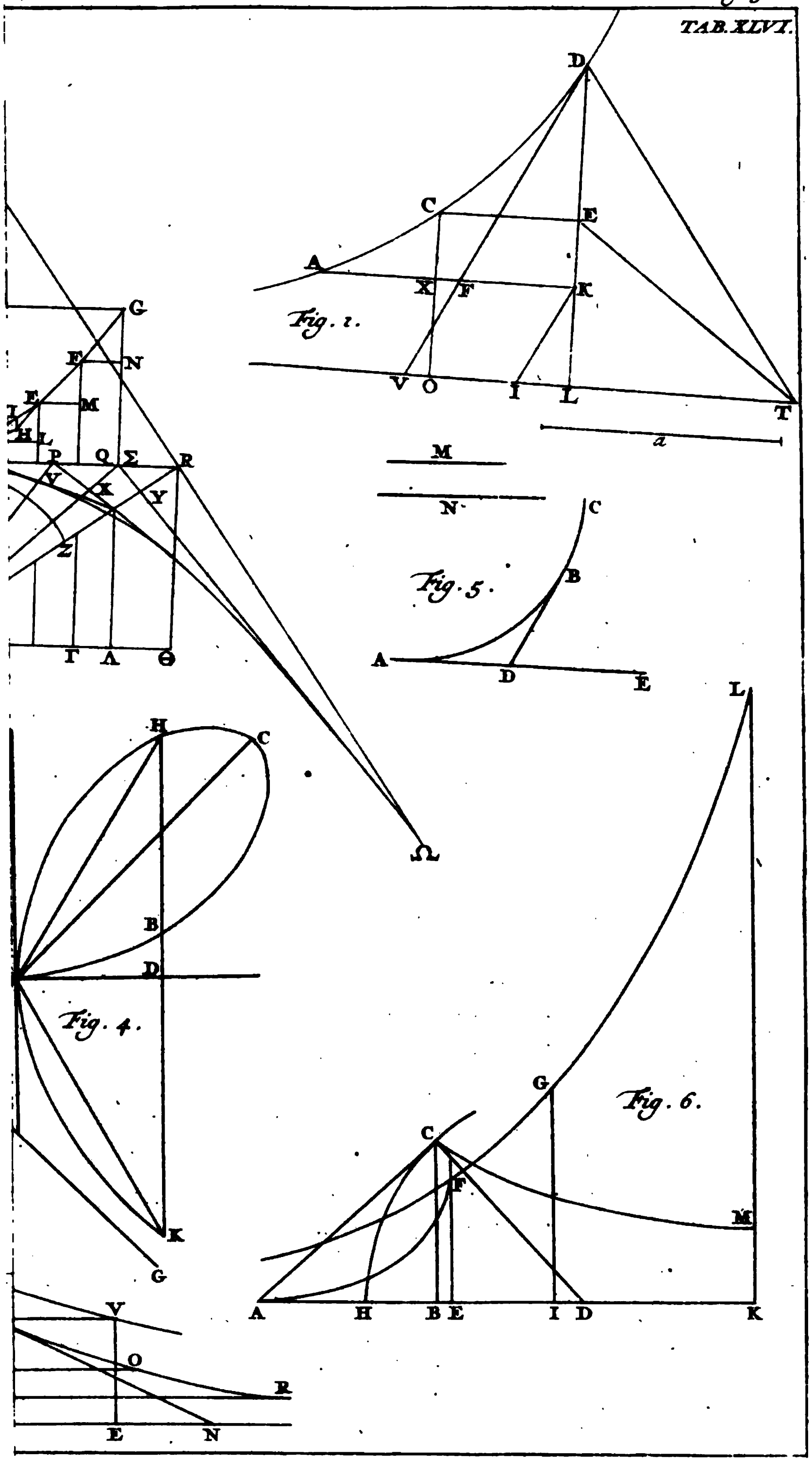
 hæc

hæc in infinitum progreditur. In puncto autem extremo C, recta ex A educta occurrit curvæ utrique ad angulos rectos, ac proportionales ſunt DA, DC, DB.

# F I N I S.

Digitized by Google

TAB. XLVI.




Digitized by Google

Digitized by Google

# CHRISTIANI HUGENII

# OPERA

# ASTRONOMICA.

*TOMUS TERTIUS.*

Digitized by Google

## Tomi tertii contenta.


De Saturni Luna observatio nova. 521.

Systema Saturnium, ſive de cauſis mirandorum Saturni Phænomenon; & Comite ejus Planeta novo. 527.

Eustachii de Divinis Septempedani brevis annotatio in Syſtema Saturnium Chriſtiani Hugenii. 597.

Brevis aſſertio Syſtematis Saturnii ſui. 6[illegible]

De Saturni Annulo obſervationes. 635.

ΚΟΣΜΟΘΕΩΡΟΣ, ſive de Terris Cœleſtibus, earumque ornatu, Conjecturæ. 641.


Digitized by Google

# CHRISTIANI HUGENII
DE
# SATURNI LUNA
# OBSERVATIO NOVA.



Digitized by Google

Digitized by Google

# CHRISTIANI HUGENII
## DE
# SATURNI
# LUNA
## OBSERVATIO NOVA.

ANNO milleſimo ſexcenteſimo quinquageſimo quinto, Menſis Martii die quinto & viceſimo, Saturni planetam per tubum dioptricum aſpectans, animadverti præter anſas ſive brachia quæ utrimque illi cohærent, ſtellulam quandam ab occaſu adſtantem, tribus circiter ſcrupulis remotam, eratque diſpoſita ſecundum eam quæ per utraque brachia ducta fuiſſet rectam. Et cum ſubdubitarem nunquid fortaſſe planeta eſſet ejus generis, quales circa Jovem quatuor



Digitized by Google

circumferuntur, locum Saturni ſtellulæque & poſitum utriuſque ad aliam quandam quæ tantumdem fere, ſed in contrarias partes, à Saturno diſſita erat annotavi; ex inerrantium numero hanc potiùs quam illam fore ratus, quod ab ea quam dixi recta linea deflectebat. Neque me fefellit opinio. Poſtridie enim repetita obſervatione, eam quæ ad occaſum ſpectabat ſtellam eodem ad Saturnum ſitu, eodemque quo prius intervallo ſejunctam deprehendi; alteram verò ad duplam ferè prioris diſtantiam receſſiſſe. Unde hanc quidem è fixis unam eſſe, atque à Saturno tum temporis retrogradiente longius relictam, illam autem ſimul cum eo progreſſam, comitem ipſi adeſſe intelligere mihi viſus ſum. Sequentium verò dierum obſervationibus omnis dubitatio ſublata eſt. Namque ab eo tempore per tres continuos menſes, quoties ſerenitas aëris patiebatur, novum planetam notavi, oſtendique amicis, nunc dextrum Saturno nunc ſiniſtrum; redactiſque in commentarios obſervationibus, ſexto decimo die periodum explere cognovi. Digreſſio ſumma tribus ſcrupulis paulo minor viſa eſt, ad quam ubi pervenit maximè fit conſpicuus: at cum Saturno appropinquat ante aut ponè tranſiens biduo propter ſplendorem ejus deliteſcit. Tempus verò ſexdecim dierum tam exactè circuitum planetæ metitur, ut cum annus jam & amplius à primis obſervationibus effluxerit, nihil adhuc aut abundare aut deficere deprehendatur, quoque loco prædicimus ibi ſeſe in cœlo ſiſtat. Scio ante annos complures Ant. Mariam de Rheita non unum, ſed ſenos jam Saturno errones attribuiſſe. Verum æquè circa hos, quàm circa alios illos quinque, quos præter Mediceos Jovi circumpoſuerat, deceptum fuiſſe, inde perſpicitur, quod cum meliori Teleſcopio ſeſe uti Clar. Vir Joh. Hevelius demonſtret, nullum tamen Saturno utut diligentiſſimè ſæpiſſimeque inſpecto comitatum adeſſe

ſe ſenſerit. Hoc enim ultrò fatetur. Præter Rheitam verò nemo quod ſciam ſimile quid de Saturno prodidit. Nam gemini illi quos Galilæus detexerat laterones longè aliud eſſe deprehenſi ſunt quàm prima ſpecie videbantur. Quid tamen ſint in incerto eſt; neque adhuc pronunciare audent Aſtronomi. Cæterùm mihi novum Saturniæ lunæ phænomenon ad hæc quoque viam aperuit, tandemque cauſam reſcivimus, cur interdum inter binas veluti anſas Saturnus medius teneatur, alias recta quaſi brachia protendat, tum nonnunquam omnibus amiſſis rotundus inveniatur, qualis anno 1642. ſpectatus fuit, jamque rurſus trimeſtri ſpatio perſtitit. Et harum quidem viciſſitudinum tempora in futurum definire non erit difficile ſi duorum adhuc menſium obſervationibus attendere licuerit, quæ videndum an hypotheſi noſtræ conſentiant. Expectamus enim ut ſub finem Aprilis, ſi non ante, brachia Saturno renaſcantur, non curva illa, cujuſmodi à Franc. Fontana & Hevelio depicta cernuntur, ſed ſecundùm lineam rectam utrimque prominentia, ſi quis melioris notæ perſpicillo intueatur. Nam vulgaria ſi adhibeat binos orbiculos referent, ſicuti Galilæo primum ſeſe obtulere. Noſtrum, quo Saturni aſſeclam reperimus, quinquagies diametrum rei viſæ multiplicat, duodenos pedes æquans: cui poſtea duplum longitudine conſtruximus, multiplicatione centupla. Cum autem longiora etiam hiſce Teleſcopia, utpote triginta & quadraginta pedum ab aliis fabricari dicantur, aliquid aut vitris vitii ineſſe, aut hæc eadem non debita proportione mutuò reſpondere credibile eſt. Neque enim alias huc uſque aciem eorum effugiſſet novus Saturni ſatelles.

Obſervationes præterito præſentique anno collectas, quibus periodus ipſius demonſtratur, tunc unà edituri ſumus cum integrum Saturni ſyſtema perfecerimus. Cujus interea ſummam ſequenti grypho conſignare viſum

 eſt,

eſt, ut ſi quis fortaſſe idem ſe inveniſſe exiſtimet, ſpatium habeat ad expromendum, neque à nobis ille aut nos ab illo mutuati dicamur.

*aaaaaaacccccdeeeeeghiiiiiiillllmmnnnnnnn*
*nnooooppqrrstttttuuuuu.*

Hagæ-Com. 5. Mart. 1656.

CHRI-

# CHRISTIANI HUGENII
## ZULICHEMII, CONST. F.
# SYSTEMA SATURNIUM,
SIVE
## DE CAUSIS MIRANDORUM SATURNI PHÆNOMENON;
ET
COMITE EJUS
# PLANETA NOVO.



Digitized by Google

Digitized by Google

SERENISSIMO PRINCIPI

# LEOPOLDO

AB HETRURIA

*Chriſtianus Hugenius S.D.*

RES in cælo remotiſſimas, extraque hominum conſpectum poſitas, niſi cum ab arte ſibi auxilium adſciſcunt, hoc opuſculo perſequor, Princeps Sereniſſime, nec dubito quin multis nimia diligentia verſatus dicar in his quæ tam parum ad nos attinere arbitrantur, cum eorum quæ hîc coram & in propinquo nobis ſita ſunt, plurima inveſtigatu digna ſuperſint. Verum hi parum attendere videntur, quanto præſtet cæteris omnibus ſublimium rerum conſideratio, quamque hoc ipſum præclarum ſit, ad tam longe diſſitas naturæ partes contemplationem mitti; quæ licet viſu obſcuræ & exiles, reipſa tamen illuſtres multoque maximæ exiſtunt. Nam ſi quod procul abſunt, ideo parum ad nos pertinere illas putemus, indigni profecto ſimus mente rationis participe, qua facile immenſa cæli ſpatia tranſcendimus, indigni etiam egregio illo, nec unquam ſatis laudato, propagandæ viſionis invento, quo ad aſtrorum regionem ipſo quoque oculorum ſenſu pertingimus.

Cu-

Cujus quidem inventi beneficio ad longinqua Saturni regna propius nunc quam antehac quiſquam adivi, & uſque eò progreſſus ſum, ut vaſti adeo itineris, pars una centeſima tantummodo reliqua fuerit: quam ſi quo pacto ſuperare potuiſſem, quot qualiaque, dii boni, narranda haberem! Nunc autem ea perſcribo quæ ex intervallo iſto notare oculis valui, quæque & ipſa miranda eſſe & relatu digniſſima nemo diffitebitur. Quem enim non admiratio capiet, ubi Saturnum annulo circumdatum ac velut corona redimitum viderit? atque hanc eam formam eſſe, quæ, cum perpetuo eadem ſit, diverſas tamen facies induat, & pertinaciter hactenus conjecturas Aſtronomorum fruſtretur. At neque hoc minus novum atque inopinabile omnium auribus accidiſſet, Planetam aliquem non antea viſum in cælo repertum eſſe, niſi novitatis gratiam ſtellæ Mediceæ abſtuliſſent. Verum hic noſter Saturni accola, quo diutius latuit, majorique molimine ad terram deducendus fuit, eo magis deprehenſo gaudendum eſt: quodque unus hactenus deſideratus, cumulum nunc tandem errantium ſtellarum explet, numerumque earum duodenarium; quo majorem poſthac repertum non iri, prope eſt ut confirmare audeam. Certè jam majoribus illis ac primariis, inter quos Tellus hæc reponenda eſt, æquales multitudine minores exiſtunt, & utrique illo, quem perfectum dicimus, numero continentur, ut conſilio ſummi opificis modus hic

præ-

Digitized by Google

præfinitus videri poſſit. Cæterum multiplicem contemplandi materiam, Philoſophorum ingeniis circa hæc cæleſtia corpora exorituram, quibus veluti nova acceſſione mundum auximus, non perſequar. Unum hoc inanimadverſum eos præterire nolim; nempe quam non leve argumentum ad aſtruendum pulcherrimum illum mundi univerſi ordinem, qui à Copernico nomen habet, Saturnius hic mundus adferat: ſi enim gravatè olim iſti ſyſtemati aſſentientibus, ſcrupulum demere potuerunt quaternæ circa Jovem repertæ Lunæ; manifeſtius utique nunc eos convincet unica illa circa Saturnum oberrans, atque ob hoc ipſum quod unica eſt, noſtratis Lunæ ſimilitudinem magis exprimens: ut omittam nunc aliam quoque Saturnii globi cum hoc noſtro cognationem, quam in ſimili axium utriuſque inclinatione invenient Aſtronomiæ periti. Quæ ſanè cum mecum reputo, fieri non poſſe videtur, ut veritatem hiſce in rebus tam feliciter repertam, tamque manifeſtis indiciis fultam, ulla ætas obliterare valeat, quamdiu modo obſervationum Galilæi aut noſtrarum aliqua memoria ſupererit. Haſce igitur ut ab oblivione vindicarem, utque deficientibus forſan olim organis quibus eaſdem repetere liceat, eſſet tamen unde aliquando extitiſſe probari poſſet, hac qualicunque ſcriptione publicandas cenſui, omnibuſque impertiendas. Quod autem Celſitudini Tuæ commentarium hunc inſcripſerim, feci id non una ratione. Namque in

primis celebritatem claritatemque ei non exiguam ab Illuſtriſſimo nomine tuo acquiri poſſe credidi; cujus cum per orbem univerſum, quà modo aliquis virtuti aut humanitati locus eſt, latè fama pervaſerit, librum hunc tibi nuncupare, hoc eſt velut in edito cunctiſque conſpicuo loco eum deponere. Deinde nec ignorabam quantum momenti acceſſurum eſſet invento illi noſtro, quo perplexa Saturni myſteria exponere conatus ſum, ſi exactiſſimo tuo judicio illud probari contingeret: quod utinam non fruſtra ſperaverim. Sed ante omnia occaſionem aliquam me inveniſſe gaviſus ſum, neque omittendam duxi, qua palam commemorarem quantum tibi, Princeps Celſiſſime, artes diſciplinæque optimæ, & in his Mathematicæ præſertim debeant, quod contra invaleſcentem indies barbariem patronum iis ac defenſorem te præſtas, quodque familiariter eas colendo, ac velut in contubernium tuum admittendo, plurimum dignitatis ipſis concilias: quod denique præſtantiſſimorum ex omni antiquitate Autorum ſcriptis in vitam revocatis eaſdem promoves ac locupletas. Nempe ad hæc facienda, & illuſtria majorum tuorum exempla & innata virtus & egregia animi tui propenſio te impellunt. nos autem ad quos optimæ hujus tuæ voluntatis curæque utilitas pervenit, grato animo illa agnoſcere & prædicare æquum eſt. Hagæ Comitis. 5. Julii. Anno 1659.

NICO.

Digitized by Google

# NICOLAUS HEINSIUS, D. F.

## AD AUCTOREM SYSTEMATIS.

*LAudibus Hugeni pars addite magna paternis,*
*Quem totum Vranie vindicat una ſibi.*
*In cunis placiti reptare per avia cæli,*
*Aſtra tibi puero volvere ludus erat:*
*Aſtra minus patriïs non trita penatibus olim;*
*Cognita natali non minus aſtra ſolo.*
*Jamque eadem populis mirantibus aſtra recludis,*
*Perſpicua ingenii lumine facta tui.*
*Qualis ſidereo radiatus in æthere Titan*
*Oppoſitam nocti ſpargit ubique facem.*
*Ardue ſtellantis ſalve metator Olympi,*
*Qui ſuperâ nobis das regione frui:*
*Per quem, diſcuſſâ dubiæ caligine mentis,*
*Inſerimur liquido cominus ora polo.*
*Devocat in terras, magico ſine carmine, Lunam*
*Æqua Syracoſio cui manus arte ſeni.*
*Ecce Jovis genitor tenebroſo carcere per te*
*Et fugit, & lætam rurſus oberrat humum.*
*Macte auſis ſtudioque; Deos qui vindice chartâ*
*Aſſeris: inventi qui facis aſtra tui.*
*Nunc ſua Saturno cum vincula demſeris ipſi;*
*Sæcla tuum terris aurea munus eunt.*



Digitized by Google

# IN IDEM SATURNI SYSTEMA.

*Omnia qui magni diſpexit ſidera Mundi,*
*Viderat hæc oculo debiliore Conon.*
*Attigit illa Conon miris adjutus ab alis,*
*Attigit, & viſu nobiliore, meus.*
*Perque vias Lunæ, per, qua Cyllenius errat,*
*Volvitur & Veneri Martia flamma comes;*
*Quique nitet famulos inter tot Jupiter ignes;*
*Lumina falcigeri miſit ad aſtra Dei:*
*Et didicit vario quare mutabilis ore,*
*Ludat in obſcurâ mobilitate Senex:*
*Quod frontem diadema premat, quo, Circulus illi*
*Aureus, infauſtum cingat honore caput:*
*Quæ noctes ibi Luna regat, quæque, æmula noſtræ,*
*Expleat amiſſum Cynthia luce diem.*
*Nec ſatis hæc vidiſſe ſibi miracula, teſtes*
*Convocat, & viſis quærit ubique novis.*
*Noluit hæc noſtros fugerent arcana nepotes,*
*Ignaros cœli nec ſinit eſſe ſui.*
*Ampla ſatis Juveni eſt, ut debita gloria, merces,*
*Vocibus innumeris quam ſua fama ſonet;*
*Gloria ſideribus quam convenit eſſe coævam,*
*Et tantum Cœlo commoriente mori.*

CONST. HUGENIUS. C. F.

Digitized by Google

# CHRISTIANI HUGENII

## ZULICHEMII, CONST. F.

# SYSTEMA SATURNIUM.

CUM ad cæleſtium contemplationem tubos opticos, nobiliſſimum Belgicæ noſtræ inventum, Galileus admoviſſet, celeberrimaque illa Planetarum phænomena mortalibus primus aperuiſſet; in his, ea quæ de Saturni ſtella prodidit, vel præcipuè admiratione digna fuiſſe videntur. Nam cætera quidem, etſi ſuſpicienda meritò ac magni facienda, non tamen ejuſmodi erant, ut, quibus de cauſis talia cernerentur, enixè quærendum eſſet. Saturni vero mutabiles figuræ novum quoddam & reconditum naturæ artificium præferebant, cujus certè rationem neque Galileo ipſi, neque tanto poſt tempore Aſtronomorum cuiquam (pace eorum dixerim) divinare contigit. Hunc primò non ſimplici orbe lucentem, ſed veluti tergeminum conſpexerat, binis ſtellis minoribus mediæ majori proximè utrinque adjectis. Eâque formâ triennio fere abſque ulla mutatione perſeverante, certò ſibi perſuaſerat, quales Jovi quatuor, tales duos comites Saturno obtigiſſe, nullo tamen motu præditos, eóque ſimili poſitu ſemper lateribus hæſuros. Verùm ſententiam mutare coactus eſt, ſolitario Saturno prodeunte, ac priore ſatellitio penitus deſtituto. Quod cum admirabundus vidiſſet & cauſam rei conjectura aſſequi tentaret, de reditus tempore, quo prior illa phaſis reſtitui deberet, nonnulla vaticinatus eſt. Sed neque hæc ita tunc ſucceſſiſſe quemadmodum ſperaverat deprehenſum eſt, nec gemina modò aſpectus diverſitate Saturnum contentum eſſe. Etenim aliæ deinceps mirabiles ac prodigioſæ formæ appa-

ruerunt, quas primùm à Joſepho Blancano & Franciſco Fontana deſcriptas novimus; adeo quidem inſolita ſpecie, ut multis oculorum ludibria cenſerentur, imagineſque vitris potius quam cælo hærentes: donec pluribus eadem videntibus, haud vano indicio proditas fuiſſe conſtitit.

Igitur ipſe quoque ad hæc cæli miracula conſpicienda magno deſiderio actus; cum non niſi vulgaria ſuppeterent perſpicilla, quinum aut ſenum pedum longitudine; artem eam qua vitra in hoſce uſus figurantur quanta potui cum cura diligentiaque excolere aggreſſus ſum, nec piguit ipſummet operi manus admoviſſe; quoad multis ſuperatis difficultatibus (nam plures in receſſu hæc ars habet quam prima fronte præferre videatur) ea denique vitra mihi effeci, per quæ ad hæc ſcribenda præbitum eſt argumentum. Continuo enim ad Saturnum teleſcopia dirigens, aliam ibi rerum faciem reperi, quàm pleriſque antehac fuerat credita. Nam quæ vicinæ illi hærebant appendices, eas non ſane geminos planetas, ſed quidvis potius aliud eſſe, diverſum vero ab his unumque numero planetam, majori intervallo à Saturno remotum, diebus ſexdecim circa eum ambire apparuit; & hunc quidem omnibus antehac ſæculis ignoratum. De qua nova noſtra obſervatione tribus abhinc annis Aſtronomos certiores feci, prudenti conſilio obſecutus viri Illuſtris, ingenioque juxta ac virtute conſpicui, Joh. Capelani. Huic enim, uti & Gaſſendo aliiſque, cum Lutetiæ Pariſiorum agens, de Saturni comite à me viſo narraſſem, multas ob cauſas cenſuit, non reticendum tam gratum omnibus futurum nuncium, quoad illud quod meditabar integrum Saturni Syſtema perſcripſiſſem. Itaque anno 1656 die 5 Martii, de Saturni Luna (ita enim novam ſtellam nec immerito appellavimus) obſervationem emiſi *, atque unà hypotheſin quæ cauſam reliquorum Saturni phænomenôn contineret; ſed hanc confuſo elementorum quibus ſcribebatur ordine, quo tantùm, non ignoraſſe nos eam illo jam tempore, teſtatum eſſet, aliique etiam ad vulganda quæ commenti eſſent hoc pacto invitarentur, neque ſibi præreptam quererentur inventionis gloriam. Deinceps ve-

* V. de ſupra pag. 523.

vero rogatu ejuſdem Viri eximii, ſolvi quoque hunc literarium gryphum, totamque hypotheſin ſummatim illi expoſui: unde jam ad plures forſitan noſtra de Saturni phaſibus ſententia manaverit. Sed pleniorem utique tractationem poſtulat mira & inſolens circa hunc planetam naturæ fabrica, neque expectare debemus ut vel à nobis relatis, vel ad explicanda phænomena adſumtis, fidem omnes habeant, niſi & hæc rationum momentis, & illa obſervationum teſtimonio adſtructa viderint. Quamobrem horum utrumque nunc præſtare nobis propoſitum eſt. Ac primò quæ ad comitis planetæ motum periodumque ſpectant accuratè, quantum fieri poterit, ex obſervatis definiemus, motuſque ejus tabulas condemus. Deinde ipſius Saturni phaſes ſingulas ſuis cauſis aſſignabimus, ita ut futuras quoque inde prænoſcere in promptu ſit.

Sed antequam obſervationes exhibeamus, de teleſcopiis noſtris quibus cælo eas deduximus, pauca referre expediet, ut ſciant hinc, qui comitem Saturni, mirabileſque Planetæ ipſius figuras intueri cupiunt, qualibus ad hoc tubis vitriſque indigeant; útque ſuos ſi quos habent, poſſint cum noſtris contendere. Primus quem adhibuimus duodenos pedes non excedebat, duobus convexis vitris inſtructus, quorum id quod oculo vicinum erat, radios parallelos cogebat ad trium paulo minus pollicum, ſive unciarum pedis Rhenolandici diſtantiam. Eo planetam novum & deteximus primùm, & per aliquot menſes obſervavimus, nec non formam eam Saturni, quæ à nemine adhuc percepta fuerat, quámque poſtea deſcribemus, licet non prorſus erroris expertem. *Teleſcopiorum noſtrorum deſcriptio.* Inde verò duplicata priori longitudine, ſimul duplo propiores ſideribus facti ſumus, multóque meliùs faciliúſque phænomena omnia adnotavimus. Et hi quidem tubi 23 pedum, è ferri bractea conſtructi ſunt, habentque ab altera parte vitrum inſertum, cujus latitudo ad quatuor pollices, ſed in quo non major pateat circulus quam diametro duorum pollicum cum triente. Ab altera parte, quæ nimirum oculo admovetur, bina ſunt vitra minora, $1\frac{1}{2}$ pollicem diametro

æ-

Digitized by Google

æquantia, juncta invicem, quæque hoc pacto æquipollent convexo colligenti radios parallelos ad intervallum unciarum 3, aut paulo etiam anguſtius. Ex quo ſanè majoris vitri excellentia æſtimanda eſt, tam breve convexum perferre valentis: quoniam quanto minori de ſphæra id fuerit, tanto res viſæ magis ampliantur. Illud enim in Dioptricis noſtris demonſtratum invenietur, ſpeciei per tubum viſæ ad eam quæ nudo oculo percipitur, hanc ſecundum diametrum eſſe rationem, quæ diſtantiæ foci in exteriori vitro ad illam, quæ in interiori ſive oculari vitro eſt, foci diſtantiam. Centuplam itaque fere rationem hanc in perſpicillis noſtris eſſe conſtat, cum Galileana non ultra trigecuplam proceſſerint. Nam quantitatem incrementi eodem modo nos atque ille æſtimamus; nempe ut tanto major res quæque per tubos quam nudo viſu conſpici dicatur, quanto majori angulo ad oculum extrema ejus deferuntur, ſive quanto latior ejus imago in fundo oculi depingitur.

*Quantum tis res viſa amplientur. Augmentum teleſcopio perceptum quomodo æſtimetur.*

Eſt autem & alia æſtimandi augmenti ratio, ſed parum ex vero, cùm abſque ulla anguli conſideratione apparentem perſpicillo alicujus rei magnitudinem determinamus; velut cum Jovis orbem circello duorum aut trium digitorum latitudine æqualem nobis cerni putamus. At enim cum idem circulus, trium puta digitorum diametro, major minorve neceſſario appareat, pro diverſa ſui ab oculo diſtantia, nonne etiam adjiciendum ſit, quanto ex intervallo conſpectus circulus diſco Jovis æqualis cernatur? Profectò niſi hoc addatur, nihil certi ea comparatione deſignari videtur. Et tamen ratio ſubeſt cur magis una quæpiam quam alia magnitudo imagini viſæ tribuatur, & quidem à pluribus ſæpe ſpectatoribus eadem. Verùm de his aliàs fortaſſe. In præſentia illud oſtendiſſe ſuffecerit, fallacem omnino eſſe hoc modo initam æſtimationem. Idque primùm inde liquet, quod Lunâ aut ſigno aliquo cæleſti, velut Orione, prope horizontem conſpecto, idem longè majus viſus judicet, quam ubi altè jam ac ſupra verticem penè adſtiterit, cum tamen hîc nihilo minori angulo illud comprehendi certum ſit. In his autem quæ teleſcopio in-

*Alia ejuſdem falſa æſtimatio.*

Digitized by Google

intuemur major adhuc error contingit. nam cum, exempli gratia, vel triplo latior ſecundum diametrum appareat Jupiter, oculo altero per teleſcopium noſtrum ſpectatus, quam Luna oculo altero vacuo, atque adeo utrâque hac ſpecie, in unum convenire juſsâ, latè à Jove Luna contegatur; nihilominus cum ſeorſim Jupiter inſpicitur, trium circiter digitorum latitudinem pleriſque ſpectatoribus æquare tantummodo exiſtimatur. quanquam aliquos repererim qui diſco Lunari æqualem faciebant, atque ita tertiam partem ſaltem tribuebant ejus quæ reipſa apparet amplitudinis. Quamobrem de multiplicatione teleſcopii malè hoc modo inquiri certum eſt. Fiet autem rectè Galilei methodo, quam in Sidereo nuntio tradidit; vel, quia hæc in prægrandibus teleſcopiis difficultatem habet, inquirendo foci diſtantias in ſingulis vitris, eaſque inter ſe comparando. Qua ratione diximus centuplum fere augmentum tuborum noſtrorum reperiri.

*Quænam circa planetas cæteros & fixas obſervata.*

Cæterùm libenter intellecturos credo qui hæc legent, qualia etiam eorum ope de reliquis præter Saturnum planetis fixiſque ſtellis obſervaverimus: de quibus breviter ergo hæc habeant. In primis ſæpe illud quæſivimus, num aliqui etiam apud Venerem, Martem aut Mercurium comites circumferrentur, ubi tamen nullos unquam reperimus. Apud Jovem autem quatuor neque amplius. Qui quidem ſemper ac facilè teleſcopio noſtro patent, niſi cum diſco ſuo aut umbra Jupiter aliquem abſcondit. Inde verò quamprimum rurſus emergere incipiunt fiunt conſpicui, imò priuſquam toti exierint, ut non ſemel me vidiſſe memini. Porrò quæ in Jove zonæ ſeu faſciæ quibuſdam animadverſæ ſunt, non ſemper eâdem formâ præditæ; has ego & qui mecum obſervarunt perſpicuè ſæpe animadvertimus reliquo Jovis corpore magis lucidas, cum tamen alii obſcuriores aſſerant; quibus forſitan interjectum ſpatium inter binas zonas lucidiores pro una obſcuriore fuerit. Atque anno quidem 1656, multo majori intervallo, quam ſequentibus tribus, illas à ſe mutuo diſtare comperimus, ſicut in adjunctis delineationibus videre eſt. Qua ex inſtabilitate non malè forſan colligemus, ad inſtar nu-

*In Jovis diſco zonæ candicantes.*

TAB. XLVII. fig. 1, 2.

nubium noſtrarum, vapores quoſdam vicinum Jovi ætherem inſidere, qui nunc his nunc illis climatis crebri magis conſertique exoriantur.

*In Marte zona obſcura.*
TAB. XLVII. fig. 3.

In Marte quoque cingulum ejuſmodi unicum anno 1656 deprehendi, latum admodum, mediámque diſci partem offuſcans, quemadmodum figura adjecta demonſtrat. Inſuper diſcum planetæ hujus parte aliqua deficientem vidi aliquoties, & in Venere phaſes omnes quales Lunæ. Verùm hæc minoribus etiam teleſcopiis alii notarunt.

*Fixarum diametri nulla latitudine.*

Fixarum autem diametros etiam maximè ſplendidarum nulla unquam latitudine cernere potui, ſed tantum minimi puncti inſtar, quoties vitris uſus ſum fuligine leviter infectis ad auferendos radios. At ex Hevelii conſilio, quod in egregio ejus extat opere Selenographico, exterius vitrum contegens, ita ut exiguum tantum foramen relinquatur, aliquam magnitudinem præ ſe ferre illas vidi; quam proinde non ſtellarum propriam eſſe, ſed ex aliqua viſus fallacia naſci arbitror. Nam noſtra quidem illa methodus, trans fumum, quo lens proxima oculo tincta eſt, ſtellas inſpiciendi, certa eſt omnique erroris ſuſpicione carens; atque ita planetas quoque nimia luce radiantes, ſolemque ipſum intueri ſolemus. Foramine autem exiguo majorem lucis partem excludendo, non tolli penitus circumfuſos ſideribus radios, ſed in orbem minorem ſatiſque perfectè circinatum eos cogi opinor, qui imprudentibus pro ipſius ſtellæ corpore imponat.

*Phænomenon in Orione novum.*

Unum verò circa fixas phænomenon relatu dignum occurrit, à nemine hucuſque, quod ſciam, animadverſum, nec quidem niſi grandibus hiſce teleſcopiis rectè obſervandum. In Orionis enſe tres ſtellæ ab Aſtronomis reponuntur inter ſe proximæ. Harum mediam Anno 1656 fortè per tubum inſpicienti mihi, pro ſtella una duodecim (quod quidem minimè novum) ſeſe obtulerunt; eo poſitu quem ſubjecta figura expreſſimus.

TAB. XLVII. fig. 4.

Ex his autem tres illæ pene inter ſe contiguæ, cumque his aliæ quatuor, velut trans nebulam lucebant, ita ut ſpatium



Digitized by Google

tium circa ipſas, qua forma hîcconſpicitur, multo illuſtrius appareret reliquo omni cælo; quod cum apprime ſerenum eſſet ac cerneretur nigerrimum, velut hiatu quodam interruptum videbatur, per quem in plagam magis lucidam eſſet proſpectus. Idem verò in hanc uſque diem nihil immutata facie ſæpiùs atque eodem loco conſpexi; adeo ut perpetuam illic ſedem habere credibile ſit hoc quidquid eſt portenti; cui certè ſimile aliud nuſquam apud reliquas fixas potui animadvertere. Nam cæteræ nebuloſæ olim exiſtimatæ, atque ipſa via lactea, perſpicillo inſpectæ, nullas nebulas habere comperiuntur, neque aliud eſſe quam plurium ſtellarum congeries & frequentia.

In Lunæ facie autem quàm multa, diligentiſſimis quibusque obſervatoribus prætcrita, tubis noſtris detegantur, non referam; quandoquidem ſchemate ad hoc deſcripto opus eſſet, eoque ampliſſimo. Quem laborem hactenus non ſuſcepimus, credimuſque exiturum in immenſum, ſi montium omnium eminentias & anfractus, qua multitudine nobis videntur, depingere conemur. Itaque ad Saturni obſervationes pergo, de quibus ſciendum eſt, priores omnes, uſque ad eam quam 19 Febr. Anno 1656 annotavimus, tubo 12 pedum peractas eſſe, reliquas pedum 23. Uterque autem everſo ſitu viſibile referebant, ideoque ſchemata omnia, non ut primùm deſcripta fuerant, hîc expreſſimus, ſed ſupera inferis, dextra ſiniſtris permutavimus, ut vera pateret diſpoſitio.

Die igitur, ſecundum Calendarium Gregorianum, 25 Martii, Anno 1655, circa horam 8 veſpertinam, Saturnum conſpexi cum brachiis utrinque ſecundum rectam lineam extentis; tribuſque fere ſcrupulis ab eo diſtantem occaſum verſus ſtellulam quandam exiguam *a*, ſic ſitam, ut ſi per brachium utrumque recta duceretur, ea in illam incurreret, aut certè pauxillo tantum inferior tranſiret. Alteraque item verſus orientem ſtellula *b* aderat, paulo longius à Saturno remota, & brachiorum lineâ multo inferior. Et hac quidem prima vice ſuſpicatus ſum ſtellam *a* Saturnum comitari, quo-

*Circa Saturnum obſervationes.* TAB. XLVII. fig. 5.

 niam

niam alias quoque vicinam illi animadverteram, ſimilique fere poſitu.

TAB. XLVII. fig. 6. Porrò brachia Saturni recta quidem utrinque extenſa cernebantur, ſed verſus extremas cuſpides craſſiora paulo quam qua parte Saturni diſco cohærebant, qualia ſequens ſchema exhibet.

Eâque formâ uſque ad occaſum Heliacum Saturnus perſtitit. Cæterum cum poſt phaſin rotundam Anni 1656 brachia denuo recepiſſet, eadem quidem illa forma reverſa eſt duodecempedali tubo ſpectanda: ſed tunc majori tubo 23 pedum adhibito alteram hanc figuram veriorem eſſe patuit; unde antea quoque talem extitiſſe credibile fiebat, quæ tamen minori teleſcopio perfectè conſpici nequiiſſet. At lineam illam obſcuram, brachia utraque conjungentem, ac tota tamen infra ſe relinquentem, etiam 12 pedum teleſcopio notavimus.

TAB. XLIX. fig. 6.

TAB. XLVII. fig. 7. Die ſequenti, nempe 26 Martii ſtella *a* eodem modo eademque qua prius diſtantia juxta Saturnum collocata erat, *b* verò duplo quam ante remotior. Unde, quum diſtantia inter ſe ſtellularum *a* & *b* major eſſet effecta, ſequebatur vel utramque vel alteram ſaltem erraticam eſſe. Et ſtellam quidem *a* neceſſario talem judicavi, quoniam Saturnum eo tempore retrogradum eſſe noveram; itaque oportebat cum Saturno illam in eandem plagam delatam eſſe, quum alioqui propinquior multo fieri debuiſſet. Altera vero *b*, quominus fixa cenſeretur nihil obſtabat, imo prorſus ita exiſtimari conſentaneum erat, cum una die tantum ab illa Saturnus receſſiſſet, quantum motus ejus poſtulabat. Neque verò aliter ſe rem habuiſſe ſequentes obſervationes oſtendunt.

TAB. XLVIII. fig. 1. Martii 27. ſtella *a* Saturno propior facta erat: *b* verò adhuc longius receſſerat.

Inde nubili dies interceſſerunt uſque ad 3 Apr. quo die fixam *b* non amplius annotavi, ſed ſtellula *a* migraverat ad Saturni latus Orientale, rurſuſque fere 3 ſcrupulis diſtabat. *fig.* 2.

Quinque diebus ſequentibus, rurſus ut ante impeditæ obſervationes.

9 Apr.

Digitized by Google

9 Apr. denuo ad occidentem ſitus erat comes *a* ſicut 27 Martii, fixaque altera *c* à parte orientali Saturno admodum propinqua animadvertebatur, uno circiter ſcrup. diſtans, lineaque brachiorum, uti præcedens, inferior. TAB. XLVIII. fig. 3.

10 Apr. Saturnus à fixa *c* longius abſceſſerat, & comes à Saturno. *fig.* 4.

Diebus duobus ſequentibus aucta fuit continuè diſtantia ſtellæ *c*, comitis *a* eadem fere manſit. Nempe

11 Apr. hic poſitus fuit. *fig.* 5.

12 Apr. talis. *fig.* 6.

13 Apr. comes videri nequiit, quoniam & Saturno propior factus erat, & Luna adventabat. Fixa *c* ulterius ſemper recedebat, ſed lentiore paſſu. *fig.* 7.

14 & 15 Apr. comes non apparuit ob viciniam Saturni.

16. Cælum nubilum.

17. Comes ad ortum ſitus erat, diſtans fere 3 ſcrup. ſtella vero *c* longius abierat, ſemper tamen oculis notata; Ac poſtea quidem eadem ad Saturnum reverſa eſt, ut ſequentes obſervationes docebunt. *fig.* 8.

18. Apr. comes ſitum mutaſſe non videbatur.

19. Apr. paulo propius ad Saturnum acceſſerat. *fig.* 9.

20. Apr. magis appropinquaverat. *fig.* 10.

21. Apr. Adhuc magis; cernebaturque anſarum lineâ paulo ſuperior. *fig.* 11.

29 Apr. Occidentalior Saturno comes factus erat, ac tantundem diſtabat quantum 21. Apr. *fig.* 12.

Ultima Apr. Comes prope Saturnum delituit.

3 Maji, in quem diem inſtitio Saturni incidit, comes in maxima ab eo diſtantia videbatur, orientem verſus. *fig.* 13.

Diebus inſequentibus uſque ad 27 Maii, ejuſmodi poſitus fuit qualem exhibent ſchemata ſubjecta.

6. Maji. *fig.* 14.

7. Maji. *fig.* 15.

10. Maji. *fig.* 16.

11. Maji. *fig* 17.

12. Maji. *fig.* 18.



Digitized by Google

14. Maji. *fig.* 19.

15. Maji. ægre conſpectus comes propter inſtans plenilunium. *fig.* 20.

17. Maji, Comes non apparuit.

18. Maji. *fig.* 21.

19. Maji. *fig.* 22.

20. Maji. *fig.* 23.

27. Maji, Comes occidentem verſus in maxima à Saturno diſtantia reperiebatur. Saturnus autem jam rurſus ad ſtellam *c* ſuperius notatam appropinquare cœperat, remotus circiter 10 ſcrup. Ita verò nunc poſita hæc erat, ut linea brachiorum Saturni continuata ſubter eam ferretur, cum die 10 Apr. ſupra tranſiiſſet. Sed & Saturni ipſius ſemita, uti ex ſequenti obſervatione liquebit, ſtellâ *c* inferior hac vice fuit, quæ priori illius applicatione ſuperior contigerat. *fig.* 24.

Ultima Maji, Saturnus ſtellam *c* jam prætererierat; comes ad occaſum ſitus erat, ſed aliquanto propior quam die 27. *fig.* 25.

13 Jun. Ultima fuit ante occaſum Heliacum obſervatio, comes in maxima diſtantia cernebatur, Saturno occidentalior. *fig.* 26.

*Saturnus brachiorum expers inventus.* Poſtquam ex radiis Solaribus Saturnus emerſiſſet Anno 1656. Jan. 16, hora 12, primùm à me obſervatus eſt, cum ad hoc uſque tempus peregre abfuiſſem. Inveni autem brachiis ſuis ſpoliatum penitus, & comitem ad orientem ſitum, in maxima fere diſtantia. *fig.* 27.

TAB. LI. fig. 4. Rotundum autem Saturnum, ſub finem Novembris, aliqui jam obſervaverant; eâque formâ perſtitit uſque dum rurſum radios Solis ſubiret.

TAB. XLVIII. fig. 28. 19 Febr. tubo 23 pedum primùm uſus ſum, comitemque Saturno propinquum reperi, ubi priori teleſcopio ægre potuiſſet animadverti.

16 Martii, circa octavam adhuc propiorem Saturno comitem vidi, ad orientem ſpectantem, uti obſervatione ſuperiori. *fig.* 29.

30 Martii, hora 8, pari propinquitate, ſed ad alteram partem comes ſtabat. *fig.* 30.

18 Apr.

Digitized by Google

18 Apr. ad ortum ſitus erat comes in maxima diſtantia. *fig.* 31.

17 Jun. hora 9½ ultimò ea vice obſervatus fuit Saturnus, ſatellite verſus occidentem adſtante, & mediocriter remoto. *fig.* 32.

Hiſce autem obſervationibus omnibus quandiu Saturnus rotundus apparuit, tranſverſa illa linea, cæteris diſci partibus paulo obſcurior, ex æquo medium ejus diſcum ſecabat, eratque ad ſatellitem directa. Et hac quidem obſervatione 17 Junii habita, primùm animadverti motum Saturni, eum ſcilicet quo propter telluris vertiginem cum cælo pariter quotidie circumferri putatur, ſecundum eandem illam incedere lineam.

Eodem Anno 1656, Octobris die 13, manè hora 6, rurſus Saturnus videri cœpit, cui jam brachia erant renata; ſerius quidem quàm in obſervatione edita prædixeram, verùm haud aliâ formâ, quæ nimirum eadem planè fuit atque anno præcedenti: licet melius nunc cujuſmodi eſſet diſcerneretur, ob adhibitos tubos præſtantiores. *Brachia Saturno renata.* TAB. LI. fig. 5.

Faſcia autem illa ſeu zona obſcurior, paulò inferior brachiorum linea nunc apparebat, cum anno 1655 ſuperior fuiſſet. Eratque Saturni motus, quo cum cælo corripi videtur, ſecundum hujus zonæ ductum, ac proinde ſecundum rectam quoque lineam per utraque brachia protenſam, ac ſemper poſtea quotquot obſervationibus idem inquirere libuit, eodem modo rem ſeſe habere comperi. Comes conſpici hac vice nequiit, forte an ob ingruentem Solis exortum, aëremque craſſiorem prope horizontem.

Die autem 19 Oct. hora 6 mat. apparuit comes Saturno occidentalior, vix mediocri diſtantia abſiſtens, quæ diebus ſequentibus duobus aucta eſt continuè. TAB. XLVIII. fig. 33.

21 Oct. hora eâdem, erat comes in diſtantia maxima occidentali. *fig.* 34.

25 Oct. hora 6. mat. non apparuit comes.

9 Nov. hora 5½ mat. propinquus Saturno comes exiſtebat, occidentalis rurſum, ac lineâ anſarum paulo ſuperior. *fig.* 35.

26 Nov. hora 6½ mat. comes latuit. Brachia verò paulo

la-

latiora evaſerant, & quà Saturno junguntur, minus intenſa luce quàm verſus extremas cuſpides lucebant, & hac fere ſpecie ad occaſum uſque Heliacum Saturnus permanſit.

27 Nov. hora 6 mat. ſatelles ægre conſpiciebatur, ad orientem ſitus, & brachiorum linea ſuperior. *fig*. 36.

16 Dec. 6 mat. videbatur ſatelles in maxima diſtantia orientali. *fig*. 37.

Anno 1657, 5 Jan. hora 12½ comes latebat.

18 Jan. hora 12, erat in mediocri diſtantia, orientem ſpectans. *fig*. 38.

A Saturno autem polum verſus dimidio circiter gradu diſtabat fixa 3 magnitudinis, quæ eſt in ventre Leonis, longitudine reſpondens Virginis gr. 4. 5′. cum latit. borea gr. 2. 49′.

22 Martii hor. 7½ veſp. comes in maxima diſtantia orientali, & anſarum linea paulo ſuperior; linea obſcura non ſatis erat conſpicua.

Scripſit mihi Hevelius ſe quoque pridie hujus diei comitem Saturni obſervaſſe ad orientem ſitum in maxima diſtantia, quod ſatis bene cum noſtra hac obſervatione convenit.

29 Martii hora 7½ comes erat in mediocri diſtantia occidentem verſus, & in eadem cum brachiis recta. *fig*. 39.

30 Martii, comes in maxima diſtantia occidentali. *fig*. 40.

Qua veſpera Hevelius quoque ad eandem partem ſibi conſpectum aſſerit, ſed difficulter, unde fortaſſe de diſtantia minus recte judicaverit, nam 1½ ſcrupulo tantum abfuiſſe à Saturno ſcribit.

18 Maji, comitem mecum obſervavit Bullialdus occidentaliorem Saturno, & in mediocri diſtantia. *fig*. 41.

19 Maji, proximus Saturno adſtabat comes occidentem verſus, vix anſarum linea ſuperior. *fig*. 42.

*Brachia Saturni in anſas mutari cœpta.* TAB. XLIX. fig. 7.

Anno eodem 1657. 17 Dec. hora 5½ manè, quo die primùm poſt ortum Heliacum Saturnum obſervavi, comes mediocriter diſtabat orientem verſus, eratque anſarum lineâ ſuperior. *fig* 43. Brachia verò prope Saturni diſcum adaperta ac bifida inveniebam, qualia ante non videram, lineâ quoque obſcurâ verſus inferiora ulterius promotâ.

Et

Digitized by Google

Et hac quidem figurâ permanſit, donec rurſus radiis ſolis occultaretur.

18 Dec. comes erat in maxima diſtantia, orientem ſpectans, & in ipſa anſarum linea. *Tab.* XLVIII. *fig.* 44.

22 Dec. h. 6½ mat. comes non apparuit.

27 Dec. h. 6½ mat. comes occidentem verſus in maxima fere diſtantia ſitus erat, & anſarum linea paulo altior. *fig.* 45.

Anno 1658. 24 Febr. h. 10, comes videri nequiit.

1 Mart. h. 10, idem comitis ſitus erat qui 27 Dec.

11 Martii, h. 10, comes difficile conſpiciebatur, quippe propinquus admodum Saturno. Orientem ſpectabat, eratque anſarum linea aliquanto inferior, & quaſi ſub Saturno tranſiturus. *fig.* 46.

16 Mart. h. 10 quantum poterat à Saturno comes receſſerat occidentem verſus, vixque erat anſarum linea ſuperior. *fig.* 47.

23 Martii, in contrariam partem pene tantundem diſtabat, lineâ anſarum rurſus paulo ſuperior. *fig.* 48.

3 Apr. paulo remotior erat à Saturno comes, quam 11 Martii, & occiduum latus tenebat, lineaque anſarum ſublimior cernebatur. *fig.* 49.

Anno eodem 1658. 10 Nov. hor. 6½ mat. poſtquam Heliace ortus eſſet Saturnus, jam latius aperiri anſæ videbantur, quanquam ob humilitatem ſideris, ſurgenteſque vapores, & auroræ claritatem non admodum diſtinctè poterant diſcerni: comes occidentem verſus adſtabat, remotus ut cum maximè, anſarum linea nonnihil tamen ſuperior. *fig.* 50. *Anſæ Saturni amplius patefactæ.*

16 Jan. anno 1659. hora 5½ mane, comes ad occidentem denuo ſitus erat, non longe à Saturno diſtans, linea autem anſarum integra fere Saturni diametro ſuperior. *fig.* 51.

12 Febr. 6 mat. tantundem infra lineam anſarum deſcenderat, occidentalis rurſus. *fig.* 52.

Forma verò anſarum diſtinctè hac vice percipi potuit, quam figura hæc exhibet; atque ea ad ultimam uſque harum obſervationum talis extitit. TAB. LI. fig. 6.

24 Febr. hora dimidia poſt mediam noctem, comes erat in mediocri diſtantia, orientem verſus, rectâ anſarum pau-



Digitized by Google

lo inferior. *Tab.* XLVIII. *fig.* 53.

25 Febr. horâ eadem orientalis denuo comes cernebatur, una Saturni diametro ab ipſo remotus. *fig.* 54.

*Comes infra Saturnum tranſire viſus.* 14 Martii, hora 12, comes recta fere infra Saturnum obſervatus, unius circiter diametri longitudine diſtans; paulum tamen verſus occidentem declinabat. *fig.* 55.

16 Martii, hora 11, ad latus occiduum poſitus erat, fere in maxima diſtantia, inferiorque paulo eâ quæ per anſas ducitur. *fig.* 56.

*Idem ſupra Saturnum tranſiens.* 21 Martii, hora 11, rurſus ad eandem partem conſiſtebat comes, motu latitudinis integra Saturni diametro ſupra anſarum lineam elatus, longitudinis motu tantum dimidia diametro diſtans. *fig.* 57.

22 Martii, horæ quadrante ante undecimam; rurſus integra diametro ſuperior erat rectâ anſarum, ac fere ſupra orientalis anſæ extremam cuſpidem collocatus. *fig.* 58.

26 Martii, hora 10½ comes in maxima diſtantia videbatur; quam accuratè hac vice dimenſus, inveni inter comitem centrumque Saturni intervallum trium ſcrupulorum primorum, 16 ſecundorum. *fig.* 59.

Hucuſque obſervationes, & plures quidem quam neceſſe fuerat, recenſui; rem gratam tamen iis me facturum ratus, qui triennio iſto ſimul forſitan mecum novo Planetæ obſervando vacaverint; quibus procul dubio jucundum erit conſenſum mutuum ſuarum cum noſtris obſervationibus deprehendere. Jam enim & Hevelius Gedani eum conſpicere ante biennium cœpit, ut ſupra quoque retuli, & in Anglia D. Paulus Nelius eques cum Clariſſimo Wrennio ipſo jam Anno 1655, ſibi animadverſum quandoque aſſerunt, nec tamen Planetam eſſe cognoviſſe donec à nobis eſſent admoniti. Nunc quo pacto periodum ejus inveſtigaverim, quæque porro ad illam pertinent expediam.

*Lunæ Saturniæ periodus.* Penſitatis priorum aliquot menſium obſervationibus, cum circiter 16 dierum ſpatio Saturnum à Luna ſua ambiri comperiſſem; nam quo loco animadverſa fuerat 25 Mart. 1655, ad eum ſexto decimo inde die rediiſſe viſa eſt, 10 nimirum

Apr.

Apr. Itemque eodem anno die 3 & 19 Apr. idem ſitus fuerat deprehenſus; nec non 13 & 29 ejuſdem menſis. Hiſce igitur animadverſis, circulum deſcripſi orbitam comitis referentem, in cujus centro Saturnus eſſet, atque in partes 16 diſtribui, uti Schema ſubjectum exhibet. In eo comitem, ſecundum ſignorum ordinem, circumduxi; nulla tum quidem obſervatione ut ita ſtatuerem cogente, ſed quod in eam partem Luna quoque noſtra & Jovis comites deferrentur. Poſtmodum autem ſtabilita hypotheſi, qua phænomena anſarum explicantur, patuit recte ita hunc motum me conſtituiſſe. Porro in hoc circulo locum comitis quærendo quo in prima noſtra obſervatione ſtetiſſet, ſæpiuſque eundem retractando, ut obſervationibus per id tempus habitis congruerent etiam reliqua loca in circulo comiti aſſignata; ita demum commodiſſimè repreſentari omnia viſum eſt, ſi prima obſervatione, nempe 25 Mart. 1655, ad numerum 12 comes reponeretur, 3 partibus cum dimidia, qualium 16 circumferentia continet à loco perigæo B remotus; nam diametrum AB ad viſum noſtrum vergere ponimus, & utraſque hujus epicyclii apſides determinare. Fuerit igitur 26 Mart. ad num. 13, Saturni comes: & 27 Mart. ad num. 14, & 3 Apr. ad num. 5, atque ita deinceps iis orbitæ locis quæ obſervatis primi anni exactè ſatis conveniunt, quanquam aliquid ſubinde addendum auferendumve 16 dierum periodo exiſtimaverim. Cum autem ſcirem etiam orbitæ terreſtris, qua nos circa Solem ferimur, ipſiuſque Saturni motus rationem habendam eſſe, ſi accuratè comitis periodum definire vellem, proinde ſequenti methodo eam deinceps inveſtigavi. TAB. LI. fig. 2.

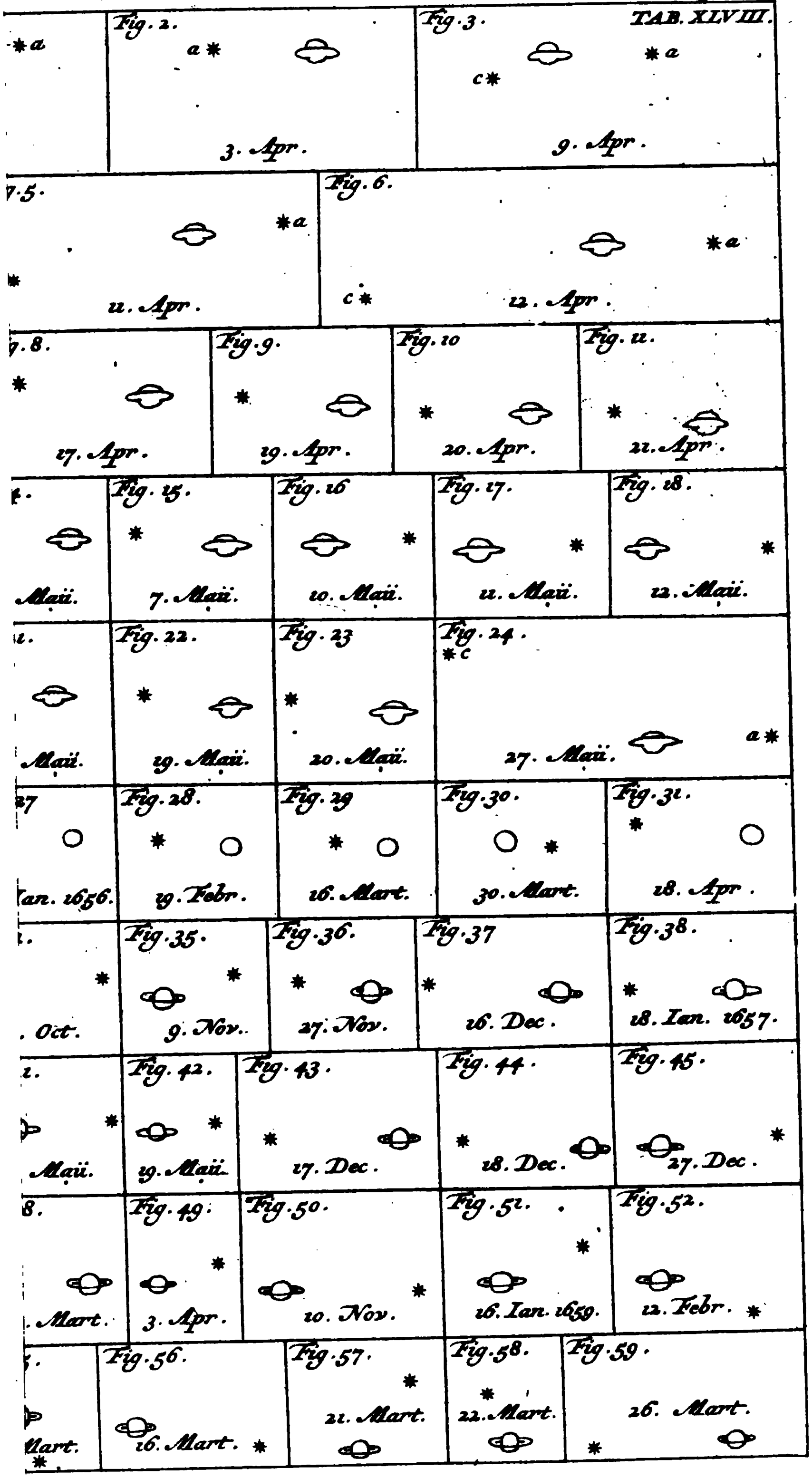
Bina tempora quæſivi quibus in apogæo vel perigæo comes verſatus eſſet; quorum alterum inveni 14 Martii, anno 1659, veſperi circa horam octavam. Quia enim hora noctis 12 tantum prætergreſſus erat locum perigæi quantum ex obſervatione illo tempore habita apparet, oportet eum circiter octavam in perigæo ipſo fuiſſe. Alterum ſimilem comitis ſitum colligo contigiſſe die 23 Martii, anno 1656, hora itidem octava poſt meridiem. Etenim quia die 16 & 30 ejuſ- *Eadem periodus accuratius ſupputata.*

dem menſis hora 8 p. m. æquali ſpatio à Saturno remotus apparuit, quibus diebus circa partem ſuæ orbitæ ſuperiorem verſatum conſtat, ſequitur 16 Martii medium locum eum tenuiſſe inter puncta 1 & 2 circuli modò deſcripti; 30 verò Martii medium fuiſſe inter puncta 15 & 16; quoniam 14 dierum intervallum eſt. Ac proinde neceſſario perigæus fuit die 23 Mart. poſt meridiem circa horam octavam.

TAB. XLIX. fig. 1. Cognitis hiſce temporibus deſcribo circulum ABC, qui Saturni orbitam deſignet, itemque GF orbitam Telluris, in cujus centro Sol. Saturni locum ſumo ad diem 23 Martii 1656, hora 8 poſt mer. fuiſſe in A; quo tanquam centro deſcribo comitis orbitam DEL; Tellurem vero eo tempore fuiſſe in G. Locus itaque comitis erat in D, ubi recta GA circulum comitis interſecat, ſiquidem perigæum fuiſſe conſtat. Rurſus poſito ad diem 14 Martii 1659 hora 8 poſt mer. loco Saturni in B, tellure vero in F; neceſſe eſt comitem fuiſſe in H, ubi recta FB ſecat circulum ejus NHK. Eſt autem temporis intervallum inter 23 Martii 1656, & 14 Martii 1659, dierum 1086, quibus Saturnus ab A progreſſus eſt ad B: Comitem vero ſpatio dierum 16 circuitum unum abſolvere ſcio, atque inſuper exiguum quid, quod in annis tribus circuitum integrum conficere nequeat. Quum igitur diviſis diebus 1086 per 16 fiant 67, atque aliquot dies abundent, apparet 68 circuitus integros noſtri reſpectu comitem peregiſſe, quia in H rurſus perigæus fuit. Sit BK parallela AG. Si igitur 14 Mart. 1659, comes non in H ſed in K poſitus fuiſſet; ſequeretur eum hiſce 1086 diebus ſexagies octies orbitam ſuam decurriſſe fixarum reſpectu, hoc eſt, totidem menſes periodicos, ſive ſidereos potius, Saturni incolis præbuiſſe. Nam quando rectæ AD, BK ſecundum quas ex Saturno comes proſpicitur, inter ſe parallelæ ſunt, eundem inter fixas locum illis obtinere cernitur. Nunc verò inſuper arcum KH emenſus eſt, qui totidem eſt graduum quot apparenti motu Saturnus inter prædicta duo tempora tranſivit; quoniam angulus HBK æqualis eſt ei quem conſtituunt rectæ FB, GA, motus apparentis indi-



Digitized by Google


TAB. XLVIII.
Fig. 2. 3. Apr.
Fig. 3. 9. Apr.
11. Apr.
Fig. 6. 12. Apr.
17. Apr.
Fig. 9. 19. Apr.
Fig. 10 20. Apr.
Fig. 11. 21. Apr.
Maii.
Fig. 15. 7. Maii.
Fig. 16 10. Maii.
Fig. 17. 11. Maii.
Fig. 18. 12. Maii.
Maii.
Fig. 22. 19. Maii.
Fig. 23 20. Maii.
Fig. 24. 27. Maii.
Ian. 1656.
Fig. 28. 19. Febr.
Fig. 29 16. Mart.
Fig. 30. 30. Mart.
Fig. 31. 18. Apr.
Oct.
Fig. 35. 9. Nov.
Fig. 36. 27. Nov.
Fig. 37 16. Dec.
Fig. 38. 18. Ian. 1657.
Maii.
Fig. 42. 19. Maii.
Fig. 43. 17. Dec.
Fig. 44. 18. Dec.
Fig. 45. 27. Dec.
Mart.
Fig. 49. 3. Apr.
Fig. 50. 10. Nov.
Fig. 51. 16. Ian. 1659.
Fig. 52. 12. Febr.
Fig. 56. 16. Mart.
Fig. 57. 21. Mart.
Fig. 58. 22. Mart.
Fig. 59. 26. Mart.

niam alias quoque vicinam illi animadverteram, ſimilique fere poſitu.

TAB. XLVII. fig. 6. Porrò brachia Saturni recta quidem utrinque extenſa cernebantur, ſed verſus extremas cuſpides craſſiora paulo quam qua parte Saturni diſco cohærebant, qualia ſequens ſchema exhibet.

Eâque formâ uſque ad occaſum Heliacum Saturnus perſtitit. Cæterum cum poſt phaſin rotundam Anni 1656 brachia denuo recepiſſet, eadem quidem illa forma reverſa eſt duodecempedali tubo ſpectanda: ſed tunc majori tubo 23 pedum adhibito alteram hanc figuram veriorem eſſe patuit; unde antea quoque talem extitiſſe credibile fiebat, quæ tamen minori teleſcopio perfectè conſpici nequiiſſet. At lineam illam obſcuram, brachia utraque conjungentem, ac tota tamen infra ſe relinquentem, etiam 12 pedum teleſcopio notavimus.

TAB. XLIX. fig. 6.

TAB. XLVII. fig. 7. Die ſequenti, nempe 26 Martii ſtella *a* eodem modo eademque qua prius diſtantia juxta Saturnum collocata erat, *b* verò duplo quam ante remotior. Unde, quum diſtantia inter ſe ſtellularum *a* & *b* major eſſet effecta, ſequebatur vel utramque vel alteram ſaltem erraticam eſſe. Et ſtellam quidem *a* neceſſario talem judicavi, quoniam Saturnum eo tempore retrogradum eſſe noveram; itaque oportebat cum Saturno illam in eandem plagam delatam eſſe, quum alioqui propinquior multo fieri debuiſſet. Altera vero *b*, quominus fixa cenſeretur nihil obſtabat, imo prorſus ita exiſtimari conſentaneum erat, cum una die tantum ab illa Saturnus receſſiſſet, quantum motus ejus poſtulabat. Neque verò aliter ſe rem habuiſſe ſequentes obſervationes oſtendunt.

TAB. XLVIII. fig. 1. Martii 27. ſtella *a* Saturno propior facta erat: *b* verò adhuc longius receſſerat.

Inde nubili dies interceſſerunt uſque ad 3 Apr. quo die fixam *b* non amplius annotavi, ſed ſtellula *a* migraverat ad Saturni latus Orientale, rurſuſque fere 3 ſcrupulis diſtabat. *fig.* 2.

Quinque diebus ſequentibus, rurſus ut ante impeditæ obſervationes.

9 Apr.

Digitized by Google

9 Apr. denuo ad occidentem ſitus erat comes *a* ſicut 27 Martii, fixaque altera *c* à parte orientali Saturno admodum propinqua animadvertebatur, uno circiter ſcrup. diſtans, lineaque brachiorum, uti præcedens, inferior. TAB. XLVIII. fig. 3.

10 Apr. Saturnus à fixa *c* longius abſceſſerat, & comes à Saturno. *fig*. 4.

Diebus duobus ſequentibus aucta fuit continuè diſtantia ſtellæ *c*, comitis *a* eadem fere manſit. Nempe

11 Apr. hic poſitus fuit. *fig*. 5.

12 Apr. talis. *fig*. 6.

13 Apr. comes videri nequiit, quoniam & Saturno propior factus erat, & Luna adventabat. Fixa *c* ulterius ſemper recedebat, ſed lentiore paſſu. *fig*. 7.

14 & 15 Apr. comes non apparuit ob viciniam Saturni.

16. Cælum nubilum.

17. Comes ad ortum ſitus erat, diſtans fere 3 ſcrup. ſtella vero *c* longius abierat, ſemper tamen oculis notata; Ac poſtea quidem eadem ad Saturnum reverſa eſt, ut ſequentes obſervationes docebunt. *fig*. 8.

18. Apr. comes ſitum mutaſſe non videbatur.

19. Apr. paulo propius ad Saturnum acceſſerat. *fig*. 9.

20. Apr. magis appropinquaverat. *fig*. 10.

21. Apr. Adhuc magis; cernebaturque anſarum lineâ paulo ſuperior. *fig*. 11.

29 Apr. Occidentalior Saturno comes factus erat, ac tantundem diſtabat quantum 21. Apr. *fig*. 12.

Ultima Apr. Comes prope Saturnum delituit.

3 Maji, in quem diem inſtitio Saturni incidit, comes in maxima ab eo diſtantia videbatur, orientem verſus. *fig*. 13.

Diebus inſequentibus uſque ad 27 Maii, ejuſmodi poſitus fuit qualem exhibent ſchemata ſubjecta.

6. Maji. *fig*. 14.

7. Maji. *fig*. 15.

10. Maji. *fig*. 16.

11. Maji. *fig* 17.

12. Maji. *fig*. 18.



Digitized by Google

14. Maji. *fig*. 19.

15. Maji. ægre conſpectus comes propter inſtans plenilunium. *fig*. 20.

17. Maji, Comes non apparuit.

18. Maji. *fig*. 21.

19. Maji. *fig*. 22.

20. Maji. *fig*. 23.

27. Maji, Comes occidentem verſus in maxima à Saturno diſtantia reperiebatur. Saturnus autem jam rurſus ad ſtellam *c* ſuperius notatam appropinquare cœperat, remotus circiter 10 ſcrup. Ita verò nunc poſita hæc erat, ut linea brachiorum Saturni continuata ſubter eam ferretur, cum die 10 Apr. ſupra tranſiiſſet. Sed & Saturni ipſius ſemita, uti ex ſequenti obſervatione liquebit, ſtellâ *c* inferior hac vice fuit, quæ priori illius applicatione ſuperior contigerat. *fig*. 24.

Ultima Maji, Saturnus ſtellam *c* jam prætererat; comes ad occaſum ſitus erat, ſed aliquanto propior quam die 27. *fig*. 25.

13 Jun. Ultima fuit ante occaſum Heliacum obſervatio, comes in maxima diſtantia cernebatur, Saturno occidentalior. *fig*. 26.

*Saturnus brachiorum expers inventus.*

Poſtquam ex radiis Solaribus Saturnus emerſiſſet Anno 1656. Jan. 16, hora 12, primùm à me obſervatus eſt, cum ad hoc uſque tempus peregre abfuiſſem. Inveni autem brachiis ſuis ſpoliatum penitus, & comitem ad orientem ſitum, in maxima fere diſtantia. *fig*. 27.

TAB. LI. fig. 4.

Rotundum autem Saturnum, ſub finem Novembris, aliqui jam obſervaverant; eâque formâ perſtitit uſque dum rurſum radios Solis ſubiret.

TAB. XLVIII. fig. 28.

19 Febr. tubo 23 pedum primùm uſus ſum, comitemque Saturno propinquum reperi, ubi priori teleſcopio ægre potuiſſet animadverti.

16 Martii, circa octavam adhuc propiorem Saturno comitem vidi, ad orientem ſpectantem, uti obſervatione ſuperiori. *fig*. 29.

30 Martii, hora 8, pari propinquitate, ſed ad alteram partem comes ſtabat. *fig*. 30.

18 Apr.

Digitized by Google

18 Apr. ad ortum ſitus erat comes in maxima diſtantia. *fig.* 31.

17 Jun. hora 9½ ultimò ea vice obſervatus fuit Saturnus, ſatellite verſus occidentem adſtante, & mediocriter remoto. *fig.* 32.

Hiſce autem obſervationibus omnibus quandiu Saturnus rotundus apparuit, tranſverſa illa linea, cæteris diſci partibus paulo obſcurior, ex æquo medium ejus diſcum ſecabat, eratque ad ſatellitem directa. Et hac quidem obſervatione 17 Junii habita, primùm animadverti motum Saturni, eum ſcilicet quo propter telluris vertiginem cum cælo pariter quotidie circumferri putatur, ſecundum eandem illam incedere lineam.

Eodem Anno 1656, Octobris die 13, manè hora 6, rurſus Saturnus videri cœpit, cui jam brachia erant renata; ſerius quidem quàm in obſervatione edita prædixeram, verùm haud aliâ formâ, quæ nimirum eadem planè fuit atque anno præcedenti: licet melius nunc cujuſmodi eſſet diſcerneretur, ob adhibitos tubos præſtantiores. *Brachia Saturno renata.* TAB. LI. fig. 5.

Faſcia autem illa ſeu zona obſcurior, paulò inferior brachiorum linea nunc apparebat, cum anno 1655 ſuperior fuiſſet. Eratque Saturni motus, quo cum cælo corripi videtur, ſecundum hujus zonæ ductum, ac proinde ſecundum rectam quoque lineam per utraque brachia protenſam, ac ſemper poſtea quotquot obſervationibus idem inquirere libuit, eodem modo rem ſeſe habere comperi. Comes conſpici hac vice nequiit, forte an ob ingruentem Solis exortum, aëremque craſſiorem prope horizontem.

Die autem 19 Oct. hora 6 mat. apparuit comes Saturno occidentalior, vix mediocri diſtantia abſiſtens, quæ diebus ſequentibus duobus aucta eſt continuè. TAB. XLVIII. fig. 33.

21 Oct. hora eâdem, erat comes in diſtantia maxima occidentali. *fig.* 34.

25 Oct. hora 6. mat. non apparuit comes.

9 Nov. hora 5½ mat. propinquus Saturno comes exiſtebat, occidentalis rurſum, ac lineâ anſarum paulo ſuperior. *fig.* 35.

26 Nov. hora 6½ mat. comes latuit. Brachia verò paulo la-

latiora evaſerant, & quà Saturno junguntur, minus intenſa luce quàm verſus extremas cuſpides lucebant, & hac fere ſpecie ad occaſum uſque Heliacum Saturnus permanſit.

27 Nov. hora 6 mat. ſatelles ægre conſpiciebatur, ad orientem ſitus, & brachiorum linea ſuperior. *fig.* 36.

16 Dec. 6 mat. videbatur ſatelles in maxima diſtantia orientali. *fig.* 37.

Anno 1657, 5 Jan. hora 12½ comes latebat.

18 Jan. hora 12, erat in mediocri diſtantia, orientem ſpectans. *fig.* 38.

A Saturno autem polum verſus dimidio circiter gradu diſtabat fixa 3 magnitudinis, quæ eſt in ventre Leonis, longitudine reſpondens Virginis gr. 4. 5′. cum latit. borea gr. 2. 49′.

22 Martii hor. 7½ veſp. comes in maxima diſtantia orientali, & anſarum linea paulo ſuperior; linea obſcura non ſatis erat conſpicua.

Scripſit mihi Hevelius ſe quoque pridie hujus diei comitem Saturni obſervaſſe ad orientem ſitum in maxima diſtantia, quod ſatis bene cum noſtra hac obſervatione convenit.

29 Martii hora 7½ comes erat in mediocri diſtantia occidentem verſus, & in eadem cum brachiis recta. *fig.* 39.

30 Martii, comes in maxima diſtantia occidentali. *fig.* 40.

Qua veſpera Hevelius quoque ad eandem partem ſibi conſpectum aſſerit, ſed difficulter, unde fortaſſe de diſtantia minus recte judicaverit, nam 1½ ſcrupulo tantum abfuiſſe à Saturno ſcribit.

18 Maji, comitem mecum obſervavit Bullialdus occidentaliorem Saturno, & in mediocri diſtantia. *fig.* 41.

19 Maji, proximus Saturno adſtabat comes occidentem verſus, vix anſarum linea ſuperior. *fig.* 42.

*Brachia Saturni in anſas mutari cœpta.* TAB. XLIX. fig. 7.

Anno eodem 1657. 17 Dec. hora 5½ manè, quo die primùm poſt ortum Heliacum Saturnum obſervavi, comes mediocriter diſtabat orientem verſus, eratque anſarum lineâ ſuperior. *fig.* 43. Brachia verò prope Saturni diſcum adaperta ac bifida inveniebam, qualia ante non videram, lineâ quoque obſcurâ verſus inferiora ulterius promotâ.

Et

Et hac quidem figurâ permanſit, donec rurſus radiis ſolis occultaretur.

18 Dec. comes erat in maxima diſtantia, orientem ſpectans, & in ipſa anſarum linea. *Tab.* XLVIII. *fig.* 44.

22 Dec. h. 6½ mat. comes non apparuit.

27 Dec. h. 6½ mat. comes occidentem verſus in maxima fere diſtantia ſitus erat, & anſarum linea paulo altior. *fig.* 45.

Anno 1658. 24 Febr. h. 10, comes videri nequiit.

1 Mart. h. 10, idem comitis ſitus erat qui 27 Dec.

11 Martii, h. 10, comes difficile conſpiciebatur, quippe propinquus admodum Saturno. Orientem ſpectabat, eratque anſarum linea aliquanto inferior, & quaſi ſub Saturno tranſiturus. *fig.* 46.

16 Mart. h. 10 quantum poterat à Saturno comes receſſerat occidentem verſus, vixque erat anſarum linea ſuperior. *fig.* 47.

23 Martii, in contrariam partem pene tantundem diſtabat, lineâ anſarum rurſus paulo ſuperior. *fig.* 48.

3 Apr. paulo remotior erat à Saturno comes, quam 11 Martii, & occiduum latus tenebat, lineaque anſarum ſublimior cernebatur. *fig.* 49.

Anno eodem 1658. 10 Nov. hor. 6½ mat. poſtquam Heliace ortus eſſet Saturnus, jam latius aperiri anſæ videbantur, quanquam ob humilitatem ſideris, ſurgenteſque vapores, & auroræ claritatem non admodum diſtinčte poterant diſcerni: comes occidentem verſus adſtabat, remotus ut cum maximè, anſarum linea nonnihil tamen ſuperior. *fig.* 50. *Anſæ Saturni amplius patefactæ.*

16 Jan. anno 1659. hora 5½ mane, comes ad occidentem denuo ſitus erat, non longe à Saturno diſtans, linea autem anſarum integra fere Saturni diametro ſuperior. *fig.* 51.

12 Febr. 6 mat. tantundem infra lineam anſarum deſcenderat, occidentalis rurſus. *fig.* 52.

Forma verò anſarum diſtinčte hac vice percipi potuit, quam figura hæc exhibet; atque ea ad ultimam uſque harum obſervationum talis extitit. TAB. LI. fig. 6.

24 Febr. hora dimidia poſt mediam noctem, comes erat in mediocri diſtantia, orientem verſus, rectâ anſarum pau-

lo inferior. *Tab.* XLVIII. *fig.* 53.

25 Febr. horâ eadem orientalis denuo comes cernebatur, una Saturni diametro ab ipſo remotus. *fig.* 54.

*Comes infra Saturnum tranſire viſus.* 14 Martii, hora 12, comes recta fere infra Saturnum obſervatus, unius circiter diametri longitudine diſtans; paulum tamen verſus occidentem declinabat. *fig.* 55.

16 Martii, hora 11, ad latus occiduum poſitus erat, fere in maxima diſtantia, inferiorque paulo eâ quæ per anſas ducitur. *fig.* 56.

*Idem ſupra Saturnum tranſiens.* 21 Martii, hora 11, rurſus ad eandem partem conſiſtebat comes, motu latitudinis integra Saturni diametro ſupra anſarum lineam elatus, longitudinis motu tantum dimidia diametro diſtans. *fig.* 57.

22 Martii, horæ quadrante ante undecimam; rurſus integra diametro ſuperior erat rectâ anſarum, ac fere ſupra orientalis anſæ extremam cuſpidem collocatus. *fig.* 58.

26 Martii, hora 10½ comes in maxima diſtantia videbatur; quam accuratè hac vice dimenſus, inveni inter comitem centrumque Saturni intervallum trium ſcrupulorum primorum, 16 ſecundorum. *fig.* 59.

Hucuſque obſervationes, & plures quidem quam neceſſe fuerat, recenſui; rem gratam tamen iis me facturum ratus, qui triennio iſto ſimul forſitan mecum novo Planetæ obſervando vacaverint; quibus procul dubio jucundum erit conſenſum mutuum ſuarum cum noſtris obſervationibus deprehendere. Jam enim & Hevelius Gedani eum conſpicere ante biennium cœpit, ut ſupra quoque retuli, & in Anglia D. Paulus Nelius eques cum Clariſſimo Wrennio ipſo jam Anno 1655, ſibi animadverſum quandoque aſſerunt, nec tamen Planetam eſſe cognoviſſe donec à nobis eſſent admoniti. Nunc quo pacto periodum ejus inveſtigaverim, quæque porro ad illam pertinent expediam.

*Lunæ Saturniæ periodus.* Penſitatis priorum aliquot menſium obſervationibus, cum circiter 16 dierum ſpatio Saturnum à Luna ſua ambiri comperiſſem; nam quo loco animadverſa fuerat 25 Mart. 1655, ad eum ſexto decimo inde die rediiſſe viſa eſt, 10 nimirum

Apr.

Apr. Itemque eodem anno die 3 & 19 Apr. idem ſitus fuerat deprehenſus; nec non 13 & 29 ejuſdem menſis. Hiſce igitur animadverſis, circulum deſcripſi orbitam comitis referentem, in cujus centro Saturnus eſſet, atque in partes 16 diſtribui, uti Schema ſubjectum exhibet. In eo comitem, ſecundum ſignorum ordinem, circumduxi; nulla tum quidem obſervatione ut ita ſtatuerem cogente, ſed quod in eam partem Luna quoque noſtra & Jovis comites deferrentur. Poſtmodum autem ſtabilita hypotheſi, qua phænomena anſarum explicantur, patuit recte ita hunc motum me conſtituiſſe. Porro in hoc circulo locum comitis quærendo quo in prima noſtra obſervatione ſtetiſſet, ſæpiuſque eundem retractando, ut obſervationibus per id tempus habitis congruerent etiam reliqua loca in circulo comiti aſſignata; ita demum commodiſſimè repreſentari omnia viſum eſt, ſi prima obſervatione, nempe 25 Mart. 1655, ad numerum 12 comes reponeretur, 3 partibus cum dimidia, qualium 16 circumferentia continet à loco perigæo B remotus; nam diametrum AB ad viſum noſtrum vergere ponimus, & utraſque hujus epicyclii apſides determinare. Fuerit igitur 26 Mart. ad num. 13, Saturni comes: & 27 Mart. ad num. 14, & 3 Apr. ad num. 5, atque ita deinceps iis orbitæ locis quæ obſervatis primi anni exactè ſatis conveniunt, quanquam aliquid ſubinde addendum auferendumve 16 dierum periodo exiſtimaverim. Cum autem ſcirem etiam orbitæ terreſtris, qua nos circa Solem ferimur, ipſiuſque Saturni motus rationem habendam eſſe, ſi accuratè comitis periodum definire vellem, proinde ſequenti methodo eam deinceps inveſtigavi. TAB. LI. fig. 2.

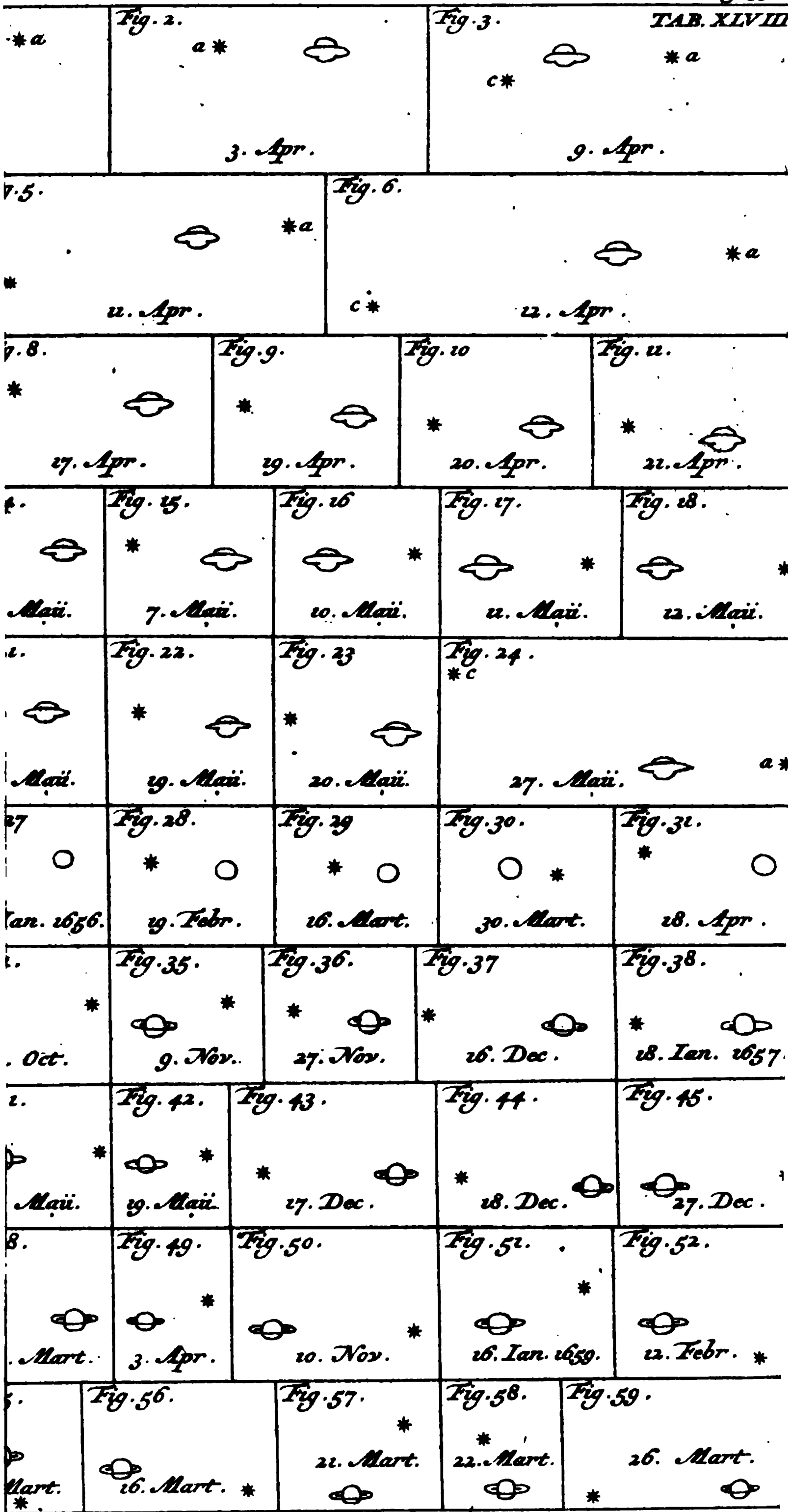
Bina tempora quæſivi quibus in apogæo vel perigæo comes verſatus eſſet; quorum alterum inveni 14 Martii, anno 1659, veſperi circa horam octavam. Quia enim hora noctis 12 tantum prætergreſſus erat locum perigæi quantum ex obſervatione illo tempore habita apparet, oportet eum circiter octavam in perigæo ipſo fuiſſe. Alterum ſimilem comitis ſitum colligo contigiſſe die 23 Martii, anno 1656, hora itidem octava poſt meridiem. Etenim quia die 16 & 30 ejuſ- *Eadem periodus accuratius ſupputata.*

dem menſis hora 8 p. m. æquali ſpatio à Saturno remotus apparuit, quibus diebus circa partem ſuæ orbitæ ſuperiorem verſatum conſtat, ſequitur 16 Martii medium locum eum tenuiſſe inter puncta 1 & 2 circuli modò deſcripti; 30 verò Martii medium fuiſſe inter puncta 15 & 16; quoniam 14 dierum intervallum eſt. Ac proinde neceſſario perigæus fuit die 23 Mart. poſt meridiem circa horam octavam.

TAB. XLIX. fig. 1. Cognitis hiſce temporibus deſcribo circulum ABC, qui Saturni orbitam deſignet, itemque GF orbitam Telluris, in cujus centro Sol. Saturni locum ſumo ad diem 23 Martii 1656, hora 8 poſt mer. fuiſſe in A; quo tanquam centro deſcribo comitis orbitam DEL; Tellurem vero eo tempore fuiſſe in G. Locus itaque comitis erat in D, ubi recta GA circulum comitis interſecat, ſiquidem perigæum fuiſſe conſtat. Rurſus poſito ad diem 14 Martii 1659 hora 8. poſt mer. loco Saturni in B, tellure vero in F; neceſſe eſt comitem fuiſſe in H, ubi recta FB ſecat circulum ejus NHK. Eſt autem temporis intervallum inter 23 Martii 1656, & 14 Martii 1659, dierum 1086, quibus Saturnus ab A progreſſus eſt ad B: Comitem verò ſpatio dierum 16 circuitum unum abſolvere ſcio, atque inſuper exiguum quid, quod in annis tribus circuitum integrum conficere nequeat. Quum igitur diviſis diebus 1086 per 16 fiant 67, atque aliquot dies abundent, apparet 68 circuitus integros noſtri reſpectu comitem peregiſſe, quia in H rurſus perigæus fuit. Sit BK parallela AG. Si igitur 14 Mart. 1659, comes non in H ſed in K poſitus fuiſſet; ſequeretur eum hiſce 1086 diebus ſexagies octies orbitam ſuam decurriſſe fixarum reſpectu, hoc eſt, totidem menſes periodicos, ſive ſidereos potius, Saturni incolis præbuiſſe. Nam quando rectæ AD, BK ſecundum quas ex Saturno comes proſpicitur, inter ſe parallelæ ſunt, eundem inter fixas locum illis obtinere cernitur. Nunc verò inſuper arcum KH emenſus eſt, qui totidem eſt graduum quot apparenti motu Saturnus inter prædicta duo tempora tranſivit; quoniam angulus HBK æqualis eſt ei quem conſtituunt rectæ FB, GA, motus apparentis indi-

ces;

TAB. XLVIII.




Digitized by Google

ces; iſque motus ex Ephemeridibus invenitur fuiſſe gr. 40, 48′. Sic itaque colligo; ſi diebus 1086 abſolvit periodos 68, atque inſuper gr. 40, 48′, hoc eſt gr. 24520, 48′, quantum ergo die una? Prodeuntque gr. 22, 34′, 44″, qui motus comitis diurnus eſt reſpectu fixarum. Ad menſis ſiderei longitudinem inveniendam ita calculum inſtituo; ſi gr. 24520, 48′ percurrit diebus 1086, quot dies impendet gradibus 360? fiunt dies 15, horæ 22, ſcr. 39. ſpatium quo ad eandem fixam Saturni incolis Luna ſua revertitur.

Deinde medium motum diurnum à ſole (qui minor eſt motu quo reſpectu fixarum comes progreditur, ut in noſtra quoque Luna evenire novimus) ita reperio; Saturni motum medium diurnum qui 2 eſt minutorum, aufero ab invento motu diurno reſpectu fixarum gr. 22, 34′, 44″. unde ſuperſunt gr. 22, 32′, 44″, diurnus motus à Sole. Atque hinc facile quoque menſis Synodici Saturnicolarum media longitudo computatur. Nempe ſi gr. 22, 32′, 44″, uno die percurruntur, quot igitur diebus gr. 360? Fiuntque dies 15, horæ 23, ſcr. 13. Reliquis duntaxat 47 ſcrupulis ad dies 16. Atque illud etiam medium tempus eſt quo noſtri reſpectu ad apogæum ſuum Saturni comes revertitur, ſive intra quod cum Saturno bis conjungitur. *Menſis Saturnicolarum vera longitudo.*

Cæterum quia ex motu comitis illud præcipue inveſtigari meretur, quo pacto ad datum quodvis tempus ſitus ejus apud Saturnum exhiberi poſſit; oſtendemus nunc breviſſimam ad hoc calculi rationem, ſequentium tabularum ope abſolvendam; in quibus motum comitis æqualem qualis ex Saturno fixarum reſpectu appareret, proponimus. Hunc autem diurnum adſumſimus gr. 22, 34′, 44″, ſicut modo inventus fuit. Etſi enim expertus ſum, iterato eodem examine adhibitiſque aliis duobus temporibus quibus comes fuit apogæus aut perigæus, aliquot ſecundis ſcrupulis majorem interdum minoremve eundem motum reperiri, iſtum tamen medium quodammodo inter alios retineri poſſe ratus ſum, poſt plures abhinc elapſos annos facile emendandum. Nam & inæqualitas puto aliqua, & eccentricitas, quemadmodum in Luna noſtra, ita circa hanc quoque, diligenti obſervatione olim deprehendi poterit.

*Tabula motus æqualis Lunæ Saturniæ in orbita ſua reſpectu fixarum.*

*In Annis Julianis.*

| | Gr. | Min. |
|---|---|---|
| 1 | 321 | 18 |
| 2 | 282 | 35 |
| 3 | 243 | 53 |
| 4 | 227 | 45 |
| 5 | 189 | 3 |
| 6 | 150 | 21 |
| 7 | 111 | 38 |
| 8 | 95 | 31 |
| 9 | 56 | 48 |
| 10 | 18 | 6 |
| 11 | 339 | 24 |
| 12 | 323 | 16 |
| 13 | 284 | 34 |
| 14 | 245 | 51 |
| 15 | 207 | 9 |
| 16 | 191 | 2 |
| 17 | 152 | 19 |
| 18 | 113 | 37 |
| 19 | 74 | 55 |
| 20 | 58 | 47 |

*In Menſibus anni Juliani incuntibus.*

| | | |
|---|---|---|
| Janu. | 0 | 0 |
| Febr. | 339 | 57 |
| Mart. | 252 | 9 |
| April | 232 | 6 |
| Maji | 189 | 28 |
| Junii | 169 | 25 |
| Julii | 126 | 47 |
| Aug. | 106 | 43 |
| Sept. | 86 | 40 |
| Octo. | 44 | 2 |
| Nov. | 23 | 59 |
| Dec. | 341 | 21 |

*Si fuerit datus annus intercalaris, poſt Februarium unus dies, atque & unius diei motus addendus eſt.*

*In Diebus.*

| | Gr. | Min. |
|---|---|---|
| 1 | 22 | 35 |
| 2 | 45 | 9 |
| 3 | 67 | 44 |
| 4 | 90 | 19 |
| 5 | 112 | 54 |
| 6 | 135 | 28 |
| 7 | 158 | 3 |
| 8 | 180 | 38 |
| 9 | 203 | 13 |
| 10 | 225 | 47 |
| 11 | 248 | 22 |
| 12 | 270 | 57 |
| 13 | 293 | 32 |
| 14 | 316 | 6 |
| 15 | 338 | 41 |
| 16 | 1 | 16 |
| 17 | 23 | 50 |
| 18 | 46 | 25 |
| 19 | 69 | 0 |
| 20 | 91 | 35 |
| 21 | 114 | 9 |
| 22 | 136 | 4 |
| 23 | 159 | 19 |
| 24 | 181 | 54 |
| 25 | 204 | 28 |
| 26 | 227 | 3 |
| 27 | 249 | 38 |
| 28 | 272 | 13 |
| 29 | 294 | 47 |
| 30 | 317 | 22 |

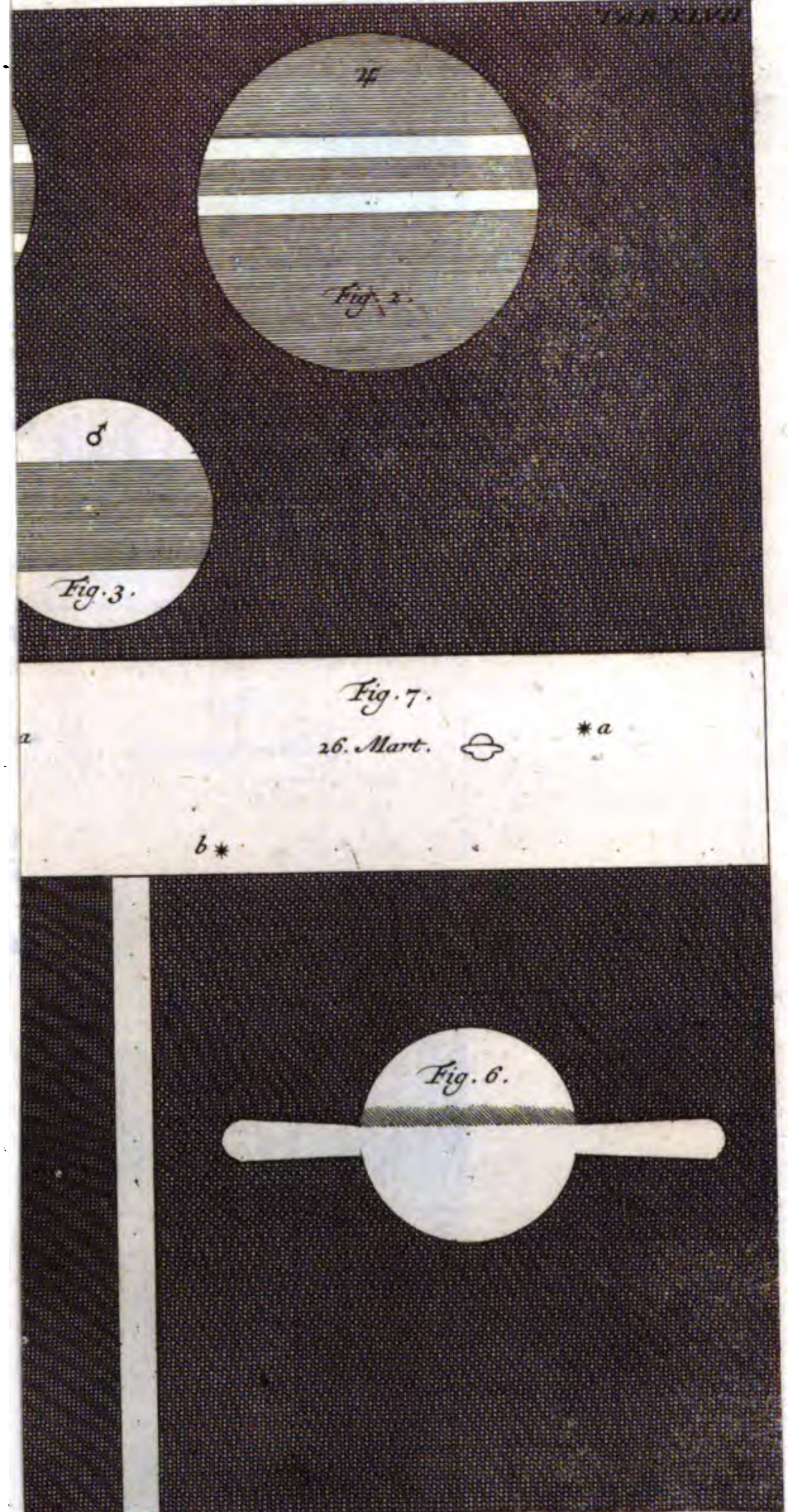
*In Horis.*

| | Gr. | Mi. |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 56 |
| 2 | 1 | 53 |
| 3 | 2 | 49 |
| 4 | 3 | 46 |
| 5 | 4 | 42 |
| 6 | 5 | 39 |
| 7 | 6 | 35 |
| 8 | 7 | 32 |
| 9 | 8 | 28 |
| 10 | 9 | 24 |
| 11 | 10 | 21 |
| 12 | 11 | 17 |
| 13 | 12 | 14 |
| 14 | 13 | 10 |
| 15 | 14 | 7 |
| 16 | 15 | 3 |
| 17 | 16 | 0 |
| 18 | 16 | 56 |
| 19 | 17 | 52 |
| 20 | 18 | 49 |
| 21 | 19 | 45 |
| 22 | 20 | 42 |
| 23 | 21 | 38 |
| 24 | 22 | 35 |

*Primo Jan. anno 1653, meridie, diſtantia Lunæ Saturniæ ab apogæo erat gr. 274. 21′. Saturni locus apparens, eodem tempore in ♌ gr. 11. 41.*

Harum

Digitized by Google




Digitized by Google

Digitized by Google

Harum tabularum auxilio primùm Epocham, quæ præcederet omnes obſervationes noſtras, conſtitui diem 1 Jan. meridie, anno 1655. Nempe ex eo, quod 14 Martii, 1659, hora 8 pom. in perigæo Saturni Luna verſaretur, collegi retrorſum numerando, ad prædictam diem 1 Jan. 1653, abſuiſſe illam ab apogæi loco gr. 274, 21'. Jam vero ut ad quodlibet datum tempus, epocha poſterius, inveniatur ejus ab apogæo diſtantia, (namque hinc facile deinde perſpicere eſt quam propinqua Saturno apparitura ſit) *addendus eſt ad motum Epochæ, motus comitis uſque ad tempus datum, ex tabulis collectus; hinc auferendus Saturni motus apparens per idem temporis intervallum, qui ex Ephemeridibus cognoſcitur; reliquum erit diſtantia comitis ab apogæo quæſita.* Ut ſi datum fuerit tempus dies 25 Martii, anno 1655, hora 8 pom. quæ prima noſtra fuit obſervatio: Motus Epochæ, ſive diſtantia Lunæ Saturniæ ab apogæo tempore Epochæ, quæ eſt gr. 274, 21', addita ad motum ejuſdem Lunæ inde ab Epocha ad tempus datum, colligit gr. 278, 31'; Hinc ablato Saturni motu apparente per idem tempus, qui invenitur gr. 22, 58', relinquuntur gr. 255, 33', diſtantia Lunæ Saturni ab apogæo, quæ invenienda erat. Unde apparet in circulo (Tab. LI. fig. 3.), ubi A apogæi locum referebat, fere ad numerum 12 illam conſtitiſſe, eoque in maxima propemodum diſtantia viſam, uti revera contigit. Calculum autem ſubjicimus qui ſic ordinatur.

*Locus Lunæ Saturniæ quomodo ſupputetur.*

Gra-

| | Gra. | Mi. |
|---|---|---|
| Motus Epochæ, | 274 | 21 |
| Anni 2 | 282 | 35 |
| Martii 1 | 252 | 9 |
| Dies 24 | 181 | 54 |
| Horæ 8 | 7 | 32 |
| Summa | 278 | 31 |
| Motus Saturni apparens | 22 | 58 |
| Reliquum | 255 | 33 |

diſtantia Lunæ Saturni ab apogæo.

| | G. | M. | |
|---|---|---|---|
| ♄ Locus app. 25 Mart. 1655, | 4 | 39 | ♍ |
| ♄ Locus app. tempore Epochæ, | 11 | 41 | ♌ |
| Reſtat ♄ motus apparens, | 22 | 58 | |

*Ejus calculi comprobatio.* TAB. XLIX. *fig.* 1.

Ut verò conſtet methodi ratio, intelligatur in ſuperiori diagrammate, Saturnus die 1 Jan. 1653 poſitus fuiſſe in A, terra in G, Luna Saturni in E, gradibus 274, 21′ ab apogæo L. Rurſumque 25 Martii 1655, Saturnus ponatur in B, terra in F, Luna Saturni in M: ſitque BN parallela AL. Quoniam igitur Lunæ motus periodicus inter bina illa tempora, additus motui Epochæ, hoc eſt, arcui LDE graduum 274, 21′, efficit gr. 278, 31′; erit idcirco arcus NKM hoc graduum numero. Diſtantia autem Lunæ Saturniæ ab apogæo eſt arcus OKM, qui ut cognoſcatur, auferendus eſt ab arcu NKM arcus NO. Ergo cum arcus NO totidem ſit graduum atque angulus quem conſtituunt rectæ OF, LG; hujus autem quantitas definiatur apparenti Saturni motu inter duo prædicta tempora; apparet nos rectè ab inventis gr. 278, 31′, hoc eſt ab arcu NKM, ſubtraxiſſe Saturni motum apparentem gr. 22, 58′ (quippe æqualem arcui NO) ad conſequendum arcum OKM, gr. 255, 33′, diſtantiam nempe Lunæ Saturni ab apogæo.

Nondum hic locus eſt explicandi alium quendam hujus lunulæ motum in latitudinem, obſervationibus aliquot præcedentibus jam ſeſe prodere incipientem; quo nempe ab linea recta per anſarum extrema tranſeunte plerumque exorbitat, apparetque circa Saturnum ellipſin percurerre, interdum quidem ſatis latam, alias verò anguſtiorem, & rotundo



Digitized by Google

do Saturno lucente, in rectam lineam abeuntem. Etſi enim, ad verum lunulæ ſitum reſpectu Saturni determinandum, hujus quoque motus ratio eſt habenda, cum tamen cauſæ ejus cum cæterorum phænomenôn cauſis prorſus conjunctæ ſint, ſimul cum illis atque una opera exponendum cenſeo.

Illam igitur Syſtematis hujus partem alteram nunc aggredior, in qua formæ Saturni inſtabilis atque à ſe ipſa diſcrepantis ratio reddenda, tum qua periodo ſingulæ mutationes contingant dicendum eſt. Harum aliquas quæ nobis ſeſe obtulere ſupra exhibui; ſed eæ partem tantummodo periodi complectuntur. Ideoque ut omnem phænomenôn diverſitatem ab iis quas dicemus cauſis pendere conſtet, aliorum quoque temporum obſervationes examinare neceſſe erit, quas à 40 atque amplius annis complures ſcriptis prodiderunt. At verò cum Saturni figuras omnes quas nobis delinearunt oculis luſtro, eas multiplices adeo ac prodigioſas invenio, ut ſi qua hypotheſis comminiſcenda foret quâ cunctis fieret ſatis, nemo non, ut opinor, in ea excogitanda operam luſurus ſit: cum nulla tam crebræ atque enormis transformationis cauſa eſſe poſſit, niſi ponatur ipſam Saturnii corporis molem identidem aliam atque aliam faciem induere, quod ab omni veriſimilitudine eſt alienum. Quamobrem delectus adhibendus eſt obſervatis illorum, & inquirendum quænam ex iis fidem mereantur, quæve contra ut ſuſpecta rejicienda ſint. Quo in examine illud concedi nobis poſtulamus, ut quoniam Saturni comitem primi perſpicillis noſtris deteximus, ac quoties libet clarè intuemur, præferantur propterea noſtra hæc illis quibus alii ad ſtellam eandem nequaquam pertingere potuere, licet quotidie Saturno obſervando intenti: eoque noſtræ etiam circa formam planetæ obſervationes veriores habeantur, quoties eodem tempore nobis atque illis diverſæ phaſes animadverſæ fuerint. Adjuncta itaque tabella omnes eas exhibet quas ex variis autoribus deſcripſimus. TAB. LII.

Ac prima quidem harum formarum eſt quam Galilæus adno- *Hæ ſingulæ examinantur.*

TAB. LII. fig. 1. notavit anno 1610, in qua triceps Saturnus ſpectatur, minoribus duobus orbiculis majori utrinque adjacentibus. Hanc alii quoque permulti viderunt, aut certè ſe vidiſſe crediderunt. Nam ſi grandiores tubos adhibuiſſent atque optimis vitris inſtructos, haud dubiè pro triplici hac globulorum facie eadem ſeſe illis obtuliſſet quam nobis diximus anno 1655, ac rurſus anno inſequenti, die 13 Oct. viſam. Hoc enim inde colligimus quod dum illis bini ad latera globuli apparent, nobis porrecta in longitudinem brachia tubi noſtri referunt; uti contigit eo ipſo anno 1655, menſe Aprili ac Majo, quo tempore triſphærica illa figura Ricciolo Hevelioque obſervata fuit. Etenim quo certius conſtet ob perſpicillorum parvitatem talem hanc cerni, experimur nobis quoque, quoties breviori perſpicillo, quinûm puta aut ſenûm pedum, Saturnum aſpicimus, binos globulos dictorum loco brachiorum apparere; etiam illâ anni 1658 jam exiſtente phaſi.

Quænam autem fallacis imaginis cauſa ſit facile perſpicitur. Quippe enim quum circa extremas cuſpides ampliorem lucem brachia hæc ſive alæ emittant, quam qua parte medio Saturni diſco adhærent, ubi ſemper umbræ aliquid intercedit, non modo cum manifeſto jam bifida evaſerunt, velut anno 1658, ſed antea quoque ut anno 1657; non mirum eſt lucem illam intenſiorem, debiliori interjecta, penitus à medio orbe ſeparatam videri. Neque item rotundam ex oblonga fieri mirandum eſt, cum idem accidat omni figuræ eminus, nec ſatis diſtinctè ob exilitatem, perceptæ, atque eo magis quo fuerit lucidior. Itaque plane conſtat teleſcopiorum culpa phaſin hanc vitiatam eſſe, licet obſervatores bona fide eam tradiderint.

TAB. LII. fig. 2. Quæ ſequitur hanc nihilo melius ſe habet, à Scheinero obſervata anno 1614. Atque equidem dubito, perfectioribusne an deterioribus perſpicillis, quam qui præcedentem dederunt, hanc deprehenderit. Quoniam hactenus quidem ad veram magis accedit, quod affixas Saturno auriculas exhibet; at contra in eo aberrat, quod plus juſto earum con-

tra-

trahat longitudinem. Hæc autem phaſis tum ſibi ipſi tum
ſuperiori fidem derogat, alterutram certe haud veram fuiſſe
arguit; quoniam eodem tempore, anno nimirum 1614, al-
tera à Scheinero, altera à Galilæo aliiſque obſervata perhibe-
tur. Ut proinde dubitandum non ſit, quin & hæc ſimilis ex-
titerit ei quam nos anno 1657 vel 1658 in commentaria re-
tulimus. Neque aliud de tertia hujus tabellæ exiſtimandum TAB. XLII.
eſt, quæ Ricciolo ſecunda ponitur, quamque anno 1640 & fig. 3.
1643 obſervatam ſcribit. Veritati tamen propior hæc vide-
ri poteſt, quod pro orbiculis oblongas atque olivæ ſimiles
figuras habeat.

Quarta eſt quam in locum triſphæricæ formæ Hevelius ad- fig. 4
ſumſit in libro *de Saturni nativa facie;* ubi ſecundum leges
hypotheſeos ſuæ aſſerit talem quandoque cerni debere, quæ
tamen ex viſus hallucinatione in triſphæricam degeneret.
Quanquam mihi ne iſtiuſmodi quidem forma ſatis convenire
hypotheſi illius videatur, ut poſtea oſtendemus.

Ejuſdem Hevelii etiam quinta eſt, cui ſimilem Gaſſendus fig. 5.
edidit. Et hæc quidem ſatis prope cum noſtra illa anni 1658
conſentit, niſi quod partes brachiorum tenuiores, qua me-
dio diſco adnectuntur utriuſque tubi non ſint aſſecuti.

Idemque in 6 & 7 contigit, quæ ambæ ab Hevelio quo- fig. 6. 7.
que traduntur, ſimiles iis quas circa eadem tempora Riccio-
lus obſervavit, nimirum anno 1648, 1649 & 1650, quæ hic
octavo nonoque loco exhibentur. Neque alia re differunt, fig. 8. 9.
quàm quod medius orbis Hevelio nonnihil oblongus appa-
ruit, cum Ricciolo rotundus fuerit: quodque hic connexas
anſas cum inter ſe tum Saturno ipſi ſpectaverit, quæ Heve-
lio pauxillo à contactu abeſſe viſæ ſint. Verum ipſe Heve-
lius cauſam cur ſeparatæ videantur viſus imbecillitati adſcri-
bit, cum alioqui reipſa cohærere eas Saturno ſtatuat.

Tales autem & Euſtachius de Divinis notavit anno 1646, fig. 10.
1647 & 1648, à quo editum ſchema ad num. 10 hic exhi-
buimus. Iſque cum præſtantiſſimus perſpicillorum artifex
habeatur, credibile eſt omnium emendatiſſimè nativam Sa-
turni faciem nobis deſcripſiſſe, niſi quod umbras illas quæ in



Digitized by Google

ſchemate apparent, de ſuo, ut opinor, adjecit.

TAB. LII. fig. 11. Porro ab hiſce figuris non multum recedit ea quæ à Fr. Fontana vulgata fuit, undecima tabellæ noſtræ. Quam quidem & Ricciolus anno 1646 ſibi viſam ſcribit. Sed minus bonis teleſcopiis tunc uſum crediderim, quam quibus modo dictas octavam nonamque detexit. Siquidem eodem anno 1646 ſeptimam formam ſe vidiſſe teſtatur Hevelius, cui potius hic ſtandum eſt. Nam Fontanæ obſervationes quominus in dubium vocare verear facit, quod etiam olim magis monſtroſas formas Martis publicavit, veluti trilateræ cujuſdam rupis, ac rurſus aliter cum nigra in medio orbe macula; quæ nos cum aliis multis fabuloſa comperimus. Hæc tamen, quam in Saturno prodidit formæ diverſitatem, neque magna eſt, ut dixi, neque miranda.

fig. 12. 13. Plus negotii poſteriores duæ, duodecima decimatertiaque, exhibituræ videntur: quarum priorem præter Blancanum etiam Gaſſendus prodidit; reliquam Ricciolus, aliunde tamen acceptam, nobis impertiit. Mirabilis præſertim illa Gaſſendi apparet. Verumtamen ſi bene perpendatur, facile eſt intelligere, quo pacto ab nona figura hæc defluxerit. Nam ſi tantum in locum rotundarum lacunarum, lunatæ ſubſtituantur, cornibus ſeſe mutuo reſpicientibus, jam profecto nona illa exiſtet, quam Ricciolus adnotavit. Nihil mirum autem Gaſſendo ac Blancano, cum non magnis perſpicillis uterentur, rotundas potius eas maculas quam lunularum forma apparuiſſe, ſiquidem partes harum acuminatas diſtinctè percipere illis negatum fuit. Tertiadecima denique quam Ricciolus à Fontana, itemque ab aliis Romæ viſam memorat, anno 1644 & 1645: eam quoque pro octava ac nona ſuppoſitam eſſe certum eſt, vel etiam pro ſeptima quam Hevelius prodidit. Non ſolum enim Ricciolus hanc ſibi unquam oblatam negat, ſolas octavam, nonamque cum anſis ſe vidiſſe affirmans: ſed & eodem anno 1645 Heveliano teleſcopio ſeptima illa conſpecta fuit. Nempe anſas Saturno conjungi rectè hìc Fontana animadvertit; ſed cum præcipuus earum ſplendor à parte gibba procederet, orbicularem ibi figuram conſtituere viſus eſt.

Non

Digitized by Google

Non adſcripſi phaſibus hiſce eam qua Saturnus ellipſis formâ conſpectus dicitur, abſque illis comitibus brachiiſve; quoniam ſatis conſtat ob exilitatem teleſcopiorum, in ipſo inventi hujus exortu, talem apparuiſſe; poſtquam verò ad majorem perfectionem eadem adducta ſint, neminem amplius ſolitarium Saturnum vidiſſe niſi ſimul & rotundus fuerit.

*Non eſſe alteram anſarum quandoque altera minorem.*

Omiſi etiam phænomenon aliud à nonnullis quidem relatum, ſed vanum proculdubio atque à ſola imaginatione profectum: quo nempe alterum quandoque Saturni ſive comitem ſive anſam altera minorem deprehendi aſſerunt. Ego vero exiſtimo non tam ab indiſcreta perceptione phaſin hanc enaſci (cur enim hanc anſam potius quam illam minorem dicerent?) quam quod ubi hypotheſin quiſpiam commentus fuerit, ex qua talem prodire neceſſe ſit, facile ſibi ipſi imponat, quodque cupit evenire credat. Itàque viro eximio J. Hodiernæ qui ad nos è Sicilia Syſtema ſuum Saturnium, de quo pluribus mox agemus, miſit, accidiſſe reor. Hic enim anno 1655 & ſub finem anni inſequentis, orientalem globulum reliquo minorem ſibi apparuiſſe ſcribit, quum tamen eodem tempore, nobis inſpectantibus, eadem utrique magnitudo, claritas ac figura adfuerit, non quidem orbicularis, ſed rectà in longitudinem utrinque à Saturni diſco procedens. Quin etiam fruſtra cauſam hujuſce rei ex hypotheſi ſua adducere Hevelius laborat, quum planè contrarium ex ea ſequatur, perpetua videlicet utriuſque anſæ æqualitas. Nam cum faciem Saturni nativam ejuſmodi fingat, qualis ſuperiori tabella ad numerum ſeptimum exhibetur, utrâque ſcilicet anſâ pari formâ ac magnitudine corpori medio adnexâ, non ſinunt ullæ opticorum leges, ut qualicunque hujus corporis converſione, aliter una atque alia anſa ſeſe videndam nobis præbeat. Nobis, inquam, in tam immenſa poſitis diſtantia. Cum enim 3000 fere diametris Saturni maximis ab eo remoti ſimus, quo pacto exiſtimat vir Clar. nos percepturos diſcrimen angulorum quibus propior remotiorque anſa ſpectari debeat?

*TAB. LII. fig. 7.*

*Non etiam unamquam.*

Æquè parum rationi conſentaneum eſt quod, ob eandem il-

*alteram citius ad medium Saturni corpus applicari.*

illam diſtantiæ differentiam, unam anſarum citius quam alteram cum medio diſco coaleſcere poſſe exiſtimat. Hoc enim, admiſſa licet Heveliana hypotheſi, atque etiamſi centuplo præſtantiores tubos haberemus, nequaquam tamen nobis viſu deprehendere liceret. Cæterum & hujus ſententiam viri ſolertiſſimi, quo certè nemo hac tempeſtate majori animo atque induſtria rem promovet Aſtronomicam, pluribus exponere, & aliorum inſuper de propria Saturni forma opiniones, priuſquam noſtram adferamus, recenſere placet, quas poſt editam de Luna Saturni obſervationem omnes accepimus. Hevelius igitur, in eo libro quem peculiarem huic argumento dicavit, cauſas phænomenôn redditurus, ſphæroidis oblongi figuram medio corpori Saturni tribuit, cui ab utroque latere appendices iſtæ, ut jam dixi, brachiorum ſive anſarum forma, firmiter adhæreant, quemadmodum ſupra 7 loco expreſſimus. Porro ſimul cum Saturno haſce anſas, ſpatio 30 circiter annorum, circa minorem ſphæroidis axem converti facit, qui quidem axis plano orbitæ Saturni ſit ad angulos rectos. Enimverò his poſitis ſeptimæ quidem ſuperioris figuræ phaſin nec non rotundam quoque repræſentari certum eſt: ut nimirum in duobus eclipticæ locis oppoſitis anſata hac facie Saturnus apparitutus ſit, aliiſque rurſus duobus rotundus anſiſque prorſus exutus. Quinimo & ſexta ac quodammodo quinta quoque exhiberi poſſent, niſi quod conjunctæ cum medio diſco anſæ videri debebant. Sed quarta phaſis nequaquam ab eadem forma proficiſci poterit. Nam cum ponatur Saturnus cum annexis ſibi anſis, qualem 7 figura oſtendit, rectus conſiſtere ad planum eccentrici ſui, atque ita perpetuo manere, licet circa axem proprium vertatur; eveniet quidem ea converſione, ut paulatim arctius ad medium orbem anſæ applicentur, veruntamen ſemper geminas lunas referent ejuſdem cum dicto orbe altitudinis, minimeque in tam compreſſas formas abibunt. Nam quod hoc efficere poſſe declinationem Saturni orbitæ ab ecliptica Vir Cl. cenſet (ita enim mihi reſpondit cum difficultatem hanc ei moviſſem) ſi diligentius rem expendat in-

*Hevelii hypotheſis circa anſas Saturni examinatur.*

TAB. LII. fig. 7.

intelliget fieri non poſſe, cum Saturni orbita tantum 3 gradibus ab eclipticæ plano recedat, ut inde anſarum figuris ulla nobis percipienda mutatio adveniat. Cæterum nec veram quidem eſſe hanc quartam phaſin ſuperius indicavimus, ſed cum hæc, ſive triſphærica potius, minoribus teleſcopiis cernitur, noſtris prægrandibus illam comparere quam adnotavimus anno 1655 & 1657. Quæ cum adhuc minus Hevelianæ hypotheſi conveniat, clarius demonſtrat illam ſcopum non attigiſſe. Neque ſanè vel rotundæ phaſis phænomena ſatis congruunt præſtitutis ab Hevelio limitibus; ut patet non tantum ex prædictione ejus, eventu refutata, quæ ferebat rotundam phaſin anni 1656 continuatum iri uſque in Menſem Septembrem anni 1657, cum tamen jam inde à 13 Oct. 1656, anſas Saturnus recuperaverit, neque poſtea amiſerit; ſed & ex Galilæi obſervatis circa rotundam phaſin anni 1612. Solſtitio enim hujus anni, Saturnus gr. 18, 22′. ♓ obtinens, tricorpor adhuc Galilæo apparuit, quum per tabulas Hevelii debuiſſet rotundus obſervari, ac viciſſim 1 Dec. ejuſdem anni 1612, cum verſaretur in gr. 11, 27′. ♓ rotundus Galilæo repertus eſt, quo loco Hevelius triſphæricum expectaſſet.

*Cauſa phænomenon Saturni à Robervallio excogitata.*

Alteram hypotheſin, ingenio ſuo acutiſſimo dignam, ſummus Geometra E. Robervallius nobis expoſuit. Qua quidem Saturnum perinde ut cæteros planetas rotundum ſtatuit; egredi autem è Zona ejus torrida, hoc eſt, quæ rectiores ſolis radios excipit, vapores quoſdam non admodum ſpiſſos, qui procul à ſuperficie ejus in ſublime evolantes, undique illum ambiant, præterquam polos verſus, ubi fortaſſis intenſum frigus eos à ſole attrahi prohibeat. Hi ſi quando omne ſpatium complent à Saturno ad uſque extremam ipſorum regionem, elliptica forma, inquit, eum videri faciunt. Cum vero minus denſi exoriuntur, interque eos ac Saturnum locus ingens medius relinquitur, ob tenuitatem ſolares radios non reflectunt, niſi inde ubi magis conferti iiſdem opponuntur; quod noſtri reſpectu neceſſe eſt fieri in partibus à medio diſco Saturni remotioribus. Ubi pro-

proinde anſarum formam ex ea reflexione produci oportet, illasque inter ac Saturnum ſpatia utrinque obſcura vel certè minus lucida intercedere. At quoties nullæ prorſus hujuſmodi exhalationes aſcendunt, rotundus planeta ſpectabitur.

Equidem rectè hoc conſideravit vir ſagaciſſimus eſſe aliquid quod æqualiter undique Saturnum circumdaret; ſuadente ſcilicet periodo Lunæ Saturniæ dierum 16, etiam ipſum circa axem ſuum, & breviori tempore, converſiones facere; ex quibus converſionibus intra paucos dies diverſas phaſes naſci oporteret, niſi undique eodem modo materia quædam circumpoſita eſſet. Nec diſſimili collectione uſi fueramus dum noſtrum Syſtema effingeremus, ut poſtea dicetur. Verumtamen ex illa ſua hypotheſi neque phaſis noſtra anni 1655 & 1657, ſatis commodè exponitur, neque certis Saturni orbitæ locis phaſes quæque peculiares ſunt, quod tamen ita ſe habere obſervationes omnes evincunt, & rotundi Saturni inprimis. Hæ enim in duobus oppoſitis Eclipticæ locis accidere animadverſæ ſunt, contraque in iis qui quadrante hinc diſtant, anſæ quam maximè expanſæ: cum tamen cauſa non appareat cur aliis quidem orbitæ partibus nullos vapores Sol è Saturno, aliis maximam eorum copiam extracturus ſit. Deinde vapores iſti, neſcio quam bene, at multum certè diſſimiles noſtris hiſce qui terram ambiunt ponuntur, tum quod immenſo ſpatio, prout hi ſolent, à Saturno aſcendant, tum quod verſus polos pauciſſimi aut nulli ſint, cum circa terræ polos plures contrà atque altiores exiſtant quam circa Zonam torridam. De elliptica autem forma Saturni diximus ſupra, eam revera nunquam talem cerni, ut proinde cauſam ejus adferre ſuperfluum fuerit.

*Hodierna Siculi circa eadem phænomena opinio.*

Nunc verò tuam quoque Hodierna doctiſſime ſententiam excutiamus, quam novo nuncio meo de Saturni Luna & promiſſo Syſtemate excitatus, ſubito publicam feciſti. Meretur tuus ille in hæc ſtudia non vulgaris amor, ut melioris notæ teleſcopia tibi ſuppeditentur, qui qualibuſcunque etiam inſtructus, non ceſſas in cælum quà licet eniti, ſummum-

Digitized by Google

mumque illum planetarum, formarum varietate omnes fruſtrantem, certis legibus aſtringere aggreſſus es. At ille te quoque ut opinor deluſit. Nam ſi poſthac ea facie ſe tibi offerat, qua mihi anno 1655 & 1657 apparuit, vel ea quoque quæ ſucceſſit anno 1658, cognoſces utique has non quadrare illi quod tibi finxiſti corpori. Sphæroidi nimirum, cujuſmodi aut ovum aut prunum eſt, ſed magis etiam oblongo quam Hevelianum illud, ſimilem Saturnum imaginaris; in quo binæ utrinque ſint maculæ lucis expertes, quales in tabula ſuperiori phaſis octava exhibet, quæ nobis interſtitia illa inter anſas Saturni mediumque ejus diſcum referant. Inde converſiones hujus corporis circa axem, eadem periodo qua & Hevelius, definis; & rotundum tunc videri aſſeris, cum longior ſphæroidis axis ad nos dirigitur, ideoque bis hoc accidere annorum 30 decurſu. Verùm enim cum prorſus rotundus ac orbe integro lucens appareat Saturnus, quoties brachiis ſuis nudatus eſt, expendendum tibi amplius relinquo, qua ratione lacunas quaſdam expleas quas à maculis illis nigris ſuperfuturas rectè ipſe prævidiſti. Præterea & phaſes illas te conſiderare velim quas hæc tua hypotheſis non poteſt non producere, nec à quoquam tamen obſervatæ perhibentur. Quas ut facilius omnes coram inſpicias; ovum aut aliud quod eam formam habeat, iſtis maculis ornatum, tibi proponito, atque ita ut Saturnum converti vis circumducito; videbis non pauca in tuo hoc Saturno phænomena quæ cæleſtis Saturnus nunquam exhibuit, atque alia rurſus, quæ ineſſe huic certo tibi affirmare audeo, non videbis, ipſéque de Syſtemate tuo ſtatues.

TAB. XLIX. fig. 6. 7.

TAB. LII. fig. 1.

Quod autem rei veritatem neque tu neque illi viri egregii, quorum antea opiniones recenſui, aſſecuti ſitis, minimè mirandum eſt, aut vobis imputandum, utpote ad quos falſa plurima pro veris phænomenis delata ſint; alia vero quæ de Saturno citra viſus fallaciam obſervantur, non pervenerint. Quæ ſi nobiſcum aſpicere vobis contigiſſet, eadem inde quæ nos de nativa Planetæ forma collecturos fuiſſe credibile eſt. Me vero præter phaſes illas ſynceriores, etiam Lunæ Satur-



Digitized by Google

niæ motus jam inde à principio animadverſus, non parum hîc adjuvit; ſiquidem ex hujus circa Saturnum gyratione, prima mihi ſpes de conſtituenda hypotheſi affulſit. Quæ cujuſmodi ſit deinceps explicare aggredior.

*Noſtra hypotheſis qua ratione excogitata.*

Quum ergo 16 dierum periodo circumferri Saturno planetam novum compertiſſem, haud dubiè minori etiam temporis ſpatio Saturnum in ſeſe ſuper axem ſuum revolvi arbitratus ſum. Namque antea quoque, in eo cum Tellure hac noſtra cæteris primariis Planetis convenire, ſemper credidi, quod ſinguli in ſe ipſis rotentur, atque ita tota eorum ſuperficies lumine ſolis per vices gaudeat. Quin imo in univerſum ita cum magnis Mundi corporibus comparatum eſſe, ut illa quibus alia minora circumferuntur, ipſa quoque in medio poſita minori tempore circumeant. Ita enim Solem diebus 26 circiter in ſe redire maculæ ejus declarant: circa Solem vero Planetarum ſinguli, inter quos Tellus quoque reponenda eſt, prout quiſque remotior eſt ita tardius curſum conficiunt. Rurſus Tellus hæc diurno ſpatio gyratur, quam Luna menſtruo motu ambit. Jovis autem Planetam quatuor minores, hoc eſt, totidem Lunæ circumſtant, eâdem hac lege, ut propiores quæ ſunt, celeriore curſu ferantur. Unde Jupiter quidem breviori forſitan tempore quam 24 horarum converti cenſendus eſt, cum citima ei lunularum minus biduo impendat. Quæ omnia cum pridem cognoviſſem, Saturno quoque jam tum ſimilem motum ineſſe judicabam. De celeritate autem periodi, comitis ſui obſervatio me certiorem fecit. Qui cum 16 diebus orbitam expleat, Saturnum in centro orbitæ ſitum, multo frequentius circumagi arguit. Jam verò & hoc credibile videbatur, omnem cæleſtem materiam, Saturnum inter comitemque ejus interjectam, eidem motui obnoxiam eſſe; hoc pacto ut quo Saturno propinquior eſt, eo magis ad ipſiuſmet celeritatem accedat. Unde illud ſequebatur denique, etiam appendices ſive brachia Saturni, vel medio globoſo corpori conjuncta atque affixa, ſimul cum eo volvi, vel, intervallo aliquo diſſita, non multò tamen lentiorem periodum ſortita eſſe.

Fi-

Figura porro brachiorum, dum hæc circa motum eorum mente agitabam, ejuſmodi apparebat, qualis in ſuperioribus obſervationibus anni 1655 expreſſa eſt. Nempe medium Saturni corpus omnino rotundum erat, brachia vero utrinque ſecundum eandem rectam lineam protendebantur, velut ſi axe quodam medius planeta trajiceretur, quanquam tubo illo 12 pedum quo tunc utebar, utraque verſus extremas cuſpides paulo craſſiora clarioraque videbantur, quam ubi mediæ ſphæræ cohærebant, ut indicat figura. Quum itaque quotidie eandem hanc ſpeciem præ ſe ferret, intellexi id alia ratione fieri non poſſe, ſiquidem tam brevis eſſet Saturni eorumque quæ illi cohærent circuitus, niſi ut globus Saturni à corpore alio æqualiter undique cinctus poneretur, atque ita annulus quidam medium eum ambiret. Hinc enim, quacunque celeritate circumvolveretur, eandem ſemper faciem nobis oblatum iri, ſi nimirum axis ad iſtius annuli planum erectus eſſet.

*TAB. XLVII. fig. 6.*

*Annulo Saturnum cingi.*

Et ſic quidem ei quæ per id tempus aderat phaſi cauſa ſua conſtabat. Ergo deinceps expendere cœpi anne reliquæ etiam, quæ de Saturno ferebantur, eidem annulo imputari poſſent. Hoc autem non tardè ſucceſſit ex animadverſa, per frequentes obſervationes, brachiorum Saturni ad eclipticam obliquitate. Cum enim lineam rectam, ſecundum quam utrinque ea extabant, non ſequi ductum eclipticæ, ſed interſecare eam angulo 20 partibus majore comperiſſem, ſtatui proinde planum annuli quem imaginatus eram tali circiter angulo ad eclipticæ planum inclinari. Perpetua videlicet conſtantique inclinatione, quemadmodum in tellure hac noſtra plano æquatoris contingere notum eſt. Hinc autem neceſſario illud ſequebatur, ut diverſis aſpectibus nunc ellipſin ſatis latam, nunc eandem ſtrictiorem, nonnunquam denique & rectam lineam idem annulus nobis exhiberet. Quod autem anſæ effingerentur, intellexi id inde fieri, quod non arctè Saturni globo annulus cohæreat, ſed pari interſtitio undique ab eo removeatur. Quibus proinde ſic ordinatis, ac præterea adſumta ea quam dixi annuli inclinatione,

*Eum ad Eclipticæ planum obliquè poſitum eſſe.*

ne, omnes mirabiles Saturni facies ſicut mox demonſtrabitur, eo referri poſſe inveni. Et hæc ea ipſa hypotheſis eſt quam anno 1656 die 25 Martii permixtis literis una cum obſervatione Saturniæ Lunæ edidimus *.

* vide ſupra pag. 522.

Erant enim Literæ aaaaaaa ccccc d eeeeeg h iiiiiii llllmmnnnnnnnnnooooppqrrsttttt uuuuu *; quæ ſuis locis repoſitæ hoc ſignificant, *Annulo cingitur, tenui, plano, nuſquam cohærente, ad eclipticam inclinato.* Latitudinem vero ſpatii inter annulum globumque Saturni interjecti, æquare ipſius annuli latitudinem vel excedere etiam, figura Saturni ab aliis obſervata, certiuſque deinde quæ mihi ipſi conſpecta fuit, edocuit: maximamque item annuli diametrum eam circiter rationem habere ad diametrum Saturni quæ eſt 9 ad 4. Ut vera proinde forma ſit ejuſmodi qualem appoſito ſchemate adumbravimus.

* vide pag. 526.

TAB. XLIX. fig. 2.

*Occurritur iis quæ de annulo objici poſſunt.*

Cæterum obiter hic iis reſpondendum cenſeo, quibus novum nimis ac fortaſſe abſonum videbitur, quod non tantum alicui cæleſtium corporum figuram ejuſmodi tribuam, cui ſimilis in nullo hactenus eorum deprehenſa eſt, cum contra pro certo creditum fuerit, ac veluti naturali ratione conſtitutum, ſolam iis ſphæricam convenire, ſed & quod annulum hunc ſolidum ac permanentem (talem enim arbitror) Saturno ita circumponam, ut nullis compagibus retinaculiſve ei cohæreat, ac nihilominus æqualem ab omni parte diſtantiam ſervet, unáque cum Saturno motu velociſſimo transferatur. Hos autem reputare illud oportet, non ex mera inventione atque arbitrio meo hanc me fingere hypotheſin, ſicut Aſtronomi ſuos epicyclos, nuſquam in cælo apparentes; ſed oculorum ſenſu, quo nempe reliquarum rerum omnium figuras dignoſcimus, hunc quoque annulum ſatis evidenter me percipere. Neque verò cauſam eſſe cur corpus aliquod inter cæleſtia hac forma præditum exiſtere nequeat, quæ ſi non ſphærica at ſaltem rotunda eſt, atque ejuſmodi ut motum circa centrum æquè commodè atque ipſa ſphærica ſuſcipiat. Nam minus utique mirandum, hujuſmodi figuram tali corpori tributam, quam inconcinnam

quam-

quampiam minimèque tornatilem. Porrò quum certo ſatis colligi poſſe videatur, ob ſimilitudinem ac cognationem magnam quæ Saturno cum Tellure noſtra intercedit, illum perinde ut hæc in medio ſui vorticis ſitum eſſe, centrumque ejus verſus omnia naturâ ſuâ tendere quæ illic gravia habentur; inde neceſſario quoque efficitur, annulum iſtum omnibus ſui partibus æqualivi ad centrum nitentem, hoc ipſo ita conſiſtere, ut undiquaque pari intervallo à centro abſit. Planè ſicuti quidam contemplati ſunt, quod ſi continuum fornicem per totum terrarum ambitum exſtrui poſſibile eſſet, is abſque ullo fulcimine ſemet ipſum eſſet ſuſtentaturus. Ergo tale quid in Saturno reipſa effectum eſſe ne protinus abſurdum credant, ſed ſuſpiciant potius infinitam naturæ potentiam & majeſtatem, quæ ſubinde nova ſuorum operum ſpecimina in lucem promens, plura etiam ſupereſſe admonet. Verum ad propoſitum jam revertamur.

*Saturni major diameter Æquatori parallela oſtenditur.*

Diximus brachiorum lineam anno 1655 eclipticæ occurrere viſam angulo partium plus minus 20. Quod cum præcipuè faciat ad phænomena ex hypotheſi noſtra deducenda, antequam ad illa accedamus; ita ſe habere ex obſervationibus oſtendendum eſt.

Cum igitur 25 Martii, anno 1655, Saturni in A poſiti ad ſtellam fixam B ea fuerit conſtitutio quæ hîc adnotata eſt, ut conſtat ex ſuperioribus obſervationibus, die autem ſequenti ſicut in D & B, tertioque item die ſicut in C & B, ita ut quotidie linea anſarum producta altius ſupra ſtellam B aſcenderet; hinc perſpicuum fit viam Planetæ A C nequaquam congruere directioni anſarum, ſed diverſam ferri angulo A C E, quem 20 gr. majorem invenio. Eo autem tempore nihil admodum mutabatur latitudo Saturni apparens, unde conſtat viam A C eclipticæ parallelam fuiſſe; ac proinde eodem illo 20 gr. angulo etiam ab ecliptica lineam anſarum deflexiſſe. TAB. XLIX. fig. 3.

Rurſus 9 Apr. & tribus ſequentibus continuè diebus ad aliam fixam C talis annotatus fuit Saturni poſitus qualis in L, M, N, O cernitur. Ubi ſimiliter apparet, lineam an- TAB. XLIX. fig. 4.



Digitized by Google

ſarum OP, Saturni tramitem LO ſecare angulo LOP, qui 20 plus minus graduum deprehenditur. Eclipticam verò vel eclipticæ parallelam lineam RQ, angulo PQR, paulo etiam majore quam LOP, quoniam decreſcebat per eos dies Saturni latitudo, quæ borea erat.

TAB. XLIX. fig. 6. Denique cum poſt ſtationem Saturnus ad fixam eandem C revertiſſet, factuſque eſſet auſtralior, die 27 Maji, eo poſitu juxta hanc adſtabat quo hîc ad S deſignatus eſt. Die vero Maji poſtrema, eo qui ad T. Ita ut hic quoque linea SV, quæ ſecundum brachia ducitur, interſecet ST, quam quatriduo illo Saturnus permeaverat, angulo VST, 20 gradus exiguo ſuperante. Eclipticam vero vel eclipticæ parallelam XY, paulo minore angulo SXY, quoniam minuebatur adhuc continuè Planetæ latitudo, etſi directus jam incedebat.

Et his quidem intellectis, inclinatio brachiorum Saturni ad eclipticam, in dubium vocari amplius nequit, etſi, fateor, non admodum accuratè quanta ſit hoc modo definiri poſſit. Si tamen 21 graduum per id tempus apparuiſſe ponatur, quantam ferè adductæ obſervationes comprobant, ac porro ad locum Saturni, qui tunc fuit, attendamus, inveniemus æquatori planè parallela brachia extitiſſe. Cum enim circa 9 gr. Virginis Saturnus verſaretur, ubi parallelus æquatoris eclipticam interſecat angulo gr. 21. quo angulo etiam brachiorum linea illam interſecabat; manifeſtum eſt hanc ſecundùm dictum parallelum atque adeo ſecundùm ipſum æquatorem incedere debuiſſe.

Cæterùm alio nunc irrefragabili argumento eandem hanc brachiorum inclinationem, & cum æquatore circulo parallelismum confirmabimus. Suprà in obſervationum Hiſtoria ad diem 13. Octob. anni 1656, adnotatum eſt, motum Saturni, quo cum cælo quotidie defertur, ſecundum ipſam anſarum lineam procedere nobis viſum, non ex die tantum, ſed quotieſcunque exinde idem inquirere libuit: inquiritur

TAB. L. fig. 1. autem hoc modo. Teleſcopio ad Saturnum obverſo, eoque intra tubi aperturam, quam hic refert circulus AB, recepto, ita ut primùm in extremo margine conſiſtat, virgaque

quę

que linea brachiorum ad aperturæ centrum, immotum inde tubum ſiſtimus, quo ita manente, mox totam tubi capacitatem A B percurrere Saturnus conſpicitur, motu qui cælo tribuitur abreptus, atque exire ad partem oppoſitam B, quo tendebat brachiorum linea. Quoniam ergo Saturnus, hoc motu ſuo, circulum æquatori parallelum percurrit, cujus circuli pars eſt linea A B, manifeſto patet brachiorum lineam æquatori quoque parallelam extendi. Hujus vero rei periculum facere licet quoties Saturni obſervandi facultas datur, neque alia certiori ratione directionem anſarum inveſtigari poſſe credimus. Non defuere tamen qui diverſimode idem examen inſtituerunt, quorum obſervationes ſententiam hanc noſtram comprobant. Nam Galilæus quidem ipſe, qui primus phænomeni hujus indicium fecit, non omnino eclipticæ parallelam lineam, in qua Saturni comites poſiti eſſent, ſibi viſam ſcribit, ſed evidenter ab ea deflectere; & fortaſſe, inquit, æquatori parallela eſt.

Poſt hunc vero quicunque rem examinaverunt, omnes hanc ejus conjecturam nequaquam aberraſſe oſtendunt, & in his Aſtronomi inſignes Gaſſendus, Bullialdus & Ricciolus; quorum hic ſtellarum fixarum ope (alia tamen methodo quam qua modo nos uſi ſumus) non ſemel illum anſarum cum æquatore paralleliſmum liquido ſibi compertum demonſtrat.

Clariſſimus tamen Hevelius, ſuis obſervationibus confiſus, quæ cujuſmodi fuerint non indicat, diverſam hîc opinionem tuetur, contenditque excentrico Saturni parallelam eſſe brachiorum inclinationem, ut proinde eclipticæ quoque ferè conveniat, non amplius unqnam quam $2\frac{1}{2}$ gr. deflectens: & hoc quidem cum circa nodos interſectionis Saturnus verſatur. Quo fiet ut cum in Libræ & Arietis gr. 20, ubi limites ſtatuuntur, poſitus fuerit, prorſus eclipticam ſequatur brachiorum diſpoſitio. At circa hæc loca maximam omnium inclinationem noſtræ & aliorum obſervationes produnt, nam noſtræ quidem, Saturno prope libræ ſignum atque in ipſo ſigno verſante, habitæ ſunt; aliorum vero quædam

*Hevelii de inclinatione anſarum contraria opinio.*

cum

cum non procul ab oppoſito limite diſtaret. Ergo quod & plurium autoritas & propria experientia confirmat, haud cunctanter hac in re amplectemur: Neque vero dubito, quum certam ſemperque obviam obſervandi methodum tradiderim, quin ea adhibita vir veri amantiſſimus priorem ſententiam volens abdicaturus ſit. Illud utique nobiſcum novit, fruſtra ſive hunc ſive alium quemlibet obſervandi modum, ad dirimendam inter nos hanc litem, uſurpari, quando circa ſigna Cancri vel Capricorni Saturnus commoratur, quoniam ibi diſcerni nequit utrum æquatori an eclipticæ parallela ſit quæ per anſas ducitur, eò quod in his locis parallelus æquatoris eclipticam non interſecet ſed tangat. Quamobrem miror etiam quo pacto Ricciolus, obſervationem Grimaldi adferens anno 1650, 18 Martii habitam, quæ probat eo tempore hanc anſarum lineam eclipticæ obliquam incidiſſe, non animadverterit contrarium ejus quod intenderat illa obſervatione evinci: ſi enim tunc, Saturno prope initium Cancri agente, non erat eclipticæ parallela anſarum linea, ne quidem æquatori parallela fuerit, ut conſtat ex modo dictis. Semper autem æquatori parallelam cerni, & aliis multis obſervationibus docuit, & hac ipſa oſtendere voluit. Ergo & experientiæ propriæ & ſententiæ ſuæ, quam veram eſſe demonſtravimus, planè hîc adverſatur. Grimaldi autem obſervatio, quanquam alioqui in hoc negotio verſatiſſimi atque experientiſſimi, vitio aliquo laborare cenſenda eſt; in qua forſitan priore fixa à Saturno contecta, vel ob fulgorem cerni prohibita, aliam deinde teleſcopio detexerit prius non animadverſam, proque eadem illa habuerit. Nos verò, cum parallelam æquatori brachiorum lineam eſſe indubitatis rationibus ſatis jam adſtruxerimus, deinceps ad annuli noſtri hypotheſin hunc ejus ſitum applicemus, indeque phænomenôn cauſas ſingulas derivari doceamus.

*Ricciolus ſibi contrarius. lib. 7. Almag. novi.*

Eſto itaque Saturni orbita, quam 30 circiter annis ille emetitur, ABCD; & in eodem plano (nam exiguæ declinationis gr. 2½ non hic rationem habebimus) circulus FE, orbem magnum ſive telluris orbitam referens, quam an-

*Ulterior hypotheſeos noſtra explanatio.*

TAB. L. fig. 2.

annuo ſpatio cum illa nos obimus: inque hujus centro G conſiſtat Sol. Jam ſicuti axem terra habet ſemper ſibi parallelum, circa quem in ſeſe volvitur, ita Saturnus quoque habere ponatur, qui ſit ad annuli ſibi circumdati planum erectus. Adeo ut circa unum eundemque axem gyrentur & corpus Saturni ſphæricum, & annulus, & in eodem annuli plano poſitus Saturni comes ſive Luna. Intelligatur autem Saturni hic axis axi terræ circiter æquidiſtans. Unde & planum annuli plano æquatoris noſtri parallelum erit, ac proinde angulo partium $23\frac{1}{2}$ ad planum eclipticæ inclinabitur. Nam ſic conſtituendum eſſe inde intelleximus quod anſarum Saturni inclinatio æquatori parallela deprehendatur, ut modo demonſtratum fuit.

Nobis itaque in circulo EF circumlatis, varias annuli hujus, à Sole pariter cum Saturno illuſtrati figuras cerni debere perſpicuum eſt, prout nimirum nunc has nunc illas orbitæ ſuæ partes Saturnus peragrabit. Nam eodem quidem orbitæ loco, quacunque tandem celeritate ſuper axem ſuum converti dicatur, diverſas phaſes non exhibebit, quoniam ea converſione ſitum annuli, noſtri reſpectu, nihil immutat, ſed ita demum ſi in eccentrico ſuo ſive orbita ſpatio aliquo progreſſus fuerit. Cumque triginta fere annis ad loca eadem revertatur, hinc neceſſario intra id tempus omnium phaſium viciſſitudinem conſpici neceſſe erit, atque alias quidem bis, alias quater: quas ſingulas nunc expendemus.

Primò itaque duos orbitæ locos eſſe liquet è diametro oppoſitos, velut A & C, in quibus Saturnus conſtitutus latiſſimas, maximeque omnium diductas anſas exhibeat; cum nimirum à plano per centra Telluris & Saturni acto, atque ad orbitæ Saturniæ planum erecto, annuli quoque planum ad angulos rectos ſecatur, eoque viginti trium circiter partium angulo ſupra planum annuli viſus noſter attollitur. *Cauſa phaſeos anſarum latiſſimarum.*

Cujus phaſeos vera proinde forma, ſecundum ea quæ ſupra circa annulum definivimus, ejuſmodi erit qualis hîc de- *TAB. L. fig. 3.*

lineata cernitur, majori ellipſis diametro ad minorem ſe habente fere ut 5 ad 2. Atque hæc ea figura eſt quam ab Hevelio, Ricciolo, & Euſtachio de Divinis, anno 1648, 1649, & 1650. ſpectatam fuiſſe diximus. Cujus itaque locum, hinc inter ſigna ♊ & ♋, inde inter ♐ & ♑ conſtitui oportere certum eſt, quandoquidem iſtis annis ſignum ♊ Saturnus peragrabat & in ♋ ſignum tranſibat. Poſtea verò accuratius hunc locum latiſſimè anſarum phaſeos inquirentes oſtendemus eum cadere in 20½ gr. ♊ & ♐.

*Clarior Saturnus propter anſas cernitur.*

Illud vero manifeſtum eſt, Saturnum, quoties hanc præfert ſpeciem, multo lucidiorem ſeſe intuentibus oſtendere debere, quàm dum nullis brachiis auctus eſt: quum tantundem luminis fere ab hiſce emanet, quantum ab toto interiore diſco. Atque ita ſemper quo propius verſus Cancri & Capricorni ſigna acceſſerit, eo majorem, aut certè ſplendidiorem, etiam abſque teleſcopio appariturum; quippe annuli ellipſis ſemper latius ſe pandente, ut in ſequentibus declarabitur.

*Lunæ Saturniæ motus apparens ellipticus.*

Sed & aliud circa hanc phaſin obſervandum occurrit, motus nimirum inſolens Saturnii comitis, qui quidem motus obſervationibus anni 1659 adnotari jam cœpit, verùm hac latiſſimâ anſarum phaſi exiſtente, omnium evidentiſſimè ut ſeſe prodat neceſſe eſt. Etenim quum eodem plano & annulus Saturni & comitis orbita contineantur, aut certè parum diverſis; conſtat ſimul cum annulo etiam orbitam hanc latiſſimam omnium ellipſin nobis explicaturam: eoque futurum ut comes apparente motu altè ſupra Saturnum atque infra tranſire conſpiciatur, ita ut corpore ejus vel radiis nimium propinquis nequaquam nobis occultetur, quemadmodum aliàs accidere ſolet. Atque ea quidem ellipſis quam tali motu deſcribere hiſce in locis cernetur, longitudinem latitudinis ſuæ duplam ſeſqui alteram habere invenietur, ſicut & annuli, quam diximus, ellipſis latiſſima. Verum recedente hinc Saturno ſenſim anguſtior ipſa quoque evadet, quippe annuli ellipſi ſemper ſimilis, adeo ut primum fulgore planetæ tranſitus comitis conſpici prohibeatur, deinde corpo-

ris

ris ipſius Saturni ante vel pone comitem objectu. Ita namque obſervationes anni 1655 & 1657, quo tempore exilia & quam maximè compreſſa brachia erant, oſtendunt comitem etiam in ea recta tunc perpetuo apparuiſſe quæ per utrumque illorum extendebatur.

Et hac quidem in re diſſidet Saturniæ Lunæ curſus ab eo qui in noſtrate Luna animadvertitur; ſiquidem hæc non æquatoris noſtri ſed magis eclipticæ plano obnoxia eſt, à quo quinque tantummodo partibus exorbitat.

*Quomodo anſarum latitudo ſenſim contrahatur.* TAB. L. fig. 2.

Verum ad Saturni phaſes revertamur: quo poſito ad H vel I, vel ex adverſo ad O vel P, paulo anguſtiorem jam annuli ellipſin, eadem tamen qua prius longitudine nobis aſpici oportet, quum ſupra planum annuli minus altè hoc ſitu viſus noſter efferatur. Unde illa phaſis exorietur quæ in tabellæ LII. ſerie octava poſita eſt; vel, minus accuratè perſpicere valentibus, ea quæ ſexta eſt efficietur.

Rurſus autem eum ad K aut L Saturnus pervenit, vel ad loca hiſce oppoſita N & M, magis adhuc contrahi apparet minorem ellipſis diametrum, quippe magis ex obliquo inſpectam. Ut jam ea Saturni facies proditura ſit quam nos anno 1658 obſervavimus (T. XLIX. *fig. 7.*); quæ minus bonis teleſcopiis excepta degeneravit in illam quæ quinta in tabella LII. recenſetur; pejoribus etiam in triſphæricam.

*Quomodo patula videri anſa deſinant.*

Deinde cum penè quadrante circuli à latiſſimæ phaſeos loco Saturnus remotus invenitur, velut in Q & R, vel S & T; uſque eo ellipſis annuli conſtringitur, ut ſi qua adhuc rima ſuperſit viſui pervia, ea tamen propter exilitatem & reliqui corporis ſplendorem conſpici nequeat; ac proinde Saturni forma ejuſmodi appareat qualem anno 1655 & 1657 nos ſpectaſſe ſupra meminimus (T. XLIX. *fig.* 6. T. LI. *fig* 5.), quæ quomodo aliis omnibus hactenus teleſcopiorum culpâ triſphærica exiſtimata ſit, antea quoque oſtenſum eſt.

Sola dehinc rotunda phaſis explicanda reſtat; ad quam priuſquam tranſeam, de inclinatione magnæ Saturni diametri, ſive anſarum lineæ, ut ſupra eam vocavi, pauca adnotanda ſunt.



Digitized by Google

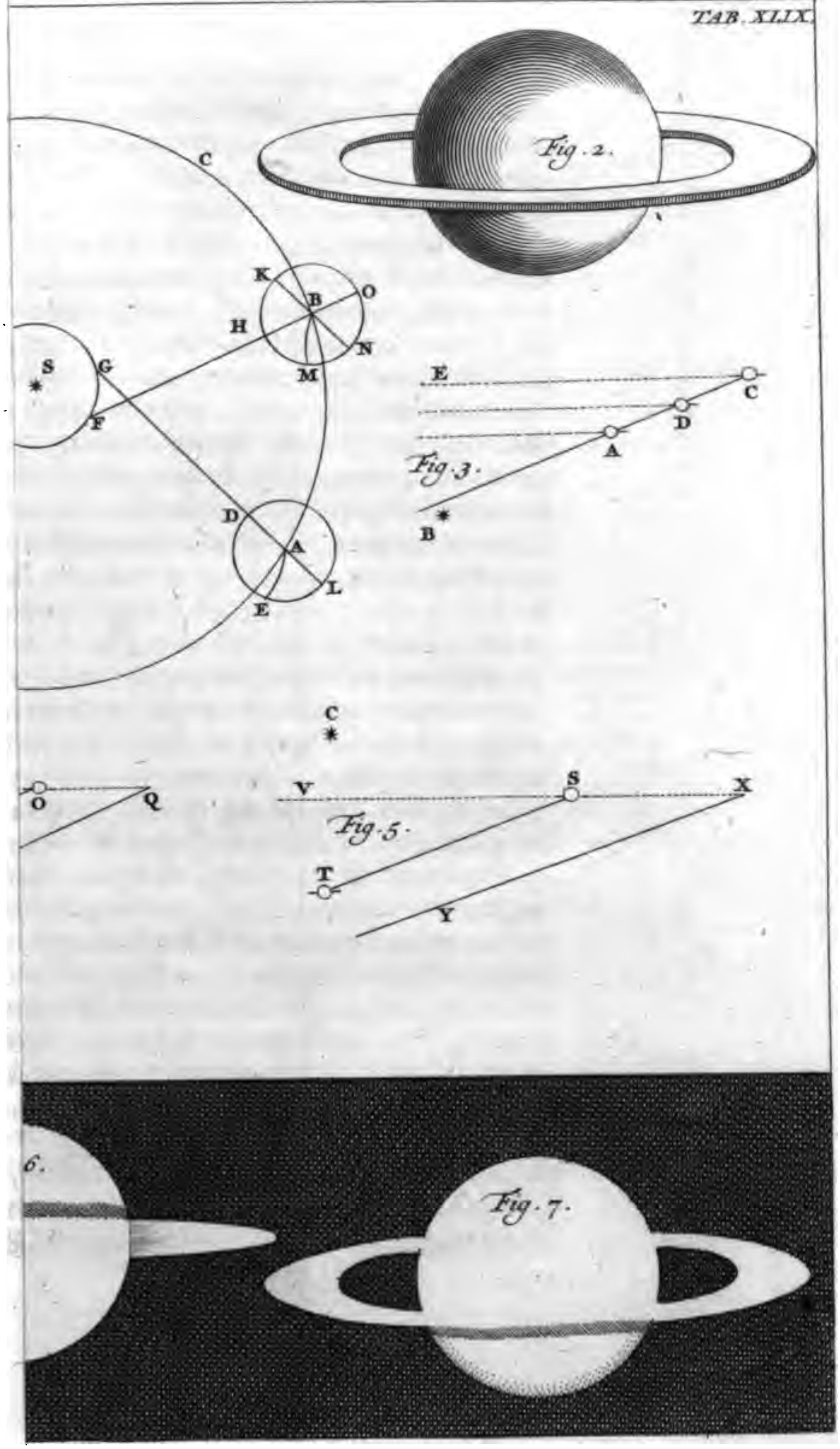
*Majorem Saturni diametrum neceſſario Æquatori parallelam ſemper videri.*

Ajo itaque in omnibus prædictarum phaſium, poſito, ut hactenus fecimus, parallelum eſſe annuli planum plano æquatoris, neceſſario fieri ut major diameter Saturni, ſive ellipſeos ejus cui annulus aſſimilatur; ſemper æquatori circulo parallela ſpectetur, planè quemadmodum revera contingere noſtris aliorumque obſervationibus ſupra probavimus. Quum enim viſus noſter reſpectu cæleſtium in centro æquatoris circuli, atque adeo in plano ejus collocatus ſit, cui plano planum annuli parallelum ponitur, neceſſe eſt maximam longitudinem annularis ellipſeos eidem æquatori circulo parallelam extendi: eâdem prorſus ratione, quâ, ſi in aëre plano terræ parallelum circulum ſuſpendamus, oculo noſtro altiorem, indeque paſſibus aliquot retro abſiſtamus, major diameter ellipſis quam ſuſpenſus circulus viſui offert Horizontis circulo æqui diſtare comperietur. Hod enim proculdubio eventurum, cuivis vel citra experimentum intelligitur.

*Revera tamen minimum quid nonnunquam aberrare.*

Eſſe autem annuli planum plano æquatoris omnimodis parallelum, etſi obſervationibus, quas quidem expendimus hactenus, minimè repugnantibus ſtatuere licuit; exiguum tamen quid deeſſe, quo minus omnino perfectus ſit eorum parallelismus, alia ratione deprehenditur. Etenim ſi prorſus inter ſe parallela forent utraque plana, ſequeretur ut cum in pr. ♈ & ♎ Saturnus ſpectaretur, omnium arctiſſima annuli ellipſis, & quaſi recta linea exſtteret, latiſſima verò in pr. ♋ & ♑. Atqui arctiſſimam annuli phaſium in gr. 20½ ♒ & ♓ cadere invenimus, ut in ſequentibus demonſtrabitur; ac proinde latiſſimam in gr. 20½ ♊ & ♐. Non igitur exactè parallela eſſe plana annuli & æquatoris hinc patuit; ideoque nec ſemper revera parallelam, licet ita videatur, magnam Saturni diametrum æquatori circulo fore. Quæſitoque per ſphærica triangula, quibus in locis & quanta ſit maxima inclinatio; inveni eam gr. 4. 8'. quando Saturnus in gr. 25, 15'. ♊ & ♐ verſatur. Tali nimirum angulo, nec unquam majori, anſarum linea circulum æquatori parallelum per Saturnum tranſeuntem iis in locis interſecabit; qui cum ſit adeo exi-

guus,




Digitized by Google

Digitized by Google

gius, vix puto obſervabilis erit: aliis autem locis multo minus. Nam iis quidem quæ quadrante Zodiaci inde abſunt, nempe cum gr. 25.15'. ♍ aut ♓ Saturnus obtinebit, prorſus parallela æquatori eadem anſarum linea conſpicietur. Eclipticæ vero parallela fiet Saturno gr. 20½ ♊ aut ♐ tenente: quippe quam in locis per quadrantem circuli inde diſtantibus, nempe in gr. 20½ ♍ & ♓, maximo angulo interſecat. Hunc autem maximum angulum quo linea anſarum eclipticam interſecat eſſe circiter gr. 23½ obſervationibus anni 1655, 1656 & 1657 apparuit, talemque ad iſta ſupputanda adſumſimus. Fortaſſe autem, longo ſæculorum lapſu, ſenſim omnia hæc loca mutari continget, ſimili quodam motu Saturni globum inclinante atque in Tellure noſtra eſt is qui præceſſiones æquinoctiorum efficit: atque ita phaſium quoque omnium loca transferri neceſſe erit. Hoc vero non tam facile in cæteris phaſibus quam in rotunda pateſcet, ad cujus conſiderationem deinceps veniendum.

*Rotundæ phaſeos cauſa.*

Schema itaque repetenti manifeſtum eſt Saturnum integro orbitæ ſuæ circuitu non poſſe non ad eum locum bis pervenire, (eſto in B & D) ubi planum annuli recta ad nos dirigatur, productumque in oculos noſtros incurrat. Quod quidem in locis è diametro oppoſitis contingeret, inque iiſdem perpetuò, ſi ex Sole Saturni motum proſpiceremus; at nunc propter motum Terræ in ſua orbita annuum, nonnulla oritur inæqualitas. Annulo igitur ſecundum latus inſpecto, nec niſi rectam lineam referente, quum neutra planarum ejus ſuperficierum appareat, ad nihilum rediguntur brachia ac prorſus intereunt, ſolo rotundo Saturni corpore quod intueamur reliquo. Cujus phænomeni primum teſtem Galilæum ſupra commemoravimus, qui anno 1612 ſimplicem hanc Saturni formam obſervaverit. Inde verò poſt annos 30 Gaſſendum alioſque complures; ac nos etiam denique anno 1656. Verùm enim ſi hoc tantum annuli poſitu anſæ evaneſcerent, nequaquam tanto tempore perſtare rotunda phaſis poſſet atque obſervationes teſtantur, toto enim ſemeſtri rotundus Saturnus ſpectatus fuit. Quamobrem por-

ro quærendum eſt quæ cauſa, præter eam quam jam attulimus, anſas quandoque cerni prohibeat: eſt autem quæ ſequitur manifeſtiſſima.

Frequenter nimirum evenire conſtat Saturno circa locos modo dictos B vel D commorante, ut tum hujuſce tum Solis reſpectu ita poſiti ſimus, ut ſi produci planum annuli intelligatur, id inter nos ac Solem tranſiturum ſit: velut in ſchemate, cum Saturnus prope D conſiſtit, nos autem cum Tellure in E. Quo fit ut illam annuli ſuperficiem quæ ſolis radiis illuminatur conſpicere nequeamus, ſed alteram tantummodo quæ tunc umbræ vices patitur. Nulla itaque ne hîc quidem brachia Saturno annulus præſtat, ſed oculis noſtris ereptus orbum ac ſolitarium relinquit. Atque hæc cauſa ad continuos quinque aut ſex menſes rotundæ phaſi interdum ſufficit, uti poſtea accuratius docebimus.

At non immerito dubitari poſſit, cur & hôc & præcedenti quoque annuli poſitu cum planum ejus rectà ad nos vergit, non ſaltem exterior ejus limbus à Sole illuſtratus appareat: quid enim dicemus? anne tam tenue eſſe totum annuli corpus, ut licet revera ſplendeat extrema ejus margo, exilior tamen ipſa ſit quam quæ noſtris teleſcopiis percipi poſſit? Nequaquam: verùm res eadem quæ cauſam hanc prætexi vetat, eadem veram cauſam quoque haud dubiè ſuppeditat: faſcia nimirum illa reliquo Saturni diſco obſcurior, quam & rotundo illo apparente, & rurſus brachiis aucto, nobis viſam narravimus. Hæc ita comparatum eſſe exteriorem illum annuli ambitum evincit, ut aliqua quidem craſſitudine præditus ſit, verum ejus naturæ, ut ſolis lumen, vel nihil prorſus, vel certè leviter admodum reflectat. Quia enim in Saturno etiam brachiis prædito tractus iſte nigricans animadvertitur, nempe cum ſuperficiem annuli eandem quæ à Sole illuſtratur deſpicimus; quo poſitu nulla ejus regio obumbrata oculis noſtris obverſa eſt; ſequitur nigredinem illam ex alia cauſa manare non poſſe, niſi quod ejuſcemodi quadam materia annuli margo cooperta ſit, quæ non perinde ut reliqua ejus ſuperficies repercutiendo lumini ſit idonea.

*Quid ſit in Saturni diſco Zona nigricans.*

nea. Sic in lunari quoque diſco maculas aliquas, cæteris partibus multo obſcuriores, cernimus; quæ quidem non planè omni luce defectæ apparent, verùm ſi æquè procul ac Saturnus à Sole diſtarent, ubi tantum centeſimam partem ejus, quod nunc accipiunt, luminis ab illo mutuarentur; credibile eſt penitus nobis inviſibiles fore, niſi quatenus lucidioribus undique terminantur; præſertim ſi tenuem modo lineam, ut Saturnii annuli margo, conſtituerent. Alioqui vel illud forſitan dici poſſit, materiam quandam aquæ ſimilem, aut certè lævi & ſplendida ſuperficie præditam, extrema annuli præcingere, quæ unico tantum veluti puncto Solis radios reflectens, nequaquam nobis conſpicua erit, ut rationibus opticis clarum eſt.

Sed quæ ad rotundam phaſin attinent ulterius etiam expendamus, in qua plura animadvertenda ſuperſunt. Diximus paulò ante, tunc eam potiſſimum exiſtere, cum productum annuli planum inter nos Solemque medium tranſit. Hoc verò quando contingat, quo pacto cognoſcere poſſimus, atque ex Aſtronomicis tabulis definire, deinceps explicandum eſt. Sit itaque denuo Saturni orbita A B C, Telluris annua D E F, locus ſolis L. TAB. I. fig. 4.

Jam quia poſitum fuit, Saturni axem, qui ad annuli planum erectus eſt, ſemper ſibi parallelum ferri, ſequitur communem quoque planorum annuli & orbitæ interſectionem uni cuidam lineæ ſemper fore parallelam. Eſto ea linea per Solem ducta A C, quæ proinde in cælo locum Saturni æquinoctiorum deſignabit. Poſito igitur Saturno in H, Tellure verò in D, utroque ad partem eandem rectæ A C, verum ita ut minus ab ea Saturnus quam Tellus diſtet: neceſſario interſectionis linea planorum annuli & orbitæ Saturni H M, quæ nimirum ex H parallela ducitur A C inter Solem L, Terramque in D poſitam excurret, ac propterea annuli quoque planum manifeſtò inter utrumque medium incedet. Quod ubi contingit, rotundæ phaſi locum eſſe demonſtravimus. Contra verò, cum Saturnus quidem ac Tellus ad eandem partem rectæ A C conſiſtunt, verum ita

ut

Digitized by Google

ut illa propius ad eam accedat, ut cum ille eſt in N, hæc in F: vel cum diverſas partes reſpectu A C obtinent, velut cum Saturnus eſt in N, Tellus in $f$; utroque caſu linea interſectionis annuli atque orbitæ Saturni, ut hîc N Q, quæ nimirum ipſi A C æquidiſtans acta eſt, Terram Solemque ab eadem parte habebit. Unde intelligitur, utrovis poſitu eandem annuli ſuperficiem à Sole & nobis aſpici; quod requiri jam ſupra advertimus, ut brachia Saturni aut anſæ apparere poſſint. Quanquam ne ſic quidem ſemper cernuntur, uti poſtea manifeſtum fiet.

*Saturnus quando neceſſario rotundus ſpectari debeat.*

Hi autem diverſi ſitus ut ex tabulis Aſtronomicis parvo negotio cognoſcantur, indeque rotunda phaſis, quatenus ab hac cauſa pendet, prædici poſſit, ſciendum eſt, quandocunque Saturni locus apparens locuſque ex Sole ſive eccentricus, diverſas partes obtinent ejus loci quem inter fixas deſignat recta A C, (quam in gr. 20½ ♍ & ♓ incidere poſt hæc oſtendemus) id ejuſmodi ſitum Saturni ac Telluris indicare qualis in H & D, ut nimirum ab eadem parte ambo reperiantur rectæ A C, atque propior huic Saturnus conſiſtat; eoque tunc rotundam phaſin conſpiciendam dari. Illo enim poſito, ſit Saturnus in H. Primùm itaque dico ab hac parte lineæ A C etiam Tellurem conſiſtere. Etenim ſi ad alteram partem ſita eſſe dicatur, velut in P; liquet rectam ex P ad H ductam & verſus fixas porro continuatam, quæ locum Saturni apparentem, itemque rectam L H, quæ producta locum ejus ex Sole demonſtrat, ab eadem parte puncti æquinoctiorum, quod L A producta inter fixas determinat, utraque ea loca exhibituras; contra quàm poſitum fuerat. Eſt ergo Tellus neceſſario ab eadem parte lineæ A C, qua Saturnus H. Eſto jam ea alicubi puta in D. Quoniam igitur D H ad fixas protracta locum Saturni apparentem deſignat, L H vero, uti diximus, locum ejus eccentricum, inter quæ loca intercedere ponitur locus æquinoctiorum quò tendit L A, neceſſe eſt rectam D H tandem ipſam L A interſecare, ideoque punctum D, locum videlicet Telluris, amplius diſtare à linea A C quam punctum H in quo Saturnus.



Digitized by Google

nus. Conſtat itaque quando locus Saturni apparens & eccentricus ad partes diverſas cadent loci æquinoctiorum; neceſſario tunc Tellurem cum Saturno ab eadem parte rectæ A C inventum iri, atque ita ut minus ab ea Saturnus removeatur. At vero quoties apparens locus Saturni itemque eccentricus ab eadem parte habentur rectæ A C, ſive loci æquinoctiorum Saturni, inde certo colligi ajo, Tellurem ac Saturnum ita poſitos eſſe uti in F & N. Nempe ut vel diverſas ad partes ipſius A C collocati ſint, vel ad eaſdem quidem, ſed ita ut Saturnus amplius ab ea quam Tellus diſtet. Ideoque, ſecundum ante demonſtrata, eandem annuli ſuperficiem quæ à Sole illuſtratur oculis quoque noſtris obverſam eſſe. Nam cum L N producta oſtendat inter fixas locum Saturni excentricum, F N verò locum ejus apparentem, ac uterque cadere ponatur in partem eandem loci illius quem inter fixas exhibet L C: manifeſtum eſt rectam F N ab N porrò productam neque ſecare debere neque parallelam eſſe rectæ L C, ſed ſemper ab ea magis recedere. Quare neceſſario punctum F vel propinquius erit rectæ A C quam punctum N, ſi ſint ambo ad eandem partem dictæ lineæ; vel N ad iſtam, F ad illam partem ſitum erit. Quod probandum erat.

Denique advertendum etiam, quando vel Saturni locus ex Sole, vel apparens locus incidit in alterutrum æquinoctiorum, quæ determinat producta A C, nempe in gr. 20½ ♍ vel ♓, neceſſario quoque rotundam phaſin exoriri. Si enim locus ex Sole inibi reperiatur, hoc eſt, ſi Saturnus occupet punctum A vel C, tunc planum annuli protractum per Solem tranſire liquet: unde ſequitur neutram annuli ſuperficiem tunc luce aliqua perfundi. Rurſus vero cum locus ejus apparens incidit in dictos æquinoctii locos, hoc eſt, quando recta à Tellure ad Saturnum extenſa parallela incedit ipſi A C; velut cum Saturnus ſitus eſt in O, tellus in *f*, eo poſitu productum annuli planum oculo noſtro occurrere conſtat, quoniam communis ejus interſectio cum plano orbitæ Saturni ipſa eſt O *f* recta: Unde fit ut neutram ſuperfi-

 ciem

ciem annuli, etiamſi altera jam illarum Solis radiis ſplendeat, conſpicere poſſimus.

*Quænam Saturnicolis ſint loca æquinoctiorum.*

Nunc illud videamus, quemnam Eclipticæ locum teneat recta A C Saturni æquinoctiorum linea: quam quidem in ♍ & ♓ gr. 20½ cadere diximus, verum qua ratione id ex obſervationibus collegerimus declarandum eſt.

Saturnum brachiis carentem ac prorſus rotundum ſpectavimus à Menſe Decembri anni 1655, uſque in Jun. 1656. Quæ phaſis ex ea cauſa, quam modo retulimus, tanto tempore durare potuit, ſi linea A C eum ipſum locum obtinere ponatur quem & Saturnus tenebat tunc cum Soli eſſet oppoſitus, hoc eſt, ♍ gr. 20. Hinc enim fieri debuit ut toto illo tempore Saturnus ac Tellus ab eadem parte lineæ A C ſimul conſiſterent, atque ita quidem ut Saturnus ei vicinior eſſet; ſemel autem eodem momento, nempe oppoſitionis tempore, in ipſa A C reperirentur: unde non niſi rotunda phaſis potuit exiſtere, ſicut ex prædictis intelligitur.

Cæterum uti non admodum verſimile eſt (etſi fieri potuerit) eo ipſo tempore oppoſitionem illam contigiſſe cum Saturnus in æquinoctii ſui linea A C ſitus eſſet, ita non verebimur hanc lineam dimidio gradu emovere loco illo, atque in gr. 20½ ♍ eam transferre; quum hoc poſitu melius ſatisfiat aliis rotundæ figuræ obſervationibus, anni 1642 & 1612, ac nihilo ſecius noſtra illa anni 1656 conciliari queat, ut ex ſequentibus liquebit. Poſita itaque A C in gr. 20½ ♍ & ♓ ſequitur rotundam phaſin, ab uſque principio Auguſti anno 1642, ad Febr. 1643, continuè perſeveraſſe, prorſus quemadmodum à Gaſſendo aliiſque fuit adnotatum. Erat enim ineunte Auguſto locus Saturni eccentricus in 20 gr. ♓, hoc eſt, dimidio gradu præcedebat locum æquinoctii: at locus apparens in 24 gr. ♓, atque ita gr. 3½ eundem æquinoctii locum tranſierat. Quare ſuperficiem annuli illuminatam Gaſſendus nequaquam conſpicere potuit, ſed eam quæ tenebris tegebatur ſibi obverſam habuit. Et ſic quidem locus Saturni apparens eccentricuſque perpetuo diverſis in partibus loci æquinoctiorum perſtiterunt uſque ad initium fere

Febr.

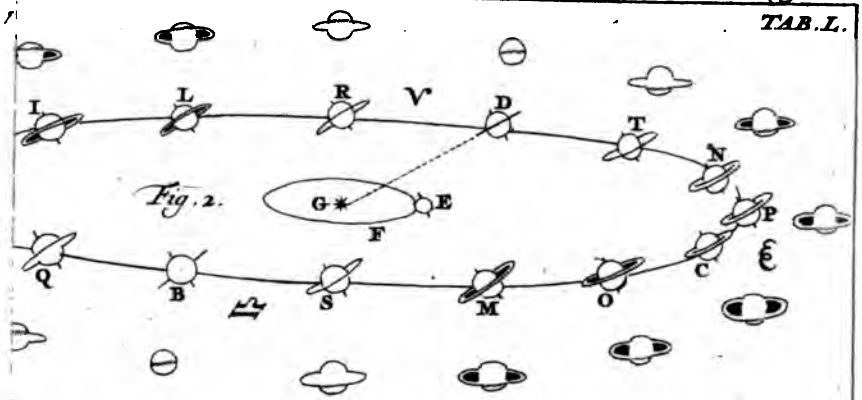



Fig. 2.

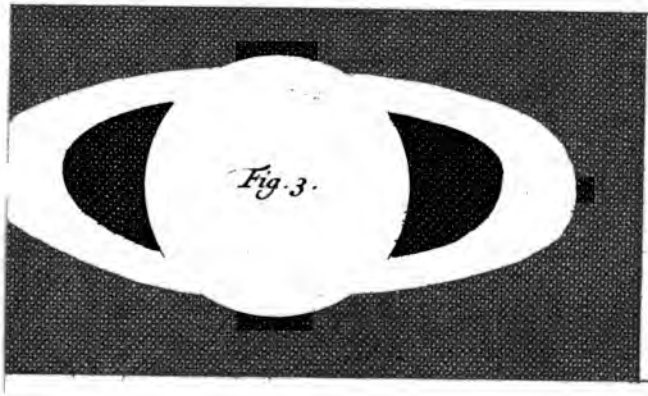


Fig. 3.

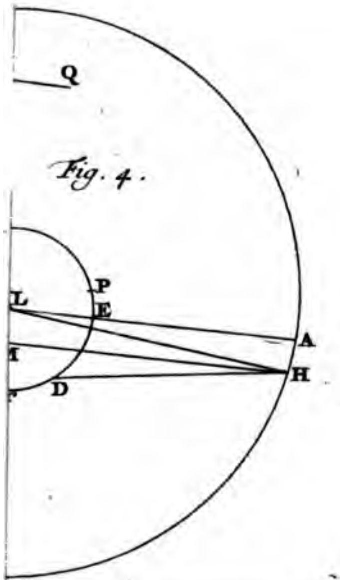



Fig. 4.

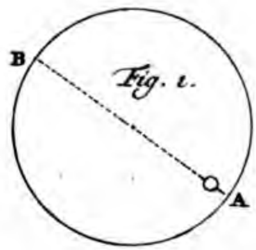



Fig. 1.

Digitized by Google

Digitized by Google

Febr. 1643, unde non niſi rotunda forma prodire potuit, ut antea demonſtratum eſt.

Idem quoque phænomenon anno 1627, proculdubio ſeſe obtulit, ſed obſervatorum penuria an ſupinitate præteriit inobſervatum; cum nemo, quod ſciam, prodiderit, utrum Saturnus eo anno cum globulis apparuerit an ſecus.

Anno autem 1612, à Galilæo primò omnium rotunda facie animadverſus eſt. Scribit is ad Marc. Velſerum Epiſtola de Solaribus maculis 3. circa ſolſtitium quidem illius anni, tricorporem adhuc Saturnum ſibi viſum, inde verò, cum duobus menſibus atque amplius teleſcopio eum inſpicere omiſiſſet, ut qui nullam formæ mutationem animo præſagiret, poſtea nihil minus cogitanti ſolitarium oblatum, talemque deinceps in illam uſque diem, quæ prima Decembris erat, permanſiſſe. Quæ quidem obſervatio hactenus hypotheſi noſtræ conſentit; ut ſi eo tranſitu lineæ A C rotundus apparere Saturnus debuerit, id hoc anno neque alio accidere fuerit neceſſe. Sed cum per totum hunc annum Saturni locus, quà apparens, quà eccentricus, ab eadem parte manſerit loci æquinoctiorum, ſive ♓ gradus 20½; videbatur ex præcedentibus colligendum, ſalvis brachiis ſuis eum prælabi potuiſſe, quod tamen contra evenit. Et ſexto quidem Septembr. dicti anni 1612; quo tempore jam rotundum Galilæus reperit, erat ejus locus ex Sole ſimul & apparens, in gr. 14, 44′ ♓. Hoc eſt g. 5. 46′ citra locum æquinoctii ſui: Adeo ut ſolares radii atque ii qui à viſu terricolarum fluebant in eandem annuli Saturnii ſuperficiem inciderent: non tamen angulo g. 5. 46′ deſuper in planum ejus directi, ſed gr. 2. 15′ duntaxat. Hic enim elevationis angulus, ut hoc obiter adnotemus, ſic ſe habet ad illum gr. 5. 46′, quo Planetæ locus diſtat ab æquinoctio ſuo, quemadmodum apud nos declinatio Solis ad ejuſdem ab æquinoctio diſtantiam. Quandoquidem non aliud reſpectu Saturni eſt planum annuli ſui, atque nobis eſt planum æquatoris, ſimilique etiam angulo ad eclipticæ planum inclinatur. Proinde cum cognita eſt diſtantia loci Saturni eccentrici ab æquinoctio ſuo,

ſi ſcire libeat quali angulo Solis radii in ſuperficiem annuli deferantur; quærendum in tabula declinationis Eclipticæ, qualis apud Aſtronomos in uſu eſt, quanta ſit declinatio loci alicujus qui tantundem à princ. Arietis abſit. Ea enim eſt ipſe angulus quæſitus. Ac ſimili quoque ratione cum data erit diſtantia loci Saturni apparentis ab æquinoctio ſuo, hoc eſt, à gr. 20½ ♍ aut ♓, invenire licebit quonam angulo deſuper planum annuli nos inſpectemus; qualemque propterea ellipſin ille nobis exhibere debeat. Ex eadem nimirum tabula capiendo declinationem huic diſtantiæ à pr. Arietis reſpondentem, quæ declinatio rurſus hîc quæſitum angulum æquat. Quorum demonſtrationem adferre operæ pretium non eſt, quippe quam Aſtronimiæ periti facile perſpicient.

Illud verò videndum, qui evenerit ut viſu noſtro ac Sole ſimul ſupra planum annuli plus quam 2 gr. altis, nullum tamen brachiorum apud Saturnum veſtigium apparuerit. Anne hæc fortaſſe cauſa fuit quod ellipſis annuli, tam obliquè inſpecta ut magis tenuiſſimæ lineæ ſimilitudinem præferret, exiliorem lucem emittebat quam quæ Galilæi tubo percipi poſſet. Hoc quidem non improbabile videri queat, niſi eodem tubo, circa ſolſtitium ejuſdem anni 1612, brachia Saturni ſive bini illi, ut tum putabant, ſatellites Galilæo animadverſi fuiſſent, quo tempore Saturnus obſervabatur circa gr. 18, ♓. hoc eſt gr. 2½ ab æquinoctio ſuo remotus, ideoque viſus noſter vix uno gradu plano annuli ſuperior. Etenim ſi hoc poſitu brachia cerni potuere, multo clarius cerni debuiſſent tunc cum gr. 2. 15′ ſupra idem planum viſus extolleretur, initio nimirum Septembr. magiſque etiam 14 Nov. ejuſdem anni 1612, tempore ſtationis Saturni; quia tunc gr. 11. 10′ ♓ tenebat, eoque gr. 9. 20′ ab æquinoctio ſuo aberat; adeo ut angulo gr. 3. 42′ radii viſus in planum annuli deſcenderent. Atqui hîc, vel certe circa hæc loca brachiorum expers manſit, quum ſatis utique diligentem ac intentum obſervationibus Galilæum fuiſſe per eos dies credibile ſit, qui rotundæ phaſeos miraculo nuper eſſet excitatus.

Ita-

Digitized by Google

Itaque in tenuitatem brachiorum, cur ea penitus latuerint cauſa conferri non poteſt. At neque transponendo amplius Saturni æquinoctiorum locum, quicquam proficimus; ne quidem ſi mobilem ſtatuamus lento quodam progreſſu, ad ſimilitudinem noſtrorum æquinoctiorum, quæ ſenſim in præcedentia referuntur. Quamobrem non aliam hujus rei cauſam eſſe crediderim quam quæ nunc dicetur.

Certum eſt cognitæque experientiæ, ſuperficiem quamlibet ab eodem lumine plus minuſve illuſtrari, prout directis vel obliquis radiis expoſita eſt: quod & à Galilæo, dialogo 1. de Mundi ſyſtemate, optimè eſt demonſtratum. Quamobrem cum exiguo admodum angulo ſupra annuli Saturnii planum Sol attollitur, puta gradus unius vel duorum vel etiam duorum cum dimidio, hoc eſt, cum Saturni locus eccentricus non ultra gr. 6. ab æquinoctio ſuo aberit; etiam prætenui tantum luce annuli ſuperficies à Sole impertietur. Hanc autem, ita leviter ſplendentem, veriſimile eſt à meris tenebris nos diſcernere non poſſe, præſertim Saturnii globi vicino fulgore præpeditos; eoque anſas tunc nullas animadverti. Qua tamen in re illud ante omnia ſtatuere neceſſe eſt, ſuperficiem annuli non eſſe aſperam montibuſque obſitam, veluti maxima ex parte Lunæ noſtræ eſt ſuperficies: ſed æqualem planamque velut in iis Lunæ regionibus, quas nonnulli maria eſſe ob inſignem planiciem arbitrati ſunt.

Alioqui enim, ſicut Luna plena circa diſci ſui extrema, ubi tamen obliquos Solis radios excipit, nihilo languidiori lumine quam verſus medias partes cernitur, ſcilicet quia illic tota montoſa atque aſpera eſt, ita annuli quoque ſuperficies ſi ſimili natura prædita foret, non ſecus obliquè incidentibus radiis quam directis ſplendeſceret. Quamobrem neceſſario plana, uti diximus, cenſenda eſt. Atque hinc jam intelligere licet cur Galilæo à Menſe Septembri anni 1612 uſque in Febr. 1613, quoad nempe Heliacè Saturnus occideret, nullæ circa eum anſæ conſpicerentur. Quia nempe inde à Septembri continuè locus Saturni eccentricus ad æquinoctii locum appropinquavit, eoque altitudo Solis ſupra an-

nuli planum, quam initio Sept. tantum gr. 2. 15′, fuiſſe diximus, ſimul imminuta eſt. Pari ratione nec Gaſſendus brachia ulla percipere potuit menſe Febr. anni 1643. etſi tunc quoque Sol oculuſque obſervantis eandem annuli ſuperficiem intuebantur; ſcilicet quia Saturni locus eccentricus in gr. 26. ♓ inveniebatur, hoc eſt 5½ gr. à loco æquinoctii, eoque altitudo Solis ſupra annuli ſuperficiem tantum g. 2. 11′. Denique & anno 1656, menſis Martii diebus aliquot, quibus ſimiliter eadem annuli ſuperficies ad nos Solemque ſpectabat, multo minus brachiorum ullum veſtigium apparere debuit, quod nunquam dimidio gr. ſupra planum annuli Sol attolleretur. Nam reliquo tempore fulſionis illius, diverſas partes loci æquinoctiorum locus Saturni ex Sole atque obſervatus locus obtinebant, unde ex ſuperius allata cauſa brachiorum expertem cerni oportuit.

Neque verò magis conſpicuum nobis annulum fieri credendum eſt, ſi altius ſupra planum ejus oculus attollatur, Sole tamen ex obliquo tantum radiis ſuis eum perſtringente, quemadmodum contigit dicta Saturni ſtatione ad 14 Nov. 1612; quippe quo tempore Sol gradu 1. 36′ ſupra planum annuli aſcenderat, viſus autem noſter gr. 3. 53′. Idem enim in quacunqne plana ſuperficie experiri licet, in quam ſi à latere radii luminis incidant, non apparebit illuſtrior quocunque in loco viſus ſtatuatur, ſed tum demum, ſi radios à lumine rectiores accipiat. Uti contra quoque ſi amplius ad lumen obverſa directiuſque illuminata fuerit, non refert quàm obliquè in eam radii viſus incidant, ſed undecunque ſpectata æque lucida apparebit. Atque ita fit ut cum Sol paulo altius ſupra planum annuli ſeſe extulit, tribus puta gradibus aut paulo amplius; viſu licet noſtro non niſi uno gradu extante; ſplendere jam nunc annulus incipiat, Saturnoque brachia adnaſcantur. Sicut anno 1612. circa ſolſtitium accidit, Saturno ex Sole circa gr. 12. ♓, hoc eſt, gr. 8½ ab æquinoctio ſuo agente, ac proinde Solis altitudine ſupra planum annuli graduum 3. 23′: Galilæi verò oculo vix uno gr. ſupra idem planum elevato. Videbatur enim Saturnus

nus in gr. 18. ♓, hoc eſt 2½ gr. à loco æquinoctii, quæ diſtantia dat declinationem gr. unius.

*Saturnus brachiorum expers futurus quo modo cognoſcatur.*

Ut igitur ſecundum hæc de rotunda phaſi judicium feratur, illud in primis reſpicere oportet, quod gradibus ab æquinoctio ſuo, hoc eſt, à gr. 20½ ♍ vel ♓, Saturni locus eccentricus abſit. Ac mihi quidem phænomena antecedentia expendenti, videtur ita ſtatuendum, ut quoties non amplius quam 6 gr. circiter in alterutram partem, à dictis locis Saturni locus ex Sole diſtabit, nunquam brachia ejus conſpici queant, quicunque demum oculi noſtri ſitus fuerit; hoc eſt, nulla ducta ratione Saturni loci apparentis. Quod tamen ita accipiendum eſt, ſi perſpicillis non melioribus quam quibus Galilæus & Gaſſendus uſi ſunt Saturnus inſpiciatur. Nam ſi noſtris ſimilia adhibeantur, forſitan jam in illa 6 graduum diſtantia tenue quoddam brachiorum exordium percipi poſſit. Certè anno 1656, 13. Oct. renata illa vidimus, cum Saturni locus ex Sole tantum gradibus 6. 46′. æquinoctii ſui punctum prætergreſſus eſſet. Erant autem æquè conſpicua ferè atque ante phaſin rotundam, anno 1655. At ii qui minoribus teleſcopiis eum tunc obſervitabant, ut Joh. Hodierna, penè adhuc rotundum repererunt: ait enim is, tantum tenuiſſimos quoſdam veluti radios utrinque è lateribus Saturnum vibrare viſum. Quamobrem noſtris teleſcopiis fortaſſe arctiores paulò prædicti limites ſumendi ſint; quod tamen minimum quid erit, ſequentiumque annorum experientiâ definiendum.

Rurſus cum amplius 9. gradib. vel forſan ſupra 8. gr. ſolum, ab æquinoctiis ſuis ſive 20½ gr. ♍ aut ♓ locus Saturni eccentricus diſtare invenietur, jam inde brachiis anſiſve præditum dicemus: nullâ ne hic quidem apparentis loci conſideratione, quoniam hinc jam apparens locus & eccentricus ab eadem parte loci æquinoctialis habentur; ac propterea eadem annuli ſuperficies, per ea quæ ſupra demonſtrata ſunt, Soli & viſui noſtro obverſa eſt, idque ita ut Sol plus tribus gr. ſupra ipſam elevatus ſit, viſus vero noſter ut minimum gr. uno: quo fit ut brachia ſaltem tenuia animadverti debeant.

At

At cum nondum gr. 8 aut 9, plus verò quam ſenis, eccentricus locus Saturni à 20½ gr. ♍ aut ♓ aberit, videtur etiam apparens locus expendendus eſſe, nempe circa quadratum quem vocant Saturni cum Sole aſpectum. Fieri enim poterit ut non ultra gradus unius ſemiſſem locus apparens ab æquinoctii loco remotus ſit, ideoque viſus noſter tantum 12′ ſuper annuli ſuperficiem exurgat; quæ cum à Sole ſimul debiliter illuminetur, vix puto ſe videndam præbebit. Quum autem duo contingant quadrati aſpectus ſingulis Saturni fulſionibus, priori eorum ita demum illud quod diximus perpendere opus erit, ſi locus planetæ ex Sole præcedat gr. 20½ ♍ aut ♓, poſteriori verò non niſi ſequatur. Nam ſi ſecus fuerit jam certo brachiis auctus cernetur.

Et ſic quidem quod maximè perplexum in toto hoc negotio inerat, nulla diſſimulata difficultate, pertractavimus. Illud enim inquirere voluimus an certis locis rotunda phaſis alligari poſſet, ita ut omnibus huc uſque obſervatis fieret ſatis. Quod & præſtitimus tandem, etſi arctis adeo limitibus circumſcripti, ut ne minimum quidem ultra citrave ab iis diſcedere ſalvis apparentiis licuerit. Simul verò hoc operæ pretium fecimus, quod de futuris Saturni phaſibus haud dubia prænuntiare in poſterum licebit. Etenim ſi modo tabularum Aſtronomicarum ope inveniatur, quo tempore Saturni locus ex ſole ſive eccentricus, cadat in gr. 20, 30′ ♍ vel ♓; ſenis menſibus qui id tempus præcedunt totidemque ſequentibus brachia nulla percipi poſſe manifeſtum erit; quoniam ſcilicet in menſes ſingulos gradu uno Planetæ locus ex Sole promovetur. Præterquam quod aliquando uno etiam atque altero menſe citius rotunda phaſis exiſtet, aliquando tanto diutius videri perſeverabit; ſi nempe quadrante cæli per id tempus Saturnum à Sole diſtare contingat, locuſque Planetæ eccentricus, ea qua diximus lege, præcedat vel ſequatur ♍ aut ♓ gr. 20. 30′.

Secundùm hæc igitur, quoniam in gr. 20, 30′ ♓ incidit locus eccentricus die 12. Jan. 1672″, exiſtimo anno 1671 & 1672 Saturnum brachiis cariturum; non toto utriuſque anni tem-

*Quibus temporibus rotunda phaſis reverſura ſit prædicitur.*

tempore, ſed hoc pacto, ut menſibus quidem Aprili, Majo, Junioque anni 1671, nondum iis ſpoliatus cernatur, ſed tenuia etiamnum utrinque extent qualia ſub finem anni 1656 obſervavimus. Julio autem aut Auguſto gracileſcant prorſus tandemque diſpareant & rotundum Saturnum relinquant. Quo vultu non tantum ad Heliacum occaſum uſque conſpiciendus erit, hoc eſt uſque ad finem Februarii anni 1672; ſed eundem quoque exoriens rurſus menſe Aprili referet, nec amittet niſi Julio menſe aut Auguſto. Circa hoc enim tempus adcreſcere denuo brachia cernentur, ac paulatim evidentiora fieri; tandemque etiam ſingula prope medium Saturni orbem bifida evadent, quemadmodum ab anno 1656 deinceps augeri ea vidimus.

Manebunt autem ad annum uſque 1685, quando rurſus evaneſcentia ſpectare continget, nempe circa Martii initium. Inde rotundus planeta obſervabitur per annum integrum, excepto eo tempore quo propter Solem deliteſcit. Adeo ut menſe Martio ſequentis anni 1686 brachia demum recuperaturus ſit, ſed tenui tantum incremento quandiu illa vice viſendus erit. Locum Saturni ex Sole reperio in gr. 20½ ♍ die ſecunda Sept. anni 1685, unde prædictas viciſſitudines conſequi neceſſe erat.

Rurſus verò anno 1701, 15 Jun. redit Saturni locus ex Sole ad ♓ gr. 20, 30'. Unde circa finem anni 1700, principiumque 1701, priuſquam Heliace occidat, rotundus lucebit, ac porro quoque ubi jam ex Solis radiis emerſerit, ea facie permanebit ad initium uſque anni 1702: à quo tempore ad occaſum uſque Heliacum tenuia fortaſſe brachia cerni poterunt. Abſque dubio autem, menſe Majo ejuſdem anni, cum denuo obſervari cœperit, reſtituta invenientur.

Atque ita porro ſingulis quatuordecim aut quindecim annis, nimirum bis ad ſingulas Saturni in ſua orbita revolutiones, rotunda forma conſpicienda dabitur; neque enim unquam æquinoctii ſui locos tranſire quin brachia amittat poteſt. Ac facile quidem accurata mutationum ejuſmodi tempora veſtigiis noſtris inſiſtendo, quilibet inpoſterum præfiniet,

niet, certiusſque etiam ubi renaſcentes Saturni anſas conſpexerit.

Cæterum ad eos obſervandos, quos hic adnotavimus, alatæ formæ ad rotundam tranſitus, Aſtronomos omnes intentos eſſe cupimus. In quorum prædictione ſi à veritate aut nihil aut pauxillum tantum aberraſſe nos invenient, tum procul dubio cauſas quoque horum phænomenôn germanas qualeſque revera ſunt ſibi explicitas credant. Sin longè hallucinati fuerimus, adeo ut brachiis præditus planeta cernatur, quo tempore ex ſententia noſtra vel maxime iis carere deberet; indicio id erit, quædam circa rotundam phaſin accidere nobis nondum ſatis perſpecta, nec ulli mortalium forſitan pervidenda. Nec tamen annuli propterea hypotheſin rejiciendam exiſtiment, quandiu reliquis quæ circa anſas animadvertentur ad amuſſim, uti hactenus, conſentiet.

*Quando latiſſima omnium anſæ apparituræ ſint.*

Porro in hiſce anſatis Saturni phaſibus, cum nulla adeo ſubita mutatio locum habeat, ideo nec tempora ſingularum tam accuratè ut in rotunda diſtinguere neceſſe fuit; ſed in univerſum ſcire ſufficit, phaſin anſatarum latiſſimam medio tempore inter duas rotundas incidere; ut proinde circa annum 1663 & 1664, illa reverſura ſit; iterumque anno 1678 & 1679; ac poſtea anno 1693. Reliquis enim inter iſtos intercedentibus annis, tanto anguſtior annuli ellipſis cernetur, quanto magis rotundæ phaſeos tempus imminebit. Et hactenus quidem eorum quæ circa Saturnum obſervantur cauſas ac tempora digeſſimus.

Nunc fortaſſe haud alienum propoſito videatur, ſi quemadmodum ex noſtra hac ſtatione hucuſque ſyſtema ejus contemplati ſumus, ita ad ipſius Saturni globum deinceps cogitationem transferamus, atque illud diſpiciamus, qualis inde univerſi facies, quænam futura ſint intervalla annorum menſium ac dierum, quæve æſtatis hyemiſque viciſſitudo, ac præſertim qualia ob annulum planetæ circundatum contingere eum inhabitantibus neceſſe ſit: ut nonnunquam longo tempore aliquos conſpectu Solis privet, aliàs rurſum nocturnas tenebras imminuat, arcus lucidi ſpecie horizonti il-

lo-

lorum ſuperſtans. Verum eo labore ſuperſedere rectius arbitror, tum quod Aſtronomiæ gnaris ſingula hæc expendere, ſibique ob oculos ponere, non ſit difficilè futurum; tum quod in his ipſis multi ſint, (ut alios mittam) quibus otioſa & inanis ejuſmodi diſquiſitio videretur; ac tanto quidem magis, quanto abſurdius putant ut animantia aliqua ratione prædita Saturnum ac reliquos Planetarum incolere credamus.

De magnitudine autem Saturni ejuſque à terris diſtantia operæ pretium videtur ut ſententiam noſtram his ſubjiciamus, ſiquidem & alio modo illas inquiſivimus quam quo fieri ſolet, & aliquanto aliter de utraque ſtatuimus. Nempe ſphærulam illam annulo cinctam quam ſub exiguis modo lineamentis ſpectavimus, diametrum quindecies circiter majorem habere, quam noſtra hæc in qua degimus terra, putandum eſt; abeſſe autem à nobis, cum poxima eſt, terræ diametris 100344; cum longiſſimè diſtat, 122000. Quæ quidem ſequenti ratiocinio nituntur. *De Saturni magnitudine & à terris diſtantia.*

Docuit nos novo ſuo ac divinitus invento ſyſtemate Copernicus, quamnam inter ſe proportionem ſervent ſingulorum à Sole Planetarum diſtantiæ, apparentes vero eorundem diametri quanto aliæ aliis majores ſint teleſcopii ope innoteſcit. Collatis ergo invicem rationibus utriſque, tum diſtantiæ tum magnitudinis apparentis, vera inde planetarum ad ſe mutuo, nec non ad Solem magnitudo cognoſcitur. Et ad Saturnum quod attinet, primùm annuli ejus diameter, quum in minima à nobis diſtantia comprehendatur angulo ſexaginta & octo ſcrupulorum ſecundorum; talem enim ad ſummum reperimus; cumque minima hæc Saturni diſtantia ad mediocrem Solis diſtantiam ſit fere octupla; ſequitur, ſi tam propinquus nobis fieret Saturnus quam Sol in diſtantia mediocri, apparituram tunc annuli diametrum octuplam ejus quæ nunc apparet, hoc eſt 9′, 4″. Solis autem diameter in media diſtantia eſt 30′, 30″. Ergo revera ea erit proportio diametri annuli Saturnii ad diametrum Solis quæ 9′, 4″, ad 30′, 30″, hoc eſt, fere quæ 11 ad 37. Diameter verò Sa- *Quanta appareat major Saturni diameter.*



Digitized by Google

turni ipſius, quam ſuperius diximus ad annuli diametrum ſe habere ut 4 ad 9, hoc eſt fere ut 5 ad 11, ad diametrum Solis erit paulo minor quam 5 ad 37.

Quanta vero ſit Saturni diameter ad Telluris diametrum collata haud æque certo definiri poteſt. Aſtronomi ita hoc inveſtigant, ut primò intervallum inter terram ac Solem ad certum terreſtrium diametrorum numerum revocent, inde quæſitam magnitudinum rationem eliciant. At in illo Solis terræque taxando intervallo nimium quantum inter ſe diſſentiunt; nec mirum, quum nulla adhuc tolerabilis methodus ad dimetiendum hoc ſpatium reperta ſit. Nam ſive per Eclipſes ſive per Lunæ dichotomias id deprehendere conentur, facile oſtendi queat inanem operam ſumi. Quare mihi quidem unica illa, quam dicam, ratio reliqua eſſe videtur, qua ſaltem veriſimiliter de Planetarum omnium ad terram magnitudine ac diſtantia ſtatui poſſit. Teleſcopio diametri Planetarum apparentes explorentur; ex his ſingulorum deinceps ad Solem comparata magnitudo inveſtigetur, ut de Saturno modo exemplum dedimus; omnibuſque perpenſis, ea Telluris ad cæteros aſſumatur magnitudo, quæ totius ſyſtematis ordini aptæque diſpoſitioni quàm maxime congruere videbitur. Ita cum proportio diametrorum Telluris ac reliquorum Planetarum ad Solis diametrum conſtituta fuerit, conſtetque inſuper quot ſuis diametris Sol à nobis diſtet, ex angulo videlicet quem ſubtendit diameter ejus apparens, jam terræ quoque ad Solem magnitudo nota erit; atque unà Solis diſtantia, tum à terra tum à cæteris Planetis, Terræ diametris æſtimabitur. Hanc itaque nunc viam ingredi placet, ideoque ſicut Saturnum cum Sole modo comparavimus, ita de reliquis quoque ſimile examen inſtituemus.

*Jovis terris proximi diameter apparens quanta obſervetur.*

Jovis diameter, cum proximè nobis adeſt, ſexaginta quatuor ſecunda ſcrupula comprehendere mihi videtur; quumque hæc ejus diſtantia ad mediam Solis diſtantiam ſit ut 26 ad 5, hinc ſi fiat ut 5 ad 26 ita 64″ ad aliud, invenientur 5′, 35″, amplitudo anguli quem obtineret Jovis diameter ſi tam propinquus nobis fieri intelligatur atque Sol in diſtantia me-

mediocri. Sol autem hîc apparet diametro 30′, 30″. Ergo Jovialis diametri ad Solarem hæc proportio erit quæ 5′, 35″ ad 30′, 30″, hoc eſt paulo major quam 1 ad $5\frac{1}{2}$.

Accuratè etiam diametrum Veneris dimenſus ſum, ea quam poſtmodum exponam methodo, invenique cum terris proxima eſt, non majorem fore quam octoginta quinque ſecundorum ſcrupulorum. Eſt autem diſtantia hæc Veneris perigææ ad mediam Solis à Tellure diſtantiam circiter ut 21 ad 82. Ergo ſi apud Solem Venus conſiſteret appareret ejus diameter duntaxat 21″, 46‴. Unde conſtat ita eſſe diametrum Veneris ad Solis diametrum ut 21″, 46‴ ad 30′, 30″, hoc eſt ut 1 ad 84. *Veneris diameter apparens.*

At Martis diametrum terris proximi non excedere 30″ deprehendi, etſi obſervatione non tam exacta quam qua in Saturno, Jove & Venere uſus ſum, quippe cujus rationem noviſſimo Martis ad Tellurem acceſſu nondum inveneram. Unde quum diſtantia Martis minima ſit ad mediocrem Solis ut 15 ad 41; colligitur ratio diametri Martis ad diametrum Solis ea circiter quæ 1 ad 166. Mars itaque duplo minor Venere ſecundum diametrum hac ratione efficitur. Atque adeo manifeſtum eſt in Planetis non ubique eum ſervari ordinem, ut qui remotiores à Sole ſunt iidem quoque majori ſint mole: nam & Jovis ſphæra Saturno ſine annulo major inventa eſt. Quo fit ut minus liquido de Terræ ad cæteros Planetas proportione æſtimatio iniri poſſit. Nam ſi pro ratione ordinis magnitudines eſſent attributæ, ut Saturnus Jove major eſſet, Jupiter Marte, hic Venere, hæc Mercurio; inde quidem penè certo colligere liceret, Telluris magnitudinem eſſe inter Martem Veneremque mediam. Cum verò in aliquibus contrarium deprehendatur, non æquè quid ſequendum ſit apparet. Veruntamen ut quatenus fieri poteſt totius ſyſtematis concinnitas obſervetur, id nunc quoque maximè conſentaneum videtur, ut ſicut loco media Terra eſt inter Martem & Venerem, ita quoque ſit magnitudine. Martis diametrum diximus diametri Solis eſſe $\frac{1}{166}$; Veneris vero diametrum $\frac{1}{84}$. Inter utramque mediam igitur terræ dia- *Martis diameter.*

 me-

metrum ponendo fiet ea $\frac{1}{111}$ diametri Solis. Hujus autem $\frac{5}{37}$ diametro Saturni æquales repertæ ſunt; ergo Saturni diameter Telluris diametrum continebit quindecies, diameter vero annuli Saturnii eandem Telluris diametrum circiter trigeſies & quater. Unde eximia horum corporum magnitudo cognoſcitur; quæ ſane omnem ab aliis hactenus traditam facile exuperat.

Hinc verò & intervallum inter Terram ac Solem neceſſario omnium exiſtimatione majus conflabitur. Si enim diameter terræ diametri Solis $\frac{1}{111}$ continet; Solis autem diameter ſuæ à nobis mediæ diſtantiæ $\frac{1}{113}$ æquat, uti ſequitur ex eo quod diameter ejus obſervetur 30′, 30″; erit certè Terræ diameter $\frac{1}{12543}$ diſtantiæ quæ eſt inter ipſam ac Solem. Deinde cum Saturni minima diſtantia ſit ad mediam Solis diſtantiam ferme octupla, hinc Saturni, cum Terræ proximus eſt, diſtantia habebitur diametrorum terreſtrium 100344; cum verò plurimum aberit, circiter 122000.

Fateor equidem lubrica eatenus ratione hæc niti, quatenus nimirum Terræ magnitudinem inter Martem Veneremque mediam adſumſimus, nullo niſi veriſimilitudinis argumento: adeoque vel millenis aliquot Terræ diametris facile à veritate aberrari potuiſſe. Verùm ut jam duplo majora minorave quam reipſa ſunt intervalla iſta definiverimus, aut triplo etiam; non tamen parum videri debet hactenus ſaltem menſuram eorum comprehendiſſe, quum alia nulla ratio ſuppetat qua non vel decuplo major error timendus ſit. Ita enim omnino exiſtimo. Ad reliquum verò calculum quod attinet, quo Planetarum diametros Solis diametro comparavimus, ſciendum eſt nihil in eo conjecturæ tribui, ſed ex iis quæ data ſunt certa ratione illum procedere. Atque adeo poſitis iis Planetarum diametris apparentibus quas à nobis obſervatas diximus, non poſſe non Solis diametrum ad diametrum annuli Saturno circumdati ſeſe habere ut 37 ad 11; ad diametrum vero Saturni ipſius, ut 37 ad 5; ad Jovis diametrum ut 11 ad 2; ad Martis ut 166 ad 1; ad Veneris ut 84 ad 1. De Mercurio non definiam priuſquam rite eum dimen-

*Diametri Solis ad Planetarum diametros ratio.*

Digitized by Google

menſus fuero; quod hactenus non ſucceſſit, cum ob exilitatem ſideris, tum quod horizonti plerumque vicinum inveniatur, ubi vapores è Terra ſurgentes tremula quadam refractione figuram ejus præciſo ambitu terminari non ſinunt. Patet autem & Saturnii globi diametrum ad diametrum Jovis rationem habere quam 55 ad 74: diametrum vero Martis continere amplius quam vicies & bis, ad Veneris diametrum eſſe ut 34 ad 3. Jovis item diametrum diametri Martis amplius quam trigecuplam eſſe; diametri vero Veneris amplius quam quindecuplam; ac denique Martis diam. ad diametrum Veneris circiter ſubduplam. Quæ omnes proportiones ratæ fixæque permanent, quantacunque diſtantia Solem inter ac Tellurem ſtatuatur, ſi modo apparentes diametri quales tradidimus retineantur. Haſce autem quo modo obſervaverimus denique dicendum eſt, atque eo magis quod longè ab aliorum ſententia alicubi recedamus: veluti cum Veneris diametrum triplo minorem aſſerimus quam à Ricciolo definita eſt, qui tamen ſumma cura circa hæc verſatus videtur. Noſtrum igitur artificium eſt hujuſmodi.

*Ratio obſervandi Planetarum diametros apparentes accuratiſſima.*

Locus quidam eſt intra tubos qui Solis convexis vitris inſtructi ſunt, circiter altero tanto amplius quàm convexum oculare ab oculo diſtans; quo in loco ſi quid intra tubi cavitatem viſui objiciatur, quantumvis ſubtile aut exiguum, id diſtinctè prorſus ambituque exquiſitè terminato conſpicitur, atque ita pro ratione latitudinis ſuæ partem aliquam rei lucidæ, velut Lunæ per teleſcopium ſpectatæ, viſui ſubducit. Exacta loci determinatio, his quibus nullo vitio viſus laborat, in focum convexi ocularis cadit; myopi aliquanto propinquius punctum accipiendum eſt, contraque, qui tantum à longinquo clare vident, paulo remotius; quod experientia protinus docere poteſt. Hîc igitur ſi primò annulus ſtatuatur cum foramine paulo anguſtiore quam ſit vitrum ipſum oculo proximum, eo tota tubi apertura, ſive ſpatium circulare quod uno obtutu in cælo detegitur, præciſâ circumferentiâ deſcriptum habetur. Cujus ſpatii diameter, quot ſcrupula comprehendat, aliquo pacto inquirendum eſt, atque optimè qui-

quidem ex tranſitu ſideris alicujus, cujus tempus numeretur vibrationibus perpendiculi, vel ope Horologii noſtri oſcillatorii nuper inventi, teleſcopio interim immoto manente. Scimus enim 4 ſcrupulis horariis unum cæli gradum & exiguum quid amplius tranſire: ideoque ſi verbi gratia numerentur ſcrupula ſecunda 69 interea dum ſtella quædam fixa totam teleſcopii capacitatem emetitur, argumento id erit $17\frac{1}{4}$ ſcrupula prima, teleſcopii hujuſmodi apertura comprehendi, ſicut noſtro evenit. Quo invento virgulam unam atque alteram ex ære aliave materia parare oportet, decreſcente paulatim latitudine, tubumque perforare utrinque circa locum illum paulo ante memoratum, quo poſſint in ipſo ejus puncto virgulæ tranſverſæ ante oculum obtendi. Cum igitur Planetæ alicujus diametrum metiri cupimus, adhibitâ eo quo diximus loco virgulâ, notandum eſt quænam hujus latitudo totum Planetam contegere poſſit. Eâ enim latitudine acuto deinde circino acceptâ, atque ad totius foraminis amplitudinem collatâ, Planetæ diameter apparens facili ratiocinio innoteſcet. Sic die 29 Dec. 1658 diametro Veneris invenimus convenire virgulam cujus latitudo æquabat $\frac{1}{20}$ totius foraminis: eſt autem hoc, uti diximus, 17′, 15″. Ergo Veneris diameter erat 51″, 45‴. Diſtantia autem Planetæ ad minimam ſuam à Terris diſtantiam ſe habebat circiter ut 27 ad 16, ergo diameter ejus terris proximæ efficitur 87″, 20‴. Rurſus anno 1659, 8 Mart. hora 6 mat. Veneris diametrum obſervavimus quæ æquabat $\frac{1}{17}$ aperturæ teleſcopii. Ideoque erat 61″, 30‴. Diſtantia autem eo tempore ad minimam Veneris à terris diſtantiam ſe habebat ut 430 ad 316, ergo diameter ejus maxima fit 83″, 40‴. Sed & alias eadem methodo ſemper tantum paulo majorem minoremve invenimus, nam ſæpius examen hoc repetivimus, atque ex omnibus medium quid ſumentes, 85″ pro maxima Veneris diametro ſupra ſtatuimus. Hanc autem Ricciolus 4′, 8″, taxavit, atque adeo triplo quam nos majorem exiſtimat, ſed procul dubio nuda illa oculi æſtimatione, qua hîc uſus eſt, in tantum deceptus fuit. Nam Saturni Joviſque diametros, quas methodo certio-

*Diameter Veneris obſervata.*

tiori, appulſu nimirum ad fixas inveſtigavit, eadem fere qua & nos amplitudine definiit, paullum tantum excedens: Saturni enim maximam 72″ continere aſſerit, Jovis item maximam 68″, quæ mihi ſunt 68″ & 64″. Certum autem eſt non magis in Venere, quam in Jove aut Saturno dimetiendis, errori obnoxiam eſſe rationem noſtram. Et Veneris quidem diametrum Hevelius quoque, ad Lunæ maculas inſtituta comparatione, tantum 82″ ſe inveniſſe teſtatur cum circa perigæum verſaretur, unde diameter ejus maxima non multum ſanè noſtram ſuperabit. Porro illud in methodo à nobis tradita commodiſſimum accidit, quod nec Lunæ, nec ſideris cujuſquam conjunctionem, cum eo quem metiri volumus planeta, opperiri neceſſe eſt, ſed omni tempore ejus uſus conceditur. Nec ad planetarum tantum diametros pertinet, ſed ad lunares quoque maculas accuratè deſcribendas, comitumque Jovialium diſtantias accipiendas rectiſſimè adhibebitur. Ad planetarum autem diametros longìs atque optimæ notæ teleſcopiis opus eſſe ſciendum eſt. Nec negligendum in Venere ac Mercurio, ut fuligine leviter inficiatur lens oculo proxima, quo perfectius planetæ ambitus circùm terminetur.

# FINIS.



Digitized by Google

Digitized by Google

EUSTACHII DE DIVINIS SEPTEMPEDANI

# BREVIS ANNOTATIO

IN

# SYSTEMA SATURNIUM

## CHRISTIANI HUGENII.

*AD*

SERENISSIMUM PRINCIPEM

## LEOPOLDUM

Magni Ducis HETRVRIÆ Fratrem.

Digitized by Google

Digitized by Google

Euſtachii De Divinis Septempedani

# BREVIS ANNOTATIO IN SYSTEMA SATURNIUM CRISTIANI HUGENII.

## SERENISSIME PRINCEPS

NOn ita pridem Chriſtiani Hugenii liber de Saturnio ſyſtemate Celſitudini tuæ Sereniſſimæ inſcriptus in meas manus incidit, in quo, & de me unum quidpiam, & de reipſa nonnulla eſſe comperi, quæ cum veritate minùs conſentiant. Nollem literatos homines, quibus teleſcopii majoris copia non eſt, in errorem induci; cum jam alioquin ſatis proclives ſint ad excipiendam credulis auribus, vel oculis eam rerum cœleſtium novitatem, quæ hactenus incompertæ orbi fuerunt: Accedit, quod libelli auctor eam diligentiam à ſe adhibitam eſſe atteſtatur, qua certè quiſpiam majorem in illo non deſideret; quod revera non parvi ponderis eſt, ad captandam hominum credulitatem, erroremque in eorum animos inſinuandum. Itaque meum eſſe duxi, tum ea, quæ mihi afficta ſunt, tum ea, quæ cœteris omnibus errandi occaſionem facilè præbere poſſent, brevi hoc & publico ſcripto refellere; brevi quidem, ne plus æquo legentibus moleſtum ſit; publico verò, ne privati Hugenii errores publici fiant; aut ſi jam publici facti ſunt, ne quid

inde reſpublica literaria detrimenti capiat, ut publicè à me configantur. Quia vero Hugenius tuis auſpiciis libellum ſuum vulgavit, iiſdem ego potiori jure brevem hanc diſcuſſionem in publicam lucem prodire volui, qui tot nominibus Celſitudini tuæ Sereniſſimæ, totique pluſquam regiæ Mediceorum familiæ obſtrictus ſum.

Tria igitur in hac ſcriptione præſtabo; primò enim affictam mihi fraudem amoliar; aliquot deinde Auctoris errores indicabo, ea tamen ſtyli moderatione, quæ & Chriſtianum, & ingenuum, ne dicam, HUGENIUM, hominem deceat: cum demùm Auctor ſcripſerit pag. 1. phænomeni Saturni rationem & cauſam nec Galilæo, nec Aſtronomorum cuiquam compertam fuiſſe, eamque dumtaxat explicari poſſe, inſerta Saturnio globo ſplendentis annuli corona, ne Jovi, quem aſtra Medicea jure coronant, detrahi corona & jam olim exauctorato Saturno reſtitui videatur; Fabriani ſyſtematis rudimentum quoddam breviter exponam, in quo, adducta Saturni phænomena ea facilitate explicantur, qua, neſcio, an major excogitari poſſit; in ea ſcilicet terræ quieſcentis hypotheſi; quam catholici Aſtronomi amplecti dumtaxat & contra Heterodoxos Ariſtarchos tueri debent. Cæterùm illa omnia, quæ à me ſcribentur, æquiſſimæ tuæ cenſuræ, ac recto judicio ſubjecta eſſe velim; nec abs re, opinor, cùm te literati omnes, ut Mecænatem; & politiorum operum artifices, ut ſingularem patronum colant; ſed ad rem venio.

Primò igitur loco Hugenius, antequam ſyſtema Saturnium aggrediatur, præmittit ſui teleſcopii deſcriptionem; cum enim, ut ipſe ait, alia perſpicilla non eſſent, niſi quinque aut ſex pedes longa, ſeriò & maximo ſtudio ad longiora fabricanda animum & manum applicuit: ſed advertere potuit ac debuit, in illa obſervatione mea Saturni, quam ipſe refert, mentionem à me factam fuiſſe teleſcopiorum variæ longitudinis, quæ ad prædictas obſervationes adhibueram, ſcilicet 15. 24. & 36. palmorum; multa autem hujuſmodi fabricavi; Illuſtriſſimus Eques Dighby, vir ut nobili genere, ita ingenio perſpicaciſſimo & omni doctrinæ genere conſpicuus ſex, cum

Ro-

Roma diſceſſit, ſecum detulit; unum Thomas Paggi nobilis Anglus; Taurinum alterum miſſum eſt; Fabritius Guaſtaferrus Romanus, vir conſuetudine & amicitia mihi conjunctiſſimus, rerumque optimarum ſtudioſiſſimus, unum habuit. Bononiam unum miſi ad illuſtriſſimum Comitem Carolum Antonium Manzinum, virum ſanè rerum iſtarum peritiſſimum, doctorem eximium, cujus Dioptricam in dies expectamus, in qua haud dubiè ea legemus, quæ multi hactenus deſiderarunt. Unum etiam fabricavi illuſtriſſimo D. Caramuel Campaniæ Epiſcopo; omitto alia, nihil enim aliud jam à multis annis ago.

Tum deſcribit teleſcopium à ſe fabricatum, longum pedes Rhenolandicos 23. qui ſi reducantur ad palmos Romanos, quos adhibent architecti, faciunt palmos 31. uncias 4. Vitri objectivi (ſic vulgo vocant) orbis apertus diametrum habet pollicum 2. cum triente, ſeu palmi Romani unc. 3. ſcrupul. 1. Vitrum oculare ex duobus invicem unitis conſtans, lenti æquivalet, & radios parallelos colligit, ac projicit in focum, diſtantem pollic. 3. prædicti pedis, id eſt, uncias 4. ſcrup. 2. palmi Romani. inde porrò deducit Hugenius, vitrum ſuum objectivum exquiſitum eſſe, cum ſit patiens lentis adeo acutæ, ut vocant, & ad veras Saturni obſervationes, ejuſmodi tubos, & vitra adhiberi vult.

Hæc facilè omittere Hugenius potuiſſet; nec enim his regulis opus erat, cum longè ante fabricata fuerint teleſcopia, quæ tum longitudine, tum vitrorum figura, tum operis perfectione Hugenianis minimè cedunt. adhibui aliquando tubum 36. palmos longum, ac proinde longiorem Hugeniano palmis 4. unc. 8. orbis autem aperti diameter fuit unc. 4. ſcrup. 2. ſed ſublatis 2. illis ſcrup. propter longitudinis differentiam 4. ſcilicet palm. unc. 8. reſtat diameter orbis mei vitri, major diametro orbis vitri Hugeniani unc. 1. ac proinde vel hoc nomine, meum teleſcopium Hugeniano præferendum, ex vulgari & ab omnibus accepta regula, cum ſcilicet majoris aperturæ, ut ſic loquar, vitrum objectivum patiens ſit.

Præ-

Præterea fruſtra omnino duo vitra in vitrum oculare utrinque convexum conjunxit; cùm unica lens ſufficiat: Ego lentem in prædictis obſervationibus adhibui, radios parallelos colligentem, & projicientem in focum diſtantem unc. 3. ſcrup. 2. ſed hæc diſtantia minor eſt diſtantia projectionis Hugenianæ unc. 1. igitur lens mea acutior: licet tubi mei longitudo major ſit; & cum ex hoc teleſcopia cenſeantur, ut optimè ipſe obſervat; inde certè pari jure deduco, meum teleſcopium præſtantius eſſe, idque triplici nomine. Primò, quia longius eſt. Secundò, quia vitrum objectivum habet majoris aperturæ patiens. Tertiò quia lentem acutiorem ſuſtinet.

Hugenius pagina libelli 37. de me ita ſcribit. *Tales autem* (Saturni ſcilicet anſas) *Euſtachius de Divinis notavit annis* 1646. 1647. 1648. *à quo editum Schema ad numerum*

TAB. LII. fig. 10.

10. *hic exhibuimus; iſque cum præſtantiſſimus perſpicillorum artifex habeatur, credibile eſt, omnium emendatiſſimè Saturni faciem deſcripſiſſe, niſi quod umbras illas, quæ in ſchemate apparent, de ſuo, ut opinor, adjecit.* Eſt ſanè, quod multas illi gratias habeam, pro iis laudibus, quas mihi ignoto homini ac minimè cogitanti aſperſit; ſed quid hoc eſt, *de meo adjeciſſe*, niſi hominibus impoſuiſſe? Si enim de meo eſt, fictum eſt, nec reipſa talem Saturnum exhibui, qualem obſervavi; quia de meo umbras illas adjeci, quas in Saturno non vidi, nec videre potui, cùm revera in Saturno non ſint; fabula igitur eſt, fictio eſt; immo in re tanta pro luculenta fraude haberi debet, cum inde homines in errorem facilè inducantur. At ſi umbras de meo adjeci, Hugenius ejuſdem criminis reus eſt, qui paſſim, ut ſuum annulum Saturno injectum meliùs exprimeret, longe majores umbras adjecit: ſed profecto neuter adjecit de ſuo; ut enim globus, corpus ſcilicet ſolidum, in plano deſcribatur, aliquid umbræ accerſendum eſt, quo figura ſolida exprimatur & appareat, alioquin merus circulus evadet: Quis vel tyro in arte graphica hoc neſcit? Umbras ſcilicet accerſendas eſſe ad figuras ſolidas deſignandas. Umbram igitur de meo

Digitized by Google

meo non adjeci, ſed globum in plano deſcripſi, qui tamen ſine umbræ beneficio deſcribi non potuit; Umbra enim facit, ut reliquum figuræ quaſi extare, ac prominere videatur; in quo uno ſtereometria ab ichnographia diſcrepat: aut fortè dicere voluit, cavitatem anſulæ Saturniæ nigriore, quàm par ſit, umbra, à me fuiſſe fœdatam: cum tamen ejuſdem cum reliquo cælo coloris eſſe videatur; ſed pace illius dixerim, quotquot anſarum cavitates vidimus, nigriores reliquo cælo, & magis atras aſpeximus, neque hoc teleſcopii vitio quiſquam tribuat; nempe ſi revera anſæ illæ vacuæ ſunt, & ad ipſum cælum radii viſorii per illas trajecti terminantur, ejuſdem cum cælo coloris erunt, quocumque tandem teleſcopio aſpiciantur. Itaque, quod mihi Hugenius pro ſua humanitate, præſtantiſſimi artificis elogium attribuit, ut me præſtantiſſimum eſſe non admitto, ita pro iis laudibus, quæ in me non quadrant, gratias, ut jam dixi, habeo; quia tamen unde altiùs extollit, inde profundiùs deprimit, dum fabricacati à me teleſcopii fidelem uſum deſiderat, utpote quod Saturnios ſatellites ea forma, eoque vultu non exhibeat, quo revera exhibendi eſſent, ad alterum caput venio, in quo luculenter oſtendam, Hugenium in nonnullis hallucinatum eſſe, quod an perſpicillis ab eo fabrefactis tribuendum ſit, an verò auctoris fictioni, alius fortè dubitaret; ego ſanè doctiſſimi hominis candori nihil detractum velim, quare haud dubiè teleſcopii vitio, quidquid erroris admiſit, tribuendum eſſe judico: leges porro, quas vitris ſuis pag. 3. & 4. præſcripſit, ſufficiat ſupra indicaſſe.

Conſtat verò auctorem duobus teleſcopiis uſum fuiſſe, in traditis obſervationibus; primum fuit 12. pedum, vel palmorum 16. more Romano paulò plus, duobus convexis inſtructum; alterum 23. pedum, de quo ſupra; In hoc, ejus dictis ſtandum eſſe puto: Ego tamen, ut dixi, longius teleſcopium adhibui, ſcilicet triginta ſex palmorum; quare non dubitarim, quin Saturnum mihi æquè perſpicuè exhibeat; præſertim cum vitra ſatis accuratè, & diligenter elaborari, tornari, formari, lævigari à me ſoleant: ſi Hugeniani tele-

ſcopii mihi copia fieret, facilis comparatio inſtitui poſſet, quam certè ab ipſo Hugenio inſtitui poſſe, nihil vetat; cum enim per totam Europam perſpicilla à me fabrefacta, diſtracta jam & quaſi diſſeminata fuerint, in ejus manus facilè venire potuerunt: rem narro, quæ mihi ante aliquot dies, accidit; Jam unus, vel alter annus elapſus eſt, ex quo R. P. Antonius Maria de Reitha Bononiam veniens, teleſcopium, quod ſecum habebat, 24. palmorum, mirificè prædicabat, aſſerebatque, nullum ejuſdem longitudinis in Italia eſſe, quod ſuo non cederet; hujus rei certior factus ab Illuſtriſſimo Comite Car. Ant. Manzino viro, ut dicam iterum, rerum iſtarum peritiſſimo, & curioſiſſimo, ad eum miſi, ut ipſe petierat, teleſcopium ejuſdem longitudinis, utrumque æqualium virium, & ejuſdem bonitatis repertum eſt; hæc jam penè mihi exciderant, cùm ecce Illuſtriſſimus Dominus de Monconis, nobilis Lugdunenſis, vir, tum ingenio, tum genere pleriſque notus, incogitanti mihi, poſtridie cinerum adfuit; poſt ſolita urbanitatis officia, cùm inter colloquendum, de perſpicillis mentio facta eſſet, non habeo ampliùs, inquit, tuum illud teleſcopum 24. palmorum, illudque ſanè optimum, quod ante aliquot annos Lugdunum ad me ignotum licèt hominem miſeras; illud enim bonus P. Reitha ſuis precibus à me extorſit; mecum igitur, inquam, pugnavi, ejuſdemque parentis liberos quaſi hoſtes inter ſe commiſi; in riſum proru-pimus ambo; non tamen eſt, quod aliquis hoc vitio vertat Patri Reithæ, qui pro ſuo candore ultro fatebatur, præfatum teleſcopium non à ſe, ſed ab alio elaboratum fuiſſe: Scripſi hæc, ut vel inde conſtet, fieri potuiſſe, ut aliquod ex meis teleſcopiis in manus Hugenii veniret, ad comparationem inſtituendam; dum id fiat, facilè mihi perſuadebo, nihil eſſe, cur mea Hugenianis primas deferant; ac proinde ſuppoſita eadem longitudine, æquè clare, & fideliter Saturnios ſatellites exhiberi à meis, ac ab Hugenianis.

His præmiſſis; conſtanter aſſerit Hugenius, pag. 547. & 556. Saturni ſatellites nunquam ab eo ſejunctos figura ſphærica videri, quales prima figura ab eo excuſa, & à me recu-

ſa.

ſa exhibet; quod tamen falſum eſſe, omni aſſeveratione affir- TAB. LII. fig. 1.
mo, cùm anno 1657. cœptis obſervationibus die 30 Junii, & ſepties, vel octies, àd vigeſimum uſque Julii repetitis, adhibito ad hunc finem teleſcopio triginta ſex palmorum, accuratiſſimè fabrefacto, prædictos ſatellites figura ſphærica tornatos à Saturni globo omnino ſejunctos obſervarim, quales prima figura Hugenii illos repræſentat, & quales jàm antè Galilæus viderat, idem obſervavi anno proximè ſequenti, teleſcopio 24. palmorum uſus; adfuerunt teſtes omni exceptione majores; præ cæteris, vir clariſſimus Alphonſus Borrelli, Magni Etruriæ Ducis inſignis Mathematicus, & Geometra, typorum gloria orbi ſatis notus: neque hæc contradicendi ſtudio à me adſtrui, quiſquam ſibi perſuadeat; quo enim tempore, hos ſatellites ſphæricos à Saturni globo, modico quidem, ſed quod ſenſu, adhibita teleſcopii opera, percipi poterat, intervallo disjunctos vidi, nunquam mihi perſuadere potuiſſem, aliquem fore, qui ſejunctos unquam videri poſſe negaret; Dico igitur, disjunctos à me viſos fuiſſe; negat Hugenius disjunctos videri poſſe; produco teſtes omni exceptione majores, qui una mecum viderunt; Utri quæſo habenda fides? Sejunctos videri poſſe contendo, cùm reipſa ſejunctos viderim, adductis teſtibus omni exceptione majoribus; negat Hugenius, videri poſſe; quia ſcilicet numquam ipſe vidit; ſed alii viderunt; negat tamen videri poſſe; adſunt & jurant teſtes; illos ejurat, & fidem alienis teleſcopiis detrahit; perperam quidem, meo judicio; nempe breviore teleſcopio diſcerni non poterant, licèt revera disjuncti eſſent: igitur cùm eos ſejunctos viderim meo teleſcopio, ideo neceſſaria conſecutionis vi deduco, hoc perfectius, & melius eſſe; nec enim longitudo æqualis, immo, nec major defuit; nec accurata operantis manus vel artificis diligentia deſiderata eſt. Teleſcopium igitur Hugenii, longiùs licet, breviorum vitio laboravit, cum illius opera, ſejunctos diſtinctè videre non potuerit; quo vitio, ut dixi, breviora perſpicilla laborant; falſum enim eſt, quod habet pag. 35. breviore teleſcopio 8. circiter palmorum ſejunctos, longiore

verò 16. palmorum conjunctos videri, nempe, ut dixi, potiore jure, ſejuncti, majore teleſcopio, conjuncti verò, minore viderentur; cùm verò ſuo minore ſejunctos viderit, majore verò ad inſtar brachiorum, hinc inde adnatorum extantes, perſpicuum majoris teleſcopii vitium eſt, cujus operâ radii minùs accuratè projiciuntur, & ut vulgò dicimus, inepta ſit terminatio. Teleſcopium igitur Hugenianum meo primas deferat, oportet; quo ſcilicet ea diſtinctè vidi, quæ ille ſuo diſtinctè videre non potuit.

At non me latet cauſa qua fiat, ut Hugenius obſtinatè neget, ſejunctos videri poſſe; commentus eſt ipſe hypotheſim annuli Saturni globum cingentis, cujus operâ, illas phaſes explicare conatur, quæ in hoc planeta obſervatæ fuere: ut autem ſuæ opinioni, vel ſuo commento conſulat, illud profectò ipſi negandum fuit, quo ſemel admiſſo commentitia illa hypotheſis penitùs corruebat; ſi enim annulus Saturnum ambit, nunquam ſejuncti ſatellites videri queunt: pari modo fingit, præfatas anſarum vacuitates ejuſdem cum reliquo cælo coloris eſſe, ut ſuæ hypotheſi conſulat; ſuppoſito enim illo annulo in iis vacuitatibus, nihil niſi cælum videtur; at revera, ut jam ſuprà dixi, nigriores illæ apparent, ex quo Hugeniana hypotheſis corruit. Ut igitur ſuam illam opinionem indemnem ſervaret, ea removenda eſſe putavit, quæ ſi adeſſent, illius opinionis falſitas manifeſta evaderet: & hæc ſibi perſuaſit, nobis tamen minimè perſuaſurus, qui rem ſecus eſſe, oculari demonſtratione prorſus evicimus.

Alterum eſt quod Hugenius vel finxit, vel leviter ſibi perſuaſit, quod tamen ejuſdem furfuris eſt; dicit enim, faſciam quandam nigricantem in Saturni globo videri, quæ quidem ex æquo medium diſcum ſecat, quando ſolus Saturni globus ſuo ſatellitio deſtitutus apparet; ubi verò ſatellites adſunt, modò ſuprà, modò infra brachiorum lineam faſcia videtur; ſed hoc etiam merum figmentum eſt ab auctore excogitatum, ut annulo ſuo conſuleret; nam cùm ipſi opponeretur, admiſſo ſemel hoc annulo nunquam Saturnum videri poſſe, vel anſulis, vel brachiis deſtitutum, quod tamen omnibus ob-

ſer-

Digitized by Google

ſervationibus repugnat, nempe ubi planum annuli directè in oculos incidit, annulus appareret ad inſtar zonæ rectæ, æqualis diametro annuli, ac proinde majoris diametro Saturni; igitur ad inſtar brachiorum duæ appendices hinc inde Saturnio globo adhærerent: cum igitur hac difficultate, & hoc nodo inſolubili annularis illa hypotheſis laboraret; finxit illius auctor, extimam annuli ſuperficiem ineptam eſſe ad luminis repercuſſionem, ac proinde faſciam illam nigricantem inde ortum ducere, & ob penuriam luminis repercuſſi, extantes illas appendices ſub aſpectum noſtrum non cadere: Hæc habet pag. 542. 545. 576. Aliam cauſam ſubnectit pag. 585. ab obliquitate radiorum illapſorum petitam, qua fiat ut pars annuli ad nos obverſa obliquè dumtaxat illuminata non videatur; immo hoc alterum addit, ſuperficiem annuli ad nos obverſam minimè à Sole illuminari; ac proinde mirum non eſſe, quod minimè videri poſſit; omiſeram, quæ habet pag. 551. de Saturnicolis.

Cuncta hæc facilè difflantur; nunquam enim faſciam illam nigricantem, quamvis exquiſito teleſcopio uſus videre potui; nemo unquam præter illum obſervavit; nec tamen teleſcopia noſtra Hugenianis deteriora eſſe crediderim; fictitia igitur cenſenda eſt illa faſcia, aut certè vitrorum vitio tribuenda: quod autem dicit, extimam illam annuli ſuperficiem ad lumen reflectendum ineptam eſſe, vel ex eo falſum eſſe conſtat, quòd in Saturni diſco partes omnes æquali lumine perfuſæ videantur: Nulla igitur pars ad nos obverſa ad luminis reflexionem inepta eſt. Præterea demus ita eſſe, & faſciam illam paulò obſcuriorem in Saturni diſco videri; nihil tamen obſtaret, quin brachia eodem lumine perſpicua eſſent; id eſt extrema ſegmenta apparentis zonæ, in quam annulus hoc ſitu aſpectus projicitur, extantia, & excurrentia hinc inde extra Saturnium globum, viderentur, eodem licèt nigricante colore diluta. Ad obliquitatem illapſorum radiorum perperam confugit; alioquin in cæteris planetis eadem ratio militaret; nempe fieri non poteſt, quin major pars ſuperficiei convexæ, obliquum radiorum ſolarium illa-

pſum excipiat. Id demum, quod ſubnectit, ſuperficiem annuli ad nos obverſam à ſole aliquando non illuminari, ex regulis opticis omnino refellitur; ſuppoſita ſcilicet maxima illa Saturni diſtantia, nec non ſolis diametro longè majore, quo fiat, ut ſuperficies Saturni ad nos obverſa ſemper illuminetur; hinc totus Saturni diſcus ſemper apparet. De Saturnicolis nihil eſt, quod dicam, riſu potiùs, quàm argumentis hoc commentum refellitur; accedit, quòd catholicis dogmatis adverſatur, quæ homines tantùm illos agnoſcunt, qui ab Adamo duxerunt ortum.

Nonnulla etiam falſa admiſcuit, ut pag. 539. ubi dicit faſcias Jovis lucidiores eſſe reliquo diſco; cùm tamen obſcuriores certò videantur: Item globo Martis latiorem faſciam ſub obſcuram obduci; nihil tale unquam obſervatum eſt; deinde nunquam Saturnum vidimus ea forma, quam illi tribuit pag. 542. 545. tractum illum cœli circa Oriona, illuſtriorem eſſe vidimus, cum iis ſtellis ſplendentibus, quas ipſe recenſet. Multa etiam de Saturni phaſibus ſtatuit, ex paucorum annorum obſervationibus, quæ pro certis habere non poſſum, donec ſubſequentium annorum obſervationibus congruant; nempe ipſe obſervationes ſuas primum cœpit 25. Martii anno 1655. eaſque ad 19. Februarii anni 1656. breviore tamen teleſcopio uſus, 12. pedes longo perduxit; ac proinde minùs fideles cenſendas, ut ipſe ultrò fatetur. Standum igitur obſervationibus deinceps ab eo factis, ac repetitis identidem, adhibito longiore tubo, 23. circiter pedum, perductiſque ad 26. Martii anno 1659. Si aliquæ eſſent ab eo notatæ à 30. Junii ad 20. Julii anno 1657. viderem utrùm meis conſentirent; ſed nullas toto illo tempore factas invenio, an fortè paucæ illæ obſervationes ſufficient ad certum quid ſtatuendum? præſertim cum toto illo, quo factæ ſunt, temporis intervallo, vix Saturnus 38. gradus confecerit, traductus ſcilicet à 20 grad. Virginis ad 28. Libræ; an fortè inquam modicus ille arcus decurſus ſufficiet ad certam & indubitatam hypotheſim ſtatuendam? Statuit autem, anſas magis apertas, & patentes videri, Saturno exiſtente

in

in grad. 20, 36. Gemin. & in oppoſito 20. 36. Sagitt. Sphæricum verò ſine anſis, & ſatellitio in grad. 20. 36. Piſc. Itemque in 20. 36. Virg. quod ſanè utrùm futurum ſit, ſequentes anni docebunt. Ipſe hactenus in 20. Virg. obſervavit, in aliis punctis non vidit, nec eſt, quod aliorum obſervationes adducat, quibus fidem omnem detraxit, ac proinde illi ſuffragari non debent. Unum, quod habet, omittere ſtatueram; ſed quandoquidem in mentem venit, ſaltem indicabo; dicit enim, Saturni globum circumagi quodam vertiginis motu; ſed hoc tantummodo divinat, non probat; licèt enim Sol hoc vertiginis motu gaudeat, quod probari ſolet ex maculis: inde tamen nemo rectè deducat, hunc motum reliquis planetis competere. Hoc ii præſertim inſinuare & inculcare non ceſſant, qui globo terraqueo motum adſtruunt; ſed fruſtra, cùm Lunam hoc vertiginis motu non agi, certiſſimum ſit: quod certe non dico, quaſi hic vertiginis motus in Saturno alicujus momenti ſit, quod ad rem hanc pertineat, ultrò enim fateor fieri poſſe ut prædicto motu agatur: dico tamen, ex obſervationibus huc uſque factis haberi non poſſe.

Quia verò nemini ſuam laudem ereptam velim, admitto & oſculor alia multa ab Hugenio tradita, cum veritati apprimè conſentiant. 1. planum illud, in quo videntur eſſe ſatellites, æquatoris plano parallelum rectè judicat: hoc jam indicarat cum aliis Galilæus; & facilè crediderim, licèt autor nullam hujus rei rationem adducat. 2. Anſas illas hinc inde ſemper æquales eſſe contendit; jure quidem: licèt enim fortè aliquando altera longior viſa ſit, alterius tamen cujuſpiam per accidens adjuncti extrinſecus, acceſſio illa facta eſt. 3. vult, Lunam quandam eſſe Saturniam, (ſic enim vocat, licèt propriè loquendo Luna non ſit, cùm circa Saturnum ſuum orbem non agat) ſupremum ſcilicet omnium ſatellitem, ad inſtar ſtellulæ ſæpe à ſe obſervatum, modò ad ortum, modò ad occaſum, modò conjunctum Saturno, cujus primus ille inſpector fuit, in quo ſanè maximam laudem meretur: ego quidem cùm jam anno 1657. de hoc aliquid inaudiiſ-

diiſſem à clariſſimo viro Michaele Angelo Riccio, eodemque nobiliſſimo hujus temporis Geometra: Eundem ſæpe obſervavi à 30. Junii ad 20. Julii, ſcilicet die 30. Junii hora 2. noctis juxta horologium Italicum, id eſt 2. horis cum dimidia poſt ſolis occaſum, illum obſervavi ad ortum Saturni; item 2. Julii, 4. 9. 12. eadem hora, die 14. non apparuit; die 20 ad occaſum viſus eſt. Ad prædictas obſervationes adhibui teleſcopium 36. palmorum. Cur verò ab aliis Luna illa Saturnia obſervata non fuerit ante Hugenium, non quidem teleſcopiorum vitio, ſed vel inadvertentiæ, vel nimiæ ejuſdem à Saturno diſtantiæ, vel parvitati, vel conjunctioni tribuendum eſt. 4. Anſæ Saturni nunquam mihi viſæ ſunt una vice acutiores, alia obtuſiores; majores tamen ſeu latiores aliquando eſſe comperi. Quod autem ſæpè ac ſæpius inculcat, prædicta omnia explicari non poſſe, niſi annulus ab eo excogitatus Saturni globum circumdet, pace illius dixerim, à veritate alienum eſt; non deſunt alii modi, quibus res iſta facili deſignatione exponatur: præ cæteris, mihi ſatis arridet illa ſyſtematis Saturnii ratio, quam P. Honoratus Fabri Societatis Jeſu vir mihi maxima familiaritate conjunctus excogitavit, cujus breve ſchema ſubjicio.

Supponit. I. terram immobilem in centro mundi, circa quam cæleſtes globi ſuos gyros agunt; hanc enim ſententiam mordicus defendit, ut catholicis decretis, ſacris literis, obſervatis phænomenis, ac rectæ rationi probè conſentientem. II. Motum realem Saturni æqualem eſſe, apparentem verò inæqualem; abhorret enim hominis intellectus, ut vel ipſe Copernicus prudenter monet, à reali motuum inæqualitate. III. Supponit, motu æquali, æqualibus temporibus, æqualia ſpatia decurri, reali ſcilicet, ſeu recta, ſeu curva; ac proinde majorem orbem tardiùs, minorem citius, eodem motu deſcribi. IV. Supponit, motum circularem diurnum ab ortu ad occaſum. V. motum rectum ab apogæo verſus perigæum, & viciſſim; acceleratum quidem, ab utroque termino ad mediocrem diſtantiam, quæ lineam apogæum, & perigæum connectentem bifariam ſecat; retardatum verò à mediocri diſtantia

tia

tia ad utrumque terminum; hunc autem primum motum rectum vocat. VI. Supponit alium motum rectum, ſecundum ſcilicet, ac declinationis ab Auſtro ad Boream, & viciſſim; fines porrò diverſi ſunt in diverſis planetis, pro diverſa declinatione maxima cujuſlibet planetæ; eſt etiam hic motus eodem modo acceleratus, & retardatus, quo prior; & mediocris diſtantia eſt in æquatore: ex his tribus motibus, Saturni motus componitur; vel potiùs eſt motus quidam ſimplex circulari affinis, prædictis duabus determinationibus inſtructus; vel, ut ajunt Scholaſtici, modificatus; primus motus brevior eſt; ſecundus diuturnior; cujus ſanè diſcriminis cauſam affert. Sed ut rude aliquod ſchema exhibeam, omiſſo ſecundo motu recto, ſit centrum mundi B. hic terram collocat immobilem. Sit G B diſtantia Saturni apogæi; B O diſtantia perigæi; B P diſtantia mediocris, Saturnus circulum, vel orbem radio G B tardius percurrit, quàm Stella vel punctum primi mobilis, cui reſpondet; citius verò percurrit orbem radio B O, & æquè citò radio B A minore mediocri diſtantia B P. His præmiſſis, ſit Saturnus in apogæo G, reſpondens puncto C primi mobilis, vel initio arietis v. g. & ſupponatur punctum C per S deſcribere ſuum circulum, motu diurno; item Saturnus in G ſuum, per R, ſcilicet versùs occaſum; punctum C citiùs abſolvit ſuum gyrum, quàm Saturnus; igitur Saturnum à tergo relinquit, versùs ortum, ſcilicet in aliquo puncto curvæ G H; nempe primo motu recto, à circulo apogæi L R ſenſim deſcendit ad circulum perigæi Z X, donec tandem multis orbibus actis, perveniat in H, & reſpondeat puncto E primi mobilis, v. g. 20. gradui Arietis: toto illo tempore, moveri dicitur in conſequentia; id eſt, juxta ſeriem ſignorum, initio quidem, motu accelerato; & ſub finem, retardato; in H ſtare videtur: hîc enim æquè citò ac punctum E ſuum gyrum agit: Quia verò adhuc deſcendit versùs perigæum, decurrit deinceps ſuos orbes citiùs, quàm puncta primi mobilis, quibus reſpondet; ac proinde illa relinquit à tergo, versùs ortum ab H quidem, ad perigæum I: ab I verò, ad K; hinc videtur regredi ab E ad D,

TAB. II. fig. 1.

D, quæ ſunt puncta primi mobilis; idque motu retardato, circa H & K, id eſt, circa puncta ſtationum, accelerato verò, hinc inde circa I. hinc duplex ſtatio, in punctis ſcilicet E & D. hinc regreſſio, vel motus retrogradus brevior directo; quia radius circuli æquè diuturni (ſic eum vocat, quem planeta æquè citò conficit, ac punctum primi mobilis ſuum) eſt brevior, radio mediocris diſtantiæ B P. ex his ſequitur latitudinis mutatio ſingulis ferè diebus: ſed hæc rudi Minerva deſcripſiſſe ſufficiat; ex quibus omnia Saturni phænomena, nullo ferè negotio, per cauſas phyſicas explicat. Jam ad ſatellites Saturni orationem converto. Quinque Fabrius agnoſcit; minimus & ſupremus omnium eſt quem Hugenius, primus opinor, ſub aſpectum hominum adduxit, quemque, ut dixi, ab illuſtriſſimo, & doctiſſimo Riccio certior factus, adhibito 36. palmorum teleſcopio, an. 1657. per multos dies, menſe Julio conſpexi, ortivum modò, mox occiduum; dicta autem die non comparuit, quia conjunctus Saturno erat. Hic ergo ſupra Saturnum eſt, & dum in perigæo verſatur, citiùs ſuum orbem abſolvit, quàm Saturnus ſuum, quando eſt in apogæo, tardiùs; & æquè citò in mediocri diſtantia, æquè ab utroque termino diſtante: hinc aliquando Saturnus illum à tergo relinquit, aliquando ille Saturnum; hinc aliquando ortivus, aliquando occiduus, aliquando latet in conjunctione; à conjunctione apogæi, ſemper ortivus; à conjunctione perigæi, ſemper occiduus; quid plura? in Mediceis appoſitam analogiam habemus.

TAB. LI. fig. 2. Alii quatuor inferiores ſunt, Saturno licèt ſuperiores, quorum ſyſtema ſic Fabrius explicat: Sit centrum terræ, & mundi A, Saturni diameter G C, centrum B, ducta cenſeatur recta A B P; ſint duo N H, S D, in maxima digreſſione N H ortiva; S D occidua, hinc inde æquali; in qua ſit illorum ſtatio; & mediocris diſtantia A I; hoc loco, diametros dumtaxat pro globis exhibeo: tendat autem N H versùs perigæum; & S D, versùs apogæum, pari greſſu, & paribus intervallis, ita ut hic apogæum, & ille perigæum ſimul attingant; iſtud eſt inter B I, illud verò inter I O. tunc uter-

uterque ſimul erit in conjunctione, alter perigæi, alter apogæi, ſed paulò poſt N H à perigæo aſcendit ad maximam digreſſionem occiduam S D, & S D ab apogæo deſcendit ad maximam digreſſionem ortivam N H; atque ita deinceps, repetitis ac reciprocis recurſibus: idem prorſus dictum ſit de duobus K L, K E, quorum mediocris diſtantia communis eſt in O; perigæum commune inter O I; apogæum ſupra O, æquè diſtans; maxima digreſſio ortiva K L, occidua K E; eſt autem digreſſio iſtorum, qui ſuperiores ſunt, major digreſſione illorum, quos inferiores eſſe ſupponit; ſuperiores appellat lucidos, inferiores obſcuros; lucidi conſtant ex materia aptiſſima ad repercuſſionem luminis; obſcuri verò, ex ineptiſſima, ad eundem finem; nec difficile fuit auctori naturæ, hujuſmodi materiam invenire, cùm etiam in hoc ſublunari tractu hujuſmodi habeamus: mediocris diſtantia in utriſque ab apogæo, & perigæo æquè diſtat: vult etiam idem Fabrius, quinque ſatellites ejuſdem eſſe cum Saturno declinationis, ac proinde ſemper in eodem plano eſſe æquatori parallelo: quod facilè obtinetur, modò ab initio eandem declinationem habuerint, eundemque ſimul inierint declinationis motum, in eodem ſemper plano æquatori parallelo ſiti: nec eſt, quod quiſquam miretur, quinque ſatellites Saturno adeſſe, cum Jovi quatuor adſint, Soli duo, Terræ unus, Marti fortè tres, quis ſcit, nondum explorati; quia à Martis globo longius digrediuntur, quàm Medicei à Jove; non tamen tam longè, quàm Venus aut Mercurius à Sole; vult demum, obſcuros citiùs ſuam revolutionem abſolvere, & lucidos tardiùs; cujus rei analogiam habemus in Venere, & Mercurio.

His poſitis, omnes Saturni phaſes, omnia phænomena facilè omnino explicantur. Solus Saturni globus ſuis ſatellitibus aliquando deſtitutus apparet, ſcilicet figura ſphærica; nec enim alia cæleſtibus corporibus indita eſt: hujus phænomeni ratio ex eo petitur, quòd duo lucidi (de primo enim omnium ſupremo hoc loco non agitur) vel ſint conjuncti, id

 eſt,

eſt, alter in apogæo, alter in perigæo, vel ab obſcuris penitùs tecti, etiam extra conjunctionem:

II. Duo lucidi aliquando videntur à globo Saturni omnino ſejuncti, & figuram ſphæricam præferentes; hoc ipſum toties accidit, quoties duo obſcuri in conjunctione verſantur, alter ſcilicet in apogæo, alter in perigæo, & lucidi hinc inde digreſſi.

III. Aliquando lucidi apparent, quaſi lucidæ anſulæ eſſent, vel Lunæ falcatæ; hoc evenit quando obſcuri ſunt quidem interpoſiti, non tamen integrum lucidorum diſcum tegunt.

TAB. LII. IV. Hinc modò plus, modò minùs diſci lucidi ab obſcuris tegitur; unde diverſa phaſis, & diverſa figura; neque hoc teleſcopii vitio Hugenius tribuere debuit, cùm alioqui optima ab authoribus, quos citat, adhibita fuerint; Galilæo ſcilicet, Scheinero, Ricciolo, Hevelio, Gaſſendo, quorum figuræ ab Hugenio excuſæ, in hac hypotheſi, nullo negotio demonſtrari poſſunt; undecima tamen inter alias Fontanæ fabulas referenda eſt; decima tertia, quæ caret auctore, modò tantulùm reformetur, fortè ſuo modo explicari poſſet, in aliquo caſu; ſeptima Hevelii fictitia eſt; ſphæroidem eſſe putavit, ſed hæc figura cæleſtibus globis minimè competit; niſi fortè dicamus Saturnum ellipticum videri, quando obſcuris in conjunctione ſtatutis, lucidi tantulùm à conjunctione recedunt, tunc autem anſulæ non apparent.

V. Veriſimile eſt, obſcuros æquales eſſe lucidis; nihil enim probat, vel majores, vel minores eſſe, æquales igitur cenſendi ſunt, dum aliquid probet inæqualitatem; immò potiùs æqualitas ex ipſis phaſibus perſuadetur, quartæ ſcilicet figuræ, quintæ, ſextæ, octavæ &c. Arcus enim falcis lucidæ, cavus ſcilicet, & convexus æqualium circulorum eſſe videntur.

VI. Linea, vel diameter anſas lucidas connectens, quæ per medium globi Saturnii centrum duci videtur, eſt ſemper

per

per in plano parallelo plano æquatoris; quia cùm ſatellites Saturni ejuſdem ſemper ſint cum eo declinationis & motu ſemper æquali in aliquo parallelo moveantur, motus enim diurnus ab ortu ad occaſum in aliquo parallelo fieri cenſetur, quid mirum, ſi linea eorum centra connectens in eo plano ſit, quod plano æquatoris parallelum eſt; dixi, *quæ per centrum Saturni duci videtur*, quia revera licèt Saturno ſuperiores ſint, oculus tamen judicat, ejuſdem altitudinis eſſe; ac proinde in eadem linea cum Saturno.

VII. Licèt ſupremi ſatellitis motus ab Hugenio definitus ſit, utpote qui 16. circiter dierum ſpatio abſolvatur, quanquam obſervationes à me factæ tantulùm refragantur; non tamen huc uſque quatuor inferiorum motus, vel ab eo, vel ab alio quopiam definitus eſt, qui tamen ex futuris obſervationibus haberi poſſet.

VIII. Turbinatio Saturni, vel illius annuli fictitii nulla obſervatione probatur, ut jam indicavi; licèt enim ſol hoc vertiginis motu agatur circa ſuum centrum, ut evincitur ex illius maculis; aliis tamen planetis nulla hujuſmodi, vel alia quæpiam probatio ſuffragatur.

IX. Illa brachia oblonga quæ Hugenius Saturno annexa obſervavit annis 1655. & 1656. ſunt omnino fictitia, & vitio teleſcopii tribuenda: cur enim alii non obſervaſſent? præſertim cùm teleſcopium ad hunc finem ab eo adhibitum brevius eſſet, ac proinde non melioris conditionis quàm alia.

X. Figuræ ab illo excuſæ, & rejectæ facilè explicari poſſunt in hac Fabriana hypotheſi: 1ª quidem lucidis in maxima digreſſione, & obſcuris in conjunctione exiſtentibus; 2ª verò, lucidis tangentibus Saturni globum, & obſcuris in conjunctione poſitis; 4ª lucidis in maxima digreſſione poſitis, & obſcuris tantulùm extantibus; ita ut modicam lucidorum portionem tegant; 3ª eadem eſt cum 4ª ſed teleſcopii vitio, in mucronem ivit, cùm in con-



Digitized by Google

vexum ire debuiſſet; 5ª, & 6ª. lucidis non totis extantibus, & majori ex parte tectis ab obſcuris, tunc enim reſtat quaſi falcula, differt autem 5ª à 6ª ſecundùm plùs, & minùs; 7ª, ut dixi, ficticia eſt; cùm Saturnus ſphærois non ſit, niſi fortè eo modo, quem ſupra num. 4. expoſui; 8ª lucidis inter maximam digreſſionem, & Saturni globum exiſtentibus, tectiſque ex parte, à minore portione obſcurorum; tunc enim falces majores ſunt; latiores quidem, quò propiùs ad maximam digreſſionem accedunt; anguſtiores verò, quo Saturnio globo propiores fiunt; 9ª & 10ª ab octava tantummodo differunt, ſecundùm plus, & minùs; ſunt enim multæ combinationes; quas habes in duobus circulis ſeſe invicem ſecantibus; tres ultimas ficticias reputo; niſi fortè 12ª ad 10, reducatur itemque 13ª de qua infra.

XI. Anſa una non longiùs extenditur, quàm alia; hinc æqualis eſt utriuſque lucidi digreſſio; quia uterque communi apogæo & perigæo gaudet, & æquali motu movetur; item obſcuri eodem apogæo & perigæo gaudent; ex his, perfecta anſarum & brachiorum æqualitas neceſſariò ſequitur.

XII. Anſulæ videntur, quando portio lucidorum ab obſcuris tegitur; nempe ſunt quædam quaſi aperturæ nigræ, quas lucida corona cingit; hæ ſunt anſulæ; brachia verò, quando lucidi tangunt globum Saturni, obſcuris in conjunctione exiſtentibus.

XIII. Anſulæ eò longiùs porriguntur quo propiùs lucidi ad maximam digreſſionem accedunt; obſcuris ſcilicet lucidorum partem tegentibus.

XIV. Anſulæ eò patentiores ſunt, quò major obſcurorum portio extra Saturnum extat, lucidis in maxima digreſſione conſtitutis; anguſtiores verò, cum minor obſcurorum portio extat.

XV. Anſulæ latiores ſunt, quando minor obſcurorum portio tegit lucidos, in maxima digreſſione poſitos.

XVI.

Digitized by Google

XVI. Anſularum brachia ad ipſum uſque Saturni globum excurrunt, quando minor obſcurorum portio lucidos tegit.

XVII. Anſulæ à Saturni globo ſunt prorſus avulſæ atque ſejunctæ, quando major obſcurorum portio lucidos tegit.

XVIII. Anſulæ ſenſim contrahuntur, quando à digreſſione lucidi recedunt, & obſcuri ad digreſſionem accedunt.

XIX. Quando anſulæ latiores & majores ſunt, ipſe Saturni globus illuſtrior apparet, quia lumina quaſi communi quodam niſu & illapſu oculum feriunt; ſic multi ignes ſeorſim poſiti, actione quadam communi, plus calefaciunt, ac proinde majoris lucis vim diffundunt.

XX. Anſulæ ſenſim dilatantur & augentur, quando lucidi ad maximam digreſſionem accedunt, & ab illa obſcuri recedunt.

XXI. Primus ille Saturni comes ſub Saturno aliquando ponitur ab Hugenio, qui vult, illum circa Saturnum moveri; hoc tamen veritati repugnat; ſi enim ſub Saturno eſſet, prædictas anſularum phaſes omnino turbaret: Idem dico de Mediceis, ſeu Jovialibus; igitur & Jovialia ſupra Jovem, & Saturnia ſupra Saturnum collocata fuere.

XXII. Si quando accidat, ut primus ille Saturni comes extremitati alterius anſulæ adhærere videatur; nihil enim obſtat, talem illius poſitionem eſſe poſſe; hæc anſula paulò alterâ longior eſſe videbitur.

XXIII. Immo ſi caſu aliquo ſtellula quæpiam alterius anſæ extremitati adhæreat. Figuræ 13ª. phaſis aliquo modo ſalvabitur, modò anſarum forma emendetur; hæc enim trigona non eſt, ſed convexa; ut jam dixi, de 3ª. figura: omitto alia, quæ ex his facilè deducentur.

HÆC ſunt, Sereniſſime Princeps, quæ de Hugeniano Syſtemate tibi inſcripto ad te ſcribenda, & ne probandi mo-

Digitized by Google

modum deſiderares, teleſcopium triginta ſex palmos longum, unâ mittendum eſſe putavi, ut & rationes noſtras, ingenii, quo ad ſtuporem polles, & obſervationes, oculorum acie, accedente teleſcopii operâ, explorare valeas: facilè, ni fallor, judicabis, utri potiùs habenda fides ſit; & an noſtra teleſcopia Hugenianis deteriora ſint: quidquid ſit, ſi hæc opella mea tibi grata acciderit, faciam aliquando ut aliquid majoris momenti ad perennem obſervantiæ meæ teſtificationem Sereniſſimo tuo nomini inſcribatur.

# F I N I S.

Digitized by Google

Christiani Hugenii Zulichemii

# BREVIS ASSERTIO SYSTEMATIS SATURNII SUI,

Ad Serenissimum Principem

LEOPOLDUM AB HETRURIA.



Digitized by Google

Digitized by Google

Christiani Hugenii Zulichemii

# BREVIS ASSERTIO SYSTEMATIS SATURNII SUI,

Ad Sereniſſimum Principem

LEOPOLDUM AB HETRURIA.

---

*SERENISSIME PRINCEPS,*

Vidiſti quæ adverſus ſyſtema meum Saturnium Romæ ſunt edita, utque ſub uno nomine gemini mihi adverſarii exorti ſint. Etſi enim Euſtachius de Divinis libelli iſtius Annotationum autor inſcribitur, eum tamen adjutum fuiſſe opera P. Honorati Fabrii nec Celſ. T. ignorat, & ego, hoc agi, jam pridem ab amicis fueram admonitus. Credideram hoc ipſo futurum ut ſubtiliora quædam, non mihi præviſa, éque profundiore Aſtronomiæ ſinu depromta, objicerentur; tum vero ea civilitate & verecundia, quæ viro humanioribus ſtudiis dedito conveniret. Sed omnino ſpe deceptus ſum, cum nihil aliud quam obſervationes meas temere impugnari videam, quas pleraſque in dubium vocant, præterque veritatem mihi confictas eſſe ſa-

tis apertè criminantur. Facile autem, ut ſpero, tam indignam à me ſuſpicionem repellam, nec multis ad hoc opus eſſe, coram C. T. cauſam agenti, exiſtimo, cujus ſumma æquitas cum pari judicii perſpicacitate conjuncta eſt.

Primus præcipuuſque adverſariorum conatus eſt, ut vitra ſua tuboſque opticos nihilo meis inferiores eſſe demonſtrent; quod ubi egregiè ſe confeciſſe arbitrantur, inde porro, nihil me in cælo deprehendere potuiſſe, quod non & ipſi viderint, concludunt. Quod ſi autem phænomena ipſa Saturni, quæ adduxi, vera non ſunt, vana utique & Hypotheſis erit, qua viſorum eorum quæ nuſquam ſunt cauſas exponere ſuſcepi.

Teleſcopiorum ſuorum comparationem cum noſtris inſtituere aliquatenus ut poſſent effeci, tradita accuratiſſima meorum deſcriptione; veruntamen quod præcipuum eſt omnium, præſtantia vitrorum quæ ab exacta formatione proficiſcitur, hanc ſcire debent nulla deſcriptione, ſed effectu demum ipſo probari poſſe: ideoque etſi & longiores paulo noſtris tubos, & vitra amplius patentia fabricarint, non idcirco meliora ex his teleſcopia ſeſe compoſuiſſe exiſtiment. Oportet nempe, quæ pari bonitate cum noſtris futura ſunt, ut & longitudine illis æquentur, & vitrorum non minore apertura gaudeant; at non ideo quæcunque ſic ſe habuerint, eâdem virtute pollent, aut illis æquiparanda ſunt.

Ut igitur reipſa & effectu concedere noſtris Diviniana teleſcopia comprobem, certiſſimum argumentum mihi petere poſſe videor à Saturnio illo comite ſive luna, quæ ſexdecim dierum ſpatio circa eum revolvitur. Hanc primum omnium mihi conſpectam eſſe liquet, neque id Euſtachius cum ſibi ſuccenturiato P. Fabrio denegat. Quod autem nec aliis nec ſibi antea animadverſa fuerit, in cauſa fuiſſe ait *vel inadvertentiam, vel nimiam comitis à Saturno diſtantiam, vel parvitatem, vel conjunctionem.* Sed vana effugia hæc eſſe quis non videt? Cum enim jam ab anno 1646. & ultra fortè Saturni phaſes deligenter reſpicere cœperit, teleſcopio è convexis vitris compoſito, quo ſemper Saturnum ſimul & comi-

mitem hunc, licet triplo longius recederet comprehendi neceſſe erat, quænam illa fuit *inadvertentia* qua fiebat ut nunquam ei in oculos incurreret? cur non eadem mihi quoque illum ſubducebat, nihilo magis admonito? Quin etiam hinc patet non bene prætexi magnam à Saturno diſtantiam, cum quoties ad hunc reſpiceret, ſimul ante oculos ſeſe ſiſteret comes ejus. Et ſanè diſtantia illa vix tria prima ſcrupula excedit, cum Medicei planetæ omnes longius à Jove evagentur, extimus etiam ſcrupulis quatuordecim. Parvitas ergo illum occuluit. At hoc idem eſt quaſi fateatur ſuis illum organis detegi nequiiſſe: certe enim nimium exilis erat, at mihi nequaquam.

Poſtea tamen edita obſervatione mea, cum à Clariſſimo Viro Mich. Angelo Riccio eſſet admonitus, vidiſſe ſe ſtellulam hanc affirmat, indicans etiam quo ad Saturnum ſitu, & quoties illam obſervaverit. Verum cum diligentius haſce obſervationes examino, invenio profecto non optima fide eas commemorari; ſed adeo miſere vereri Euſtachium ne bonitatem noſtrorum teleſcopiorum non aſſecutus putetur, ut quæ nunquam in cælo vidit, aut per rerum naturam videre potuit, tamen ſibi viſa incogitanter afferat. Quod ut appareat, periodus primò Saturnii comitis expendatur, quam 16. circiter dierum eſſe, ex obſervationibus meis, toto triennio continuatis (niſi & has confixiſſe dicar) manifeſtum feci: ſed eſto tantùm ea veræ proxima ſit, quoniam ſuas obſervationes *tantulum refragari* Euſtachius ſcribit. Die igitur 30. Junii, anno 1657. horis 2½, poſt ſolis occaſum, item ſequentibus diebus 2, 4, 9, 12, Julii, ad partem orientalem Saturni animadverſum ſibi comitem ait; 14° non apparuiſſe. Die 20. ad occaſum fuiſſe ſitum; utrum in maxima, mediocri, an minima diſtantia apparuerit nuſquam addit. Certe equidem tribus prioribus harum obſervationum, ad occaſum revera poſitus erat, ut ex tabulis colligo. Sed putemus inverſionis teleſcopii rationem non habuiſſe Euſtachium, atque ita ſicut ei videbatur, ſi tamen viſus eſt, orientem ſpectaſſe comitem rectè dixerit. At die 9 & 12 Julii, quibus

ſibi orientalem itidem apparuiſſe aſſerit, omnino ad occaſum tranſierat, ac rurſus 20. Jul. ad latus orientale, cum Euſtachius ab occiduo ſibi repertum ſcribat.

TAB. LI. fig. 3. In figura appoſita clarius hoc liquebit; in qua circulus A B orbitam Lunæ Saturniæ exhibet, in 16 partes diviſam, ipſaque AB rectam ad nos obverſam. Die igitur 30 Jun. 1657, hora 10 veſp. invenio locum comitis grad. 207. 16′ ab apogæo A, methodo ſcilicet ea quam in Syſtemate Saturnio tradidi. unde prope num. 10 conſtitiſſe debuit, paulo tantum citerior. Atque hinc porro in ſingulos dies ſingulas circuli partes numerando, ſequitur die 2 Jul. ad num. 12. progreſſum eſſe. Item 4. Jul. ad num. 14. Inde poſt dies 5, nempe 9 Jul. ad num. 3. Ac porro 12 Jul. ad num. 6. Et denique 14 Jul. ad num. 8. qua die recte divinavit conjunctum Saturno fuiſſe. Reliquis verò plane infeliciter. Si enim ad num. 10, 12, 14, orientalis ſpectatus fuit, neceſſario ad num. 3. & 6 occidentalis factus eſt. Nec quidem ulla ratione ad num. 14 & 6, qui è diametro ſibi oppoſiti ſunt, idem latus Saturni obtinere poterat, uti Euſtachii obſervationes poſtulant. Denique cum 20 Jul. ad num. 14 reverterit, ubi & die 4 Jul. inveniebatur, quomodo evenit quæſo, ut, qui tunc ad orientem, idem nunc, quamvis eodem loco, ad occidentem comparuerit? Etiamſi mea periodus vera non eſſet, quænam tamen illa Euſtachii fuerit oſtendi mihi velim, paululum diſcrepans, qua ſua hæc viſa tueatur. Debuerat ſane hîc, ſi uſquam, Fabrius illi opem tuliſſe; ſaltemque perpendiſſe an ſtare ullo modo iſtæ obſervationes poſſent: aut, ſi nobis imponere vellet, quotlibet duntaxat novas è tabulis meis concinnaſſe. Nam quas nunc adferunt, facile nimis deprehenditur, ideo tantum productas fuiſſe, ne nihil vidiſſe exiſtimentur.

Credo & faſciam nigricantem in Saturni diſco, liquido ſibi conſpici dixiſſet Euſtachius, ni Fabrio viſum fuiſſet eam nimium hypotheſi meæ annulari favere. Cum autem ne optimis quidem ſuis perſpicillis eam cerni affirmet, hinc quoque quanto illa meis deteriora ſint perſpicuum fit. Nam ne mihi

mihi phænomenon illud confictum credatur, idem & in Anglia pridem obſervari cœpiſſe ſciendum eſt; ut liquet ex literis Viri Clar. Joh. Wallisii, Oxonia ad me datis 22. Dec. 1658. quibus inter alia hæc ſcribit. *Monebam etiam eiſdem literis* (nempe datis 29. Maji, 1656) *de Saturni faſcia quam jam ante obſervaverat D. Ball, & ſciſcitabar num tu eandem conſpexeras*, &c. Eam porro faſciam à 5. Febr. 1656 ad 2. Jul. quo tempore rotundus Saturnus abſque anſis apparuit, medium Planetæ diſcum ſecare D. Ball. adnotavit, ut in ſchemate ad me miſſo expreſſa eſt. Atque ita mihi quoque fuerat eo tempore obſervata, ut cernitur pag. 544 ſyſtematis Saturnii, quam figuram hîc repeto. Poſtmodum tamen renatis Saturni anſis cum difficillimè conſpici eadem faſcia cœpiſſet, minus rectè quoque à D. Ball, quantum ad ſitum attinet, depicta eſt. At in mearum obſervationum adverſariis, die 26 Nov. 1656, & alias adſcriptum invenio, lineam obſcuram fuiſſe evidentiſſimam, eo nempe poſitu qui pag. 545, Syſtem. Saturnii memoratur. Neque id monere neglexiſſem, obſervationes eas recenſens, ſi quicquam profuturum putaſſem apud illos qui me data opera lectores fallere voluiſſe ſuſpicarentur. Difficillime autem, ut dixi, tractus hic obſcurus deinceps cerni cœpit, imo vix jam amplius animadverti poteſt; quod & ſyſtemati meo conſentaneum eſt, quippe magnâ jam annuli Saturnii inclinatione; ad quam accedit, quod & anſarum ſplendor, duplo quam alias luci- diorem Saturnum efficiens, oculorum aciem nunc magis impedit. TAB. LI. fig. 4.

Qualia igitur ſint Diviniana teleſcopia cum noſtris collata, ex his quæ dicta ſunt, cuilibet manifeſtum opinor. Eadem verò & Anglicanis viliora eſſe alia præterea ratione oſtendam, quo minus dubitetur phænomena ea vera eſſe, quæ pariter cum Anglis ego obſervavi. Nam & illa quæ ad anſatas Saturni phaſes attinent, teſtimonio illorum confirmaturus ſum. Vir quidam nobilis ex Gallia, eruditus, acerrimique ingenii, qui Romæ teleſcopia apud artificem iſtum viderat, hoc ipſo anno 1660, ſuper iis hæc ad me ſcribit. *Il*

*me*

*me monſtra les plus beaux de ſes teleſcopes, qui paſſent au de la de 30 pieds; & nous les comparames avec un de ceux de la methode du Chevalier Neal, qu'on a envoyé au Cardinal Ghiſi; il n'a garde de ne tirer l'avantage de ſon coſté, mais ſans mentir il ſe trompe lourdement.*

Et meliora igitur Romanis eſſe, illa quæ ex Anglia deportata erant, judicat is qui coram comparationem utrorumque inſtituit, & Euſtachium tamen obſtinate hoc pernegare teſtatur, adeo ut ſi jam mea Romam deferam, nihil apud illum quidem ſim profecturus. Quid autem huic homini facias, aut quis hæc videns non merito exiſtimet, uſque adeo privati compendii cura eum duci, ut quid verum ſit diſcernere aut non poſſit aut nolit?

Non ægre nunc fidem habitum iri ſpero, tum mihi tum Anglis ſimul obſervatoribus, qui anno 1657 oblonga Saturni brachia diſco utrinque conjuncta ſpectavimus, qualia exhibet figura Syſtematis mei pag. 545. quam hîc repono; non autem binorum orbiculorum formâ à medio diſco disjunctorum, ut Euſtachius ſe illa eodem tempore vidiſſe dejerat.

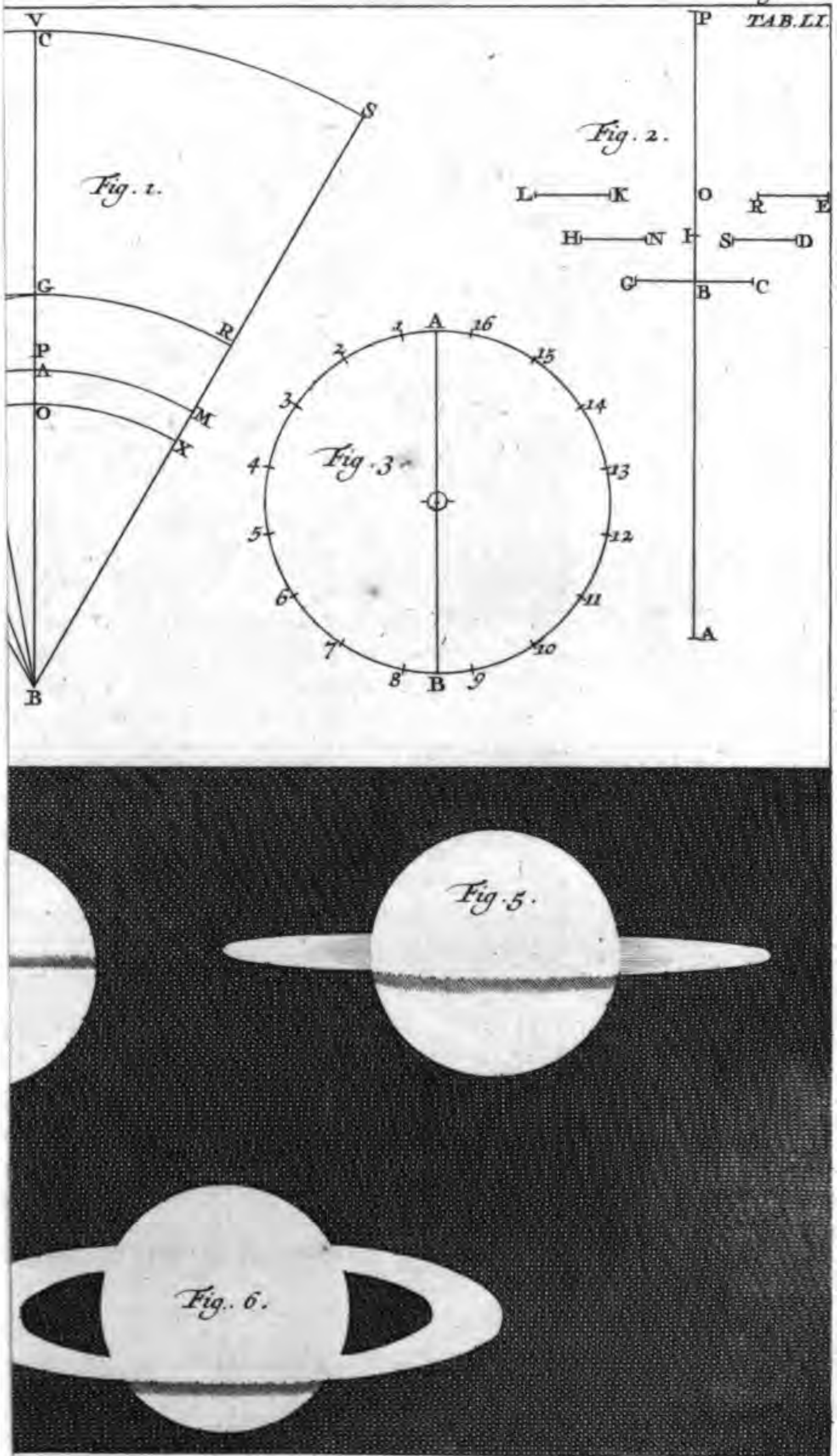
TAB. LI. fig. 5.

Adderem hîc ſchema quod mihi à D. Ball, ſuprà memorato, advenit, niſi planè ſimile eſſet huic noſtro, hoc uno tantillum duntaxat abludens, quod brachia illa ubique paulo craſſiora ille referat.

Eam vero formam à 5 Nov. 1656, ad 9 Jul. 1657 ſibi apparuiſſe ſcribit. Apertis autem brachiis, qualis pag. 547. Syſtematis mei & hîc repræſentatur, talem à 9. Nov. 1657 ad 7 Jun. 1658, idem obſervator depingit, ſimillima prorſus figura, niſi quod ad poſitum zonæ obſcuræ attinet, de quo dixi ſuprà. Ac denique à 3 Jan. 1659 ad 17 Jun. ejuſdem anni, anſis paulo latius adhuc apertis. Et hæc quidem ille, ignarus adhuc meæ hypotheſeos, ne ob præconceptam opinionem aliquid indulſiſſe ſibi exiſtimetur. Neque ego aliter iſta quam ſe revera habent referre auderem, cum redarguere me, ſi fallam, autori obſervationum in promptu ſit.

TAB. LI. fig. 6.

Quænam igitur illa ſunt Euſtachii perſpicilla palmorum 24, quibus rotundi globuli rectorum loco brachiorum cernebantur?




Digitized by Google

Digitized by Google

tur? Imo etiam loco anſarum jam adapertarum, quales in ſyſtemate meo pag. 546. Etenim & anno 1658 globulos tantum ſibi viſos ait, quales in Fig. 1. iſtarum tredecim tabellæ LII. Quid teſtes citat qui ſecum iſta obſervaverint? Quos equidem fide digniſſimos eſſe cenſeo, quæque viderint ingenuè faſſuros, ſed eo ipſo mihi videntur de teleſcopiorum illius vitio & ineptitudine teſtimonium perhibere. Mallem aliquos adduxiſſet qui ſecum Saturni comitem obſervaſſent.

Globulorum formâ mihi quoque brachia apparuiſſe dixeram, quoties 5 aut 6 pedum tubos adhibuiſſem. Hiſce igitur rectiſſime ea, atque uti debent, mihi cerni arbitratur; cum vero oblonga ac Saturni diſco affixa, tubo 23 pedum referuntur, falſa imagine me deludi, idque teleſcopii culpa contingere. Nimirum perſuadere mihi vult exigua illa omnium maximis præferenda eſſe, quaſi ne hoc quidem diſcernere adhuc didicerim. Sed jam ſatis ſuperque, quid de meis teleſcopiis obſervationibuſque, quidque de Euſtachianis exiſtimandum ſit, me oſtendiſſe arbitror. Nec tamen quæ dixi in damnum illius cedere velim, ſed potius ſtimulos addere, quò magis magiſque incumbens, ſua ipſius primo, deinde & noſtra teleſcopia ſuperet. Adeo enim non invideo his qui artem adeo egregiam promovere nituntur, ut decreverim etiam cuncta quæ circa eam mihi comperta ſunt, ſed & præcipue quæ ad theoriam Dioptrices ſpectant, propediem in lucem emittere: quod vel ideo mihi faciendum video, ut de veritate obſervatorum quæ in Saturni ſyſtemate protuli, plures inquirere poſſint, monſtrata arte qua ſibi paria noſtris perſpicilla parent.

Cæterum unicum etiamnum diſcutiendum reſtat Euſtachii phænomenon, quo vel ſolo Syſtema meum univerſum corruere dicitur. Eſt autem rurſus de genere eorum quæ non tantum non extant, ſed ne quidem per rerum naturam apparere ullo modo poſſunt: quod, ſi non vitrarius artifex, at P. Fabrius certè animadvertere debuerat. Ajunt ſpatia illa bina, cavitate anſarum intercepta, nigriora reliquo cælo in-

veniri; cum contra, ex hypotheſi mea, cælum ipſum ſit quod trans aperturas eas conſpicitur. Ego vero quæram ex Fabrio, qui fiat ut cælum omne, cum vel interdiu vel noctu aſpicitur, non planè tenebroſum nigerrimumque appareat. Fateri cogetur in cauſſa eſſe vapores illos ſive atmoſphæram Terræ circumfuſam, quæ interdiu quidem à Sole, noctu verò à Luna aut ſtellis illuſtretur. Atque adeo ſi vapores ii auferantur, planè nigrum appariturum eſſe cælum, æquè ac ſpatia illa, Saturni anſis incluſa. Atqui tota atmoſphæræ illuſtratæ craſſitudo tam inter nos ac Saturnum, quam inter nos nigrumque cæli convexum interjecta eſt; ergo illius interpoſitu æque multum de Saturniarum macularum nigredine, atque de illa quæ cælum obtinet decedere neceſſe eſt; ac proinde eæ maculæ nihilo obſcuriores reliquo æthere apparere poſſunt. Quod ſi igitur nihilominus hoc ſibi videri pertendant, fateantur oportet viſus quadam fallacia id contingere, vicino forſitan ſplendore Saturni, anſarumque ſuarum, paulo obſcuriora ſpatia illa reddente, quam abſque eo apparitura eſſent. Quanquam mihi nunquam id evenit: quinimo ejus contrarium quodammodo fieri animadverti. Dum enim anſæ exigua tantum adhuc rima paterent, veluti circa 26. Nov. 1656, contigiſſe nullus dubito, nondum nigræ lacunæ diſtincte cerni poterant, ſed tantum tenuiori luce, illa brachiorum pars, quæ diſco Saturni proxima erat, perfuſa videbatur. Qua eadem ratione & faſcia in Saturno, de qua ſuprà, paulò tantum obſcurior reliquo ejus diſco cernitur, quia nempe licèt revera nigra ſatis vel etiam nigerrima ſit, eſt tamen tenuiſſima, unde & latior ſimul juſto & dilutior ſpectatur.

Atque hinc apparet, fruſtra etiam adverſus hypotheſin meam objici, quod per eam nunquam Saturnus rotundus ſine brachiis videri poſſit; quia nempe exiguam ſaltem lucem in extrema annuli ora reliquiſſe videbar, qua futurum ſit ut non penitus viſum effugiat annulus, quanquam à latere inſpectus nec brachia proinde in totum aboleantur. Nunc enim ſciant nihil obſtare quo minus omnem lucem margini annulari adimam, neque hoc abſurdum in rerum natura ſtatui Fabrius

brius contendet, eſſe nimirum materiam aliquam quæ radios ſolares omnino non reflectat, quippe qui de quatuor novis, quos fingit, Saturni ſatellitibus, duos atros, ac per ſe inviſibiles, nulliſque ſolis radiis illuſtrandos, reliquos vero ſplendidos eſſe imaginetur. Verum hypotheſim illam jucundiſſimam poſtea videbimus; ſunt enim alia etiam prius ventilanda quibus noſtra oppugnatur.

Dixi planam annuli ſuperficiem, eam quæ nobis obverſa eſt, aliquando à Sole averſam non illuminari, unde nimirum nec cerni nobis tunc poſſit, ac proinde nullas Saturno anſulas præſtet. Quod cum certiſſima ratione fieri demonſtraverim, adverſarii mei breviter atque uno verbo negant, opticiſque regulis refelli dicunt. Quomodo tamen? Ponendo ſcilicet & Saturni diſtantiam & Solis diametrum longe quam ego majores, quo fiat ut ſuperficies dicti annuli, ad nos ſpectans, ſemper quoque à Sole lumen accipiat. Atqui ego & diſtantiam illam & diametrum (nam una alia expendet) multo majores exhibui in Syſtemate meo quam alius quiſquam omnium Aſtronomorum. Nam cum Ptolemæus & Copernicus diametrum Solis, tantum 5 Terræ diametris taxent; Ariſtarchus & Bullialdus 7; Ricciolus 33; Wendelinus, quo pluribus nemo, 64; ipſe 111 dedi, nec ſine ratione ut puto. Et Fabrio tamen parcus fuiſſe videor, qui Solem longe majorem etiam fieri vult, ne ſtare hypotheſis mea poſſit, utque merito hanc Optices ignorantiam mihi impegiſſe videatur. Cum ipſe interim vel Optices vel Aſtronomiæ uſque adeo imperitus ſit, ut non advertat, licet centies millies majorem quam ego Solis diametrum ſtatuat, ac ſimul planetariorum orbium amplitudinem eadem proportione adaugeat, tamen diametrum illam, ex Saturno conſpectam, non niſi 3 circiter ſcrupulorum fore; atque etiamſi tanta illinc appareret quanta nobis in Terra poſitis, tamen illa quam dedi demonſtratione evinci, ſuperficiem annuli ad nos verſam, aliquando Solis lumine non illuſtrari, propterea quod planum annuli productum, inter nos Solemque tranſeat. Nam ſi hoc fieri quandoque neget, oportet ſtatuat diametrum Solis, (quod ridiculum eſt) ipſius

magni orbis diametri, in quo circa Solem Tellus defertur, ſaltem duabus quintis partibus æqualem eſſe. Hoc enim ita eſſe facile oſtendere poſſem, ſed Aſtronomi ex demonſtratione mea pag. 570 haud ægre deducent. Nam ſi planum annuli plano eclipticæ foret ad rectos angulos, non duas quintas ſed integram orbis magni diametrum dicerem; duæ quintæ autem oriuntur ex inclinatione graduum 23½ quanta eſt dictorum planorum.

Invenio vero & Graphices inſcitiam mihi objici, quia nempe umbras quaſdam, quas in ſchemate Saturni num. 10. Euſtachius depinxit, alioqui non fuerim reprehenſurus. Eum enim accerſiviſſe quidem illas, ſed neceſſario, contendunt, ut ſphæræ formam exprimeret; quia videlicet incertum abſque iis futurum fuerit, an convexus Saturnus, an planus eſſet. Atque ego proinde ineptus, qui *de ſuo* eas umbras Euſtachium addidiſſe dixerim, quas ille ex arte, atque ita flagitante rei natura deſcripſerit. Sed enim jocari hîc libet. Nempe cum temere citra ullam demonſtrationem me ſtatuiſſe arguant, Saturnum circa axem ſuum converti, rogo nunc illos unde tam certo comperérint, Saturni medium corpus globoſum eſſe? Non enim obſervatio ulla puto hoc docuit, ſed colligunt tantum ex analogia quadam inter hunc & alia quædam cæleſtia corpora, ſicut & ego de converſione circa axem. Quid igitur neceſſario umbras ad globum repræſentandum accerſere opus erat? Verum diſſimulare mihi videntur, quaſi non advertant, non adeo me de medii corporis umbra ſenſiſſe, quàm de illa quam ellipticæ figuræ, binas anſas efficienti, tribuit. Huic enim ea lege umbras adjecit, ut annulum ellipticum, non planum ſed rotundum, ſimilemque ſerpenti caudam devoranti, exprimat; neſcio enim quomodo melius formam eam deſignem. Deinde & hoc umbræ ſuæ artificio præſtitit, ut totus iſte annulus poſt globum Saturni poſitus videatur. Qua ex re ſibi ipſi forte Euſtachius abſurdam aliquam Saturni formam commentus eſt, vel aliis certe comminiſcendi anſam præbere potuit. Mihi autem, de umbra illa temere addita, neceſſario admonendi erant lecto-

ctores; quia ſi vera eſſet, refellebat hypotheſin meam, cum alioqui ſchema Euſtachianum, ſi ſine umbris conſideraretur, plurimum illam confirmaret. Sed & me ejuſdem criminis teneri ajunt, quod paſſim umbras majores quam revera ſint adjiciam. Neſcio equidem quas dicant; ſemel enim Saturni globo annuloque umbras addidi, at non tanquam ita obſervaſſem, ſed explicandæ hypotheſeos cauſa, ut nempe appareret quo pacto annulum Saturno circumdediſſem.

Quod ſi faſciam in diſco ejus obſervatam, uti & illas quas in Jove & Marte exhibui, nigriores quàm in cælo ſpectantur, ob oculos poni dixiſſent, non iviſſem inficias. Fateor enim ultro cælatoris culpa hoc accidiſſe; ac in Marte præſertim zonam longe dilutiorem, imprimis circa margines, pingendam fuiſſe. Quam neque perpetuo ibi ſpectari opinor, ſed, ut Joviales faſciæ, mutabilem formam habere, ſicut poſtremis in Marte obſervationibus didici; de quibus alias fortaſſe plura. Nihil autem ejuſmodi mihi viſum in utroque hoc planeta, Euſtachius non alio argumento probat quàm cætera omnia, nempe quia ipſe non viderit.

Quod Syſtemati Copernicano Syſtema meum Saturnium adaptaverim, nemo, ut opinor, jure me reprehenderit. Attamen cum Catholicis omnibus Fabrius illo interdicat, miror quod non vel hoc ſolo nomine rejicienda eſſe omnia commenta mea pronuntiet. Sed videbat, credo, facile in locum Copernicani Syſtematis Tychonicum me ſubſtituere poſſe. Utrum enim adhibeam parum admodum intereſt ad phænomena quod attinet. Sed rei veritas haud aliter quam Copernicum ſequendo explicatur; cujus ſententiam non parum quoque noſtrum Saturni Syſtema commendat.

Non intelligo autem qui tam confidenter, hanc de Terra mota opinionem, tantùm ab hetorodoxis Ariſtarchis tenendam Fabrius aſſeveret. Quoties enim de ea cum Catholicis (Romanis nempe) ſermones confero, profitentur illi ſe nequaquam decretis in contrarium latis teneri, ſive ea à Cardinalibus, ſive ab ipſo ſummo Pontifice profecta fuerint. Quibus videlicet non tantum tribuunt in explicando ſacra-

rum literarum ſenſu, ut etiam de controverſiis quæ, ut vocant, facti ſunt, neceſſario iis ſtandum ſit: ac plane, quietem Telluris rationibus potius adſtruendam, quàm diplomatis ſanciendam, exiſtimant. Quin etiam in Gallia paſſim Syſtema Copernici non tanquam hypotheſin, ſed ut liquidam veritatem propugnari certum eſt, idque ab ipſis Eccleſiaſticis, & Sacerdotibus, qui voluminibus totis publice doctrinam eam tradunt, nihil, quod ſciam, Roma contradicente. Quæ omnia perpendens, pridem credidi præter Aſtronomiæ ignaros, imperitamque multitudinem, tantùm adhuc Cleanthes aliquos, in quibus & Fabrius, antiquo errori adhæreſcere, vique irrita Telluris motui obniti.

Cæterum cum mordicus, ut ait, hoc propoſitum teneat, ac planetas reliquos proinde nullo modo Terræ aſſimilandos putet, nihil mirum eſt, nec ferre eum potuiſſe Saturnicolarum ullam mentionem fieri. Ubi tamen injuria me culpat. Nam non ita de illis diſſerui, ut eſſe aliquos affirmarem, aut, rationibus adductis, veriſimile id eſſe evincerem. Quin imo abſtinere me dixi plura ſcribere de Aſtronomia, qualis incolentibus Saturnum futura eſſet, eo quod abſurdum nimis plerique arbitrentur homines in planetis degere; qui proinde fruſtra me inveſtigare dicturi eſſent, quid ii obſervent, qui in rerum natura non ſunt. Cum autem, in periodo Lunæ Saturniæ computanda, menſes Saturnicolarum nominavi, nihil novum aut inſolitum Aſtronomis feci, quibus nihil frequentius eſt, quam ut in Sole aut Luna aliquem exiſtere imaginentur, qui inde aſtrorum motus ſpeculetur. Non erat itaque quod commentum hoc de Saturnicolis me ibi propoſuiſſe Fabrius culparet. Quanquam etſi ſecus foret, neque primus ego hoc prodidiſſem, neque ridiculum adeo, apud Philoſophos quidem, quam ille exiſtimat. Verum præter inſtitutum ad iſta non digrediar. Vocat me Fabriani Syſtematis contemplatio, illius nempe quo, poſtquam meum diruit, phænomena circa Saturnum commodè exponi poſſe confidit. Nam priora illa, quibus Saturni ipſius motum novis legibus ordinare aggreditur, nihil huc pertinent, neque examinare

ea

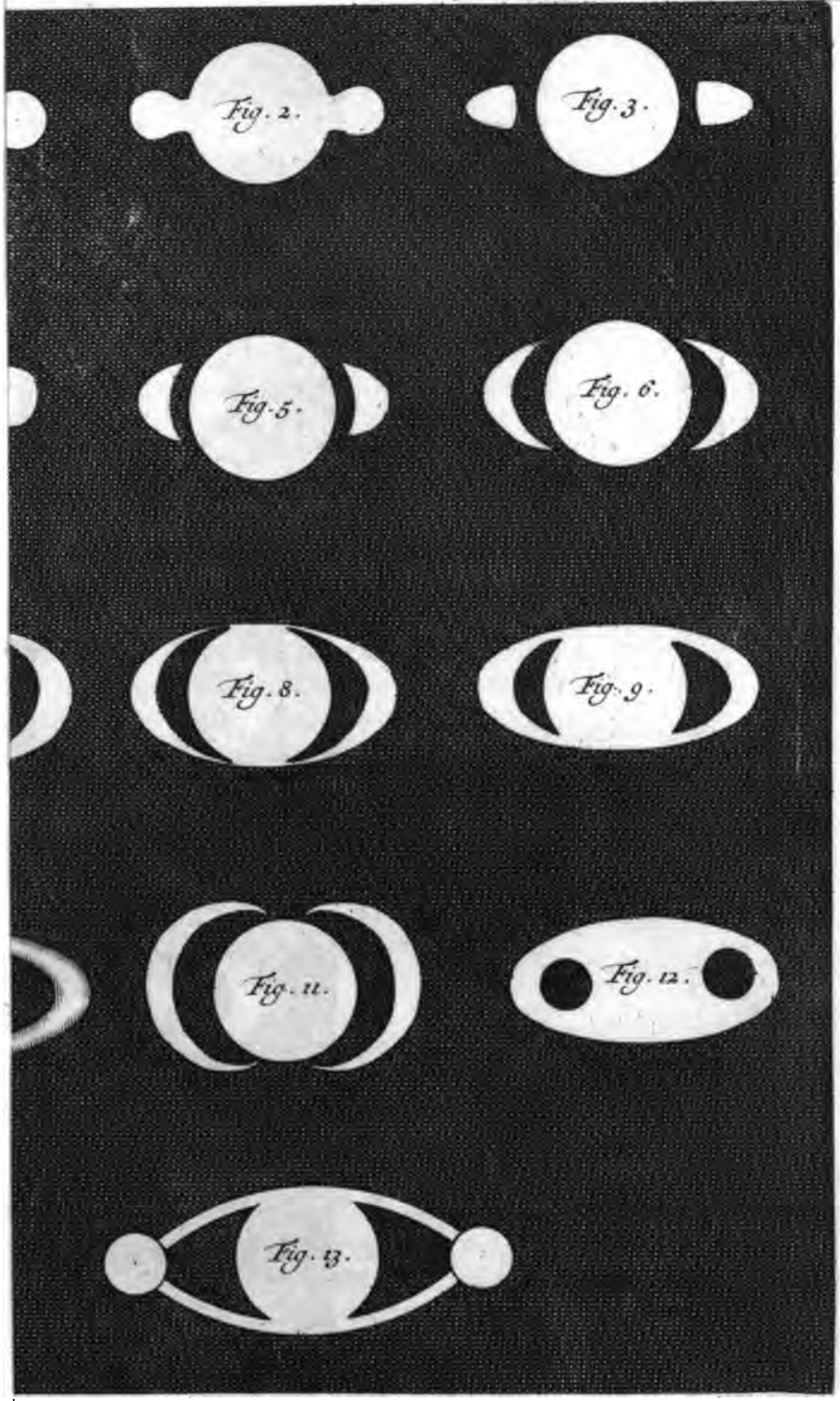
ea operæ pretium fuerit. Miror tamen quid in Tychonica hypotheſi illi diſplicuerit, ut novam à fundamentis extruere in animum induceret: quam quidem vereor ut Aſtronomi ſatis percipere, nedum probare queant.

At nec illa quæ ad phaſes Saturni pertinet, ullo modo clarior eſt, prætereaque ab omni ratione & veriſimilitudine tam longè remota, ut neſciam an refutari à me opus habeat. Cui enim imponet quæſo bellum iſtud commentum de quatuor globulis Saturno proximis, quorum bini lumine ſolis ſplendent, bini alii radios prorſus non reflectunt, ſed natura ſua ſunt obſcuriſſimi. Videor mihi circulatorium quendam calculorum ludum videre, alios ibi albos, alios nigros eſſe, nunc hos, nunc illos oſtendi abſcondique viciſſim. Tale quid enim præ ſe fert mirabilis illa hypotheſis. Quidni verò circulos ſaltem in ſchemate ſuo expreſſit, quos nova hæc Planetarum ſoboles obeunt? Quos circulos non Saturnum in centro habere cerneremus, nec quidem minorem à majore includi, ſed poſt tergum Planetæ binos ex ordine jacere, in quorum utroque duo iſtorum ſatellitum ita currerent, ut nunquam alter alterum aſſequeretur, ſed è diametro ſemper diſtarent. Rectè, ni fallor, mentem Fabrii intellexi, ſin minus, admoneri cupio, fuit enim nonnihil divinandum. Quum autem, his poſitis, phaſin 1, 4, 8, 9, tabellæ ſuæ, facile explicari dicat, TAB. LII. ſcire velim quo pacto Planetæ novi ex minimis maximi fiant. Nam in 1 & 4 Figura, diametrum ne quidem dimidiam habent medii Saturnii corporis, cum in Figura 8, & 9, vel æquales huic, vel majores etiam eſſe neceſſe ſit. Deinde ipſius Euſtachii obſervata phaſis in Figura 10, quomodo ex hac hypotheſi deducetur? Cum neque rotunda corpora ellipticos arcus facere poſſint, & nigri Planetæ minores candidis hîc eſſe debeant, contra quam poſitum fuit: æquales enim inter ſe, poſt aliquantam deliberationem, ſtatuuntur: Quænam porro ſit novorum Planetarum periodus non jam exigam, nondum enim repertam eſſe ait. Sed vereor ut aliqua eſſe poſſit. Nam trium quidem annorum ſpatio, quorum primus 1646, unam illam Figuram 10 ſibi apparuiſſe Euſtachius affirmat, in tabel-

bella quadam, Sereniſſimo Magno Duci Hetruriæ, Fratri T. C. dicata; unde oportet nihil motos fuiſſe interea ſatellites, quod quidem animadverti poſſet. Poſtea vero aliis tribus annis, 1655 nempe, cum duobus inſequentibus, in tantum progreſſi fuere, ut medio horum annorum rotundus Saturnus ſpectatus ſit, extremis vero utriſque cum binis ad latera orbibus, interſtitio aliquo à medio corpore disjunctis. Utinam ridiculi Syſtematis inventori pœna conſtituta ſit, ut motuum iſtorum anomalias inveſtigare teneatur. Piget vero me ultra in his immorari: ſed tamen pauca pro meo illo Saturni comite dicere cogor. Hunc, quia videbatur aliquid in Syſtemate ſuo turbaturus, ſupra Saturnum Fabrius relegavit, ita nimirum ut totus quem percurrit circulus, *Planetâ ſuperior jaceat.* Sed immerito prorſus; ego enim cautionem me dabo, nihil eum anſatis illis phaſibus occurſu ſuo nociturum, cùm puſillus adeo ſit, ut ne quidem, cum prope ad Saturnum accedit, conſpici queat: raro etiam, nec niſi cum rotundus eſt Saturnus, inter diſcum ejus & nos tranſeat, idque ſemidiurno ſpatio. Sinat itaque in ſua illum manere orbita, unáque Mediceos Planetas in vias ſuas, à Magno olim Galilæo circa Jovem attributas, reſtituat, quos nullam omnino ob cauſam, quam quidem aut ipſe adducit, aut ego animadvertere poſſum, loco ſuo ſimiliter expulit.

Jamque percenſui, ni fallor, Princeps Sereniſſime, omnia quæ adverſus me Euſtachius de Divinis, ſeu potius P. Fabrius conquiſivit, quæve ad ſuam hypotheſin ſtabiliendam commentus eſt, quæ quum animo reputo, nulla ſane invenio, quibus non pro me ſibi eruditi reſponſuri fuerint, aut venturi temporis experientia. Interim pauca hæc repoſuiſſe non me pœnitet, quia, licet artificem illum merito neglexiſſe tacendo videri poteram, non idem fortaſſe contra alterum, quem ferunt alicujus nominis eſſe adverſarium, valiturum erat ſilentium; utique quum ſatis omnibus conſtet pleraque ab hoc fuiſſe ſuppeditata, multique, non tam quid, quam à quo ſit objectum, reſpiciant. De cætero rogo C. T. ut, qua uſus ſum in diſputando, libertatem boni conſulat: Idque ita, ſi & provocatus in arenam hanc deſcendi, & juſtæ defenſionis terminos nuſquam tamen exceſſi. F I N I S.

Digitized by Google




Digitized by Google

Digitized by Google

CHRISTIANI HUGENII

DE

# SATURNI ANNULO

OBSERVATIONES.



Digitized by Google

Digitized by Google

CHRISTIANI HUGENII

DE

# SATURNI ANNULO

## OBSERVATIONES.

### I.

### *Obſervationes in Saturnum Pariſiis habitæ in Bibliotheca Regia.*

ANno 1668, 17 Aug., hora 11 veſpertinâ D^ni^ Hugenius & Picart obſervarunt Planetam Saturnum ope teleſcopiorum 21 pedum & invenerunt figuram ejus talem qualem hic exhibemus, globo in medio manifeſte excedente ſupra & infra ovalem quod vix dum anno præcedenti erat conſpicuum. TAB. LI. fig. 2.

Menſurarunt diverſimode inclinationem magnæ diametri Ovalis ad æquatorem, quæ inventa eſt circiter 9 graduum; licet eo empore tantum debuerit eſſe 4 graduum; ſecundum illa, quæ D. Hugenius dixit in Syſtemate Saturni, planum annuli, qui circumdat globum Planetæ cum plano Eclipticæ tantum efficere angulum 23. gr. 36; ſed cum ultima hæc obſervatio, & ſimiles aliæ hujus anni & præcedentis, magis exactæ ſint & habitæ tempore magis opportuno ad menſurandam obliquitatem, illis, quæ fundamentum fuere memoratæ deteteminationis; D^us^ Hugenius invenit, loco 23 gr. 36 angulum plani Annularis & Eclipticæ eſſe circiter 31 graduum; & hoc poſito, non ſolum formam, quam jam ha- *Vera annuli inclinatio.*

LIII 2 bet

bet Saturnus, ſed & omnes illas, quas obſervarunt Aſtronomi ab illo tempore a quo veras obſervare potuere, congruere perfecte cum hypotheſi annuli, & peculiariter obſervationem Dni Campani, Anni 1664 initio Julii, quam ipſe publici juris fecit, in quo magna Ovalis diameter duplicatæ minori diametro æqualis eſt.

*Phaſis rotunda.* Quod autem ad rotundam Saturni Phaſin attinet, non poteſt niſi parum admodum tempus hujus mutari, ex memorata mutata inclinatione ita ut Dus Hugenius adhuc dum phaſin hanc rotundam expectet anno 1671, in quo æſtate anſas amittere inchoabit, quas niſi poſt annum circiter recuperabit, juxta illa quæ tradidit in Syſtemate Saturni.

## II.

## *Excerpta ex literis D. Hugenii, Academiæ regiæ ſcientiarum ſocii, ad auctorem Diarii Eruditorum de figura Planetæ Saturni.*

*Brachia Saturno renata.* Cum Saturnus abdicaverit figuram ſuam rotundam poſtquam hoc anno 1672 ex radiis ſolaribus emerſit, uti anno præcedenti prædixeram, & cum illi brachia ſint renata; ultima mutatio non minus meretur, ut in Diariis veſtris notetur, quam quædam aliæ præcedentes, quarum ibidem mentionem feciſti.

Ultimum in conjunctione cum Sole fuit Planeta hic 12 Martii præterito, in 22 gr. 35 min. Piſcium; magna autem obliquitas hujus loci Zodiaci ad noſtrum horizontem, quando oritur, in cauſa fuit quo minus tribus menſibus, aurora prohibende, videretur; nam 5 Junii tantum Dus Caſſini primum illum potuit obſervare, cum brachia Saturni jam facta eſſent adeo clara & ampla, ut inde colligi debuerit, jam à longo tempore fuiſſe inſtaurata; Obſervabat etiam in diſco Saturni parvam umbram ad latus ſeptentrionale brachiorum, pari-

*Umbra in diſco Saturni.*

Digitized by Google

riter ac exhibui in Syſtemate Saturni Tab. XLIX. *fig.* 6.; quod, æque ac inſtaurata brachia, congruit cum iis quæ ſtatui in illo Syſtemate de annulo, quo cingitur Saturnus. Sed quoniam hæc hypotheſis præcipue confirmatur obſervationibus, quas ultimo anno fecimus, quarum quædam nondum cum publico communicatæ fuere, ut mihi veniam concedas rogo has nunc memorare, cum annotationibus, quas ad eas feci.

Anno 1671 Saturnus apparuit rotundus ſine brachiis aut anſis uti prædixi ante annos 14, quum publici juris feci meum Syſtema, licet id acciderit duobus menſibus prius quam expectaveram, ſcilicet in fine menſis Maji. Percepta deinde eſt quædam interruptio figuræ rotundæ, quam non prævidi, & quam difficulter admodum prævidere potuiſſem, quia Saturnum tantum obſervaram per unicum annum, cum hæc vaticinarer. Sed noſti, quam primum intellexerim, brachia rediiſſe, quod D^{us} Caſſini obſervavit 11 & 14 Auguſti, me affirmaſſe illa certo certius brevi iterum peritura, quod quoque verum repertum eſt; nam 4 Novembris brachia Saturni erant adeo obſcura, ut dubitarem an quidem iterum apparerent, licet D^{us} Caſſini affirmet ſe illa percepiſſe ultimâ vice 13 menſis ſequentis Decembris, poſt quod tempus figura rotunda duravit, donec Saturnus in radios Solares ſe abſcondit.

Hæc ultima brachiorum Eclipſis præcipue veritatem meæ hypotheſeos probat; facile enim patet quam difficile fuiſſet ſecundam prævidere mutationem, priori adeo vicinam, niſi illius veram cauſam perſpectam habuiſſem; præterquam quod modus, quo brachia ſecunda vice ablata fuere is ipſe ſit, quem ſtatui in meo Syſtemate. Vidimus enim illa pedetentim deficere à claritate ſuâ, licet ſemper manſerint ſatis ampla; quod erat certum indicium, radios ſolis valde oblique illuſtrare ſuperficiem annuli Saturni, quæ ad nos converſa erat, quam tandem non amplius illuſtrarunt ſed quidem oppoſitam. In præcedenti apparitione figuræ rotundæ, à fine Maji uſque ad 14 Auguſti, brachia latebant, non quia non illuſtrabantur, ſed quia viſus noſter, parum admodum *Saturnus rotundus.*

vel omnino nihil elevatus erat ſupra ſuperficiem annuli, quem Sol intuebatur.

Hæc omnia tantum illis ſcripta ſunt, qui cum cura examinarunt, quæ tradidi in Syſtemate Saturni: & pro iis adhuc addo, quantum attinet ad lineam æquinoctialem vel rotundæ apparitionis Saturni, quæ linea formatur interſectione annuli & plani orbitæ planetæ, me nullis cogi obſervationibus, ad ſitum illius mutandum quem in Syſtemate Saturni præſcripſi in 20½ gr. Piſcium & Libræ. Quoties Saturnus è Sole viſus perveniet ad illa Zodiaci loca, rotundus apparebit, etiam quando ab hiſce tantum duobus gradibus removetur; nam ex obſervationibus anni ultimi percepi ita reſtringendos eſſe limites quos 6 graduum ſtatueram, ut ſatis facerem quibuſdam Galilæi & Gaſſendi obſervationibus, quorum Teleſcopia minoris notæ fuerant, quam credere auſus eram. Juxta ultimas haſce limitationes minus apparitiones formæ rotundæ Saturni durabunt quam ipſe olim prædixi; ita ut anno 1685 non initio menſis Martii, ſed menſe Julio, brachia amittet Saturnus prope finem apparitionis ſuæ, & illa recuperabit ſequenti menſe Novembri; pariter 1701 non poterit videri rotundus, niſi menſe Junio, initio ſuæ apparitionis, & menſe Auguſto brachia ejus incipient renaſci.

*Linea æquinoctialis annuli.*

Antequam finem huic ſcripto imponam, hic addam, Tabulam, quam dedi pro motu parvæ Lunæ, vel ſtellæ, quæ comitatur Saturnum, & circa illum volvitur 47 minutis minus quam 16 diebus, huc uſque repertam eſſe adeo obſervationibus congruam, ut nondum videre queam, ſitne quidpiam addendum vel detrahendum.

FINIS.

# CHRISTIANI HUGENII
# ΚΟΣΜΟΘΕΩΡΟΣ,
SIVE
## De Terris Cœleſtibus, earumque ornatu,
## CONJECTURÆ
AD
## CONTANTINUM HUGENIUM,
Fratrem:
GULIELMO III. MAGNÆ BRITANNIÆ REGI,
A SECRETIS.

Digitized by Google

Horat. Epiſt. 6. lib. I.

*Hunc ſolem, & ſtellas, & decedentia certis*
*Tempora momentis, ſunt qui formidine nulla*
*Imbuti ſpectent: quid cenſes munera terræ*
*Quid maris extremos Arabas ditantis & Indos?*
*Ludicra quid, plauſus, & amici dona Quiritis,*
*Quo ſpectanda modo, quo ſenſu credis & ore?*

# BENEVOLO LECTORI SALUTEM.

*Libellus hicce jam ad umbilicum deductus, & prælo deſtinatus erat, cum maximo rei literariæ damno Illuſtrem ejus Auctorem primum morbus, dein mors occupavit. Qui tamen ut in lucem prodiret, cavit; ultima voluntate fratrem, ad quem ſcriptus eſt, rogitans, hujus ut edendi curam ſuſcipere vellet. Cui rei Nobiliſſimo Viro innumeris occupationibus & peregrinationibus, utpote qui Magnæ Britanniæ Regi ad res Batavas à ſecretis eſſet, diſtracto vacare non licuit, niſi anno ferme poſt Auctoris obitum. Qua re, intercedente deinde etiam Typothetarum mora, factum eſt, ut cum editioni jam omnia pararentur, & hic Vir fato ceſſerit, adeoque & Parente & eo, qui poſt parentis obitum ejus vicem gerebat, & ad quem deſtinatus erat, deſtitutus fuerit hic Libellus. Eadem tamen, qua ab Auctore conſcriptus erat, ratione, eademque ad fratrem, licet jam defunctum, inſcriptione, (Re-*



Digitized by Google

*ligio enim fuit quidquam immutare) prodit in publicum, non dubia ſpe, fore, ut eruditi, ſicut reliqua omnia Auctoris, ſic & ultimum hunc ejus fœtum benigne accipiant. Demonſtrationes equidem Mathematicas non invenient ubique, neque enim res patitur, ſed, quo in his rebus nihil ultra deſiderari jure poſſe videtur, veriſimiles & ingenioſas conjecturas. Quæ ex cælorum notitia depromi potuerunt, ea hic videbunt ratione demonſtrata; quæ ex iis non patent, ex cœleſtium corporum cum tellure noſtra affinitate ſolerter conjecta. Verum hujus quid ſit, ex ipſo Auctore commodius perſpicies. Vale.*

Digitized by Google

# CHRISTIANI HUGENII
# COSMOTHEOROS,

SIVE

De Terris Cœleſtibus, earumque ornatu, Conjecturæ.

AD

## CONSTANTINUM HUGENIUM,

Fratrem.

## LIBER I.

Fieri vix poteſt, Frater optime, ſi quis cum Copernico ſentiat, Terramque, quam incolimus, è Planetarum numero unum eſſe exiſtimet, qui circa Solem circumferantur, ab eoque lucem omnem accipiant; quin interdum cogitet haud a ratione alienum eſſe ut, quemadmodum noſter hic Globus, ita cæteri quoque iſti, cultu ornatuque, ac fortaſſe habitatoribus non vacent. Præſertim ſi ad ea quoque reſpiciat quæ poſt Copernici tempora in cœlo deprehenſa ſunt; Comites nempe ſtellarum Jovis & Saturni, Lunæ montes campoſque, & alia multa; quibus non ſolum veritas inventi ab illo ſyſtematis, ſed & ſimilitudo ac cognatio, Terram inter & Planetarum corpora, magnopere confirmatur. Itaque & nobis, cum prælongis Teleſcopiis ſidera unà ſpecularemur; quod jam per multos annos, propter occupationes tuas & continuam fere abſen-

tiam, non licuit; ſæpius ea de re ſermones habitos memini. Qualia vero eſſent, quæ in iſtis regionibus extarent Naturæ opera, id ne ſperandum quidem eſſe ut unquam ſciri poſſit, fruſtraque proinde quæri, certo credebamus. Neque vero aut a priſcis Philoſophis, aut a recentioribus quidquam ejuſmodi tentatum fuiſſe comperi. Nam inter illos quidem, jam ab ipſo Aſtronomiæ exortu, cum primum Sphæricam eſſe Terræ formam intellectum eſt, eamque undique æthere cingi, fuere qui auderent alios eſſe in ſideribus mundos, imo innumerabiles dicere. Poſteriores vero, ut Cardinalis Cuſanus, Brunus, Keplerus, qui & Tychonem Braheum idem ſenſiſſe ſcribit, Planetis quidem incolas ſuos tribuerunt; Cuſanus & Brunus etiam Soli, & ſtellis inerrantibus: nihil tamen ulterius aut hi aut illi quæſiviſſe inveniuntur; neque etiam nuperus auctor Gallicus dialogi ingenioſi de Mundorum multitudine. Tantum fabulas quaſdam de Lunæ populis nonnulli contexuerunt, animi causâ, Lucianicis, quas noſti, haud multo veriſimiliores. Nam & Keplerianas his annumero, quibus ille in ſomnio Aſtronomico ludere voluit.

*Fuiſſe qui Planetis incolas tribuerint, ſed nihil præterea de iis inquiſiviſſe.*

Mihi vero, qui tot viris egregiis nequaquam me perſpicaciorem eſſe exiſtimo, ſed eo feliciorem, quòd poſt illos tantùm non omnes, natus ſim; cum ab aliquo tempore diligentius iſta meditari cœpiſſem, viſum eſt non prorſus obſeptas eſſe, de rebus tam procul diſſitis, inquirendi vias, ſed veriſimilibus conjecturis abunde materiam præberi. Quas conjecturas meas, prout ſeſe ſubinde obtulerunt, in adverſariis annotatas, nunc in ordinem redigere, tibique exponere volui; atque aliquid etiam adjicere de Sole, Stelliſque inerrantibus, & mundi magnitudine, cujus particula quædam minima eſt totius Syſtematis noſtri complexus. Et hæc quidem, pro ſolito tuo res ſuperas cognoſcendi ſtudio, libenter te lecturum arbitror. Mihi certe ſcribere ea jucundum fuit; utque ſæpe aliàs, ita nunc, velut in re ipſa, verum eſſe expertus ſum illud Archytæ; *Si quis in cœlum aſcendiſſet, naturamque mundi & pluchritudinem ſiderum perſpexiſſet, inſuavem illam admirationem ei futuram,*

(*quæ*

Digitized by Google

(*quæ alioqui jucundiſſima fuiſſet*) *niſi aliquem cui narraret habuiſſet*. Utinam vero hæc noſtra narrare non omnibus poſſem, ſed præter te lectores arbitratu meo deligere liceret, qui nec Aſtronomicæ ſcientiæ, nec Philoſophiæ melioris rudes eſſent; quibus facile conatus hoſce probatum iri, nec, propter novitatem, defenſione opus habituros confiderem. Quia vero & in imperitiorum manus venturos provideo, & fortaſſe quorumdam ſeveriora judicia ſubituros, puto non abs re fore ut utrorumque reprehenſiones jam hinc repellere coner.

*Occurritur objectionibus imperitorum.*

Atque erunt quidem, qui cum Geometriam aut Mathematicas nunquam attigerint, omnino vanum ac ridiculum hoc inceptum noſtrum cenſebunt. Incredibile enim iis videtur, ut Siderum diſtantias, aut quæ ſit magnitudo eorum, metiri poſſimus. Tum vero motum huic Terræ aut falſo adſcribi exiſtimant, aut nequaquam adhuc probatum eſſe. Quare nihil mirum, ſi, quæ talibus fundamentis exſtruuntur, pro ſomniis nugiſque ſint habituri. Quid vero his dicemus, niſi aliter ſenſuros ſi diſciplinis iſtis, naturæque rerum contemplandæ, operam dediſſent. Hoc vero longe plurimis non licuiſſe ſcimus, vel quod ad ea parum ingenio comparati eſſent, vel quod unde diſcerent non haberent, vel denique quod ſuis, aut reipublicæ curandis negotiis, alio vocarentur. Itaque nihil eos reprehendimus; ſed, ſi diligentiam in his rebus noſtram condemnandam putabunt, ad magis idoneos judices provocamus.

*Conjecturas haſce S. Scripturis non adverſari.*

Erunt alii qui ea, quæ veriſimilia eſſe oſtendere conati ſumus, Sacris Literis adverſari prædicent, cum de Terris animahbuſque, atque etiam ratione præditis, nos diſſerere animadvertent; de quorum origine, aut quod omnino in rerum natura extent, nihil illic traditum ſit, ſed ea potius ex quibus contrarium ſequatur. Tantum enim de Tellure hac, cum ſuis animantibus, herbiſque, & homine omnium domino commemorari. Quibus reſpondeo, quod & ante me alii, ſatis apparere non de omnibus iis, quæ Deus creavit, particulatim nos edoceri eum voluiſſe. Itaque cum vel

Siderum vel Terræ nomine, in prima Geneſi, etiam Planetæ, qui præter Solem Lunamque ſunt, comprehendantur; atque etiam Jovis & Saturni Comites; poſſe non tantum plures alios utriuſque generis includi, ſed & res innumeras quas in ſuperficie eorum ſummo opifici collocare placuerit. Porro non neſcire eos quo pacto interpretandum ſit, quod dicitur omnia propter hominem condita eſſe; neque eo ſignificari, ut a pluribus jam eſt animadverſum, tot ingentia corpora ſtellarum, quas partim videmus, partim nec vidiſſemus quidem unquam, ſi Teleſcopiorum auxilium defuiſſet, noſtræ utilitatis aut contemplationis gratia fuiſſe condita; quia id abſurde diceretur. Quare cum operum Dei magna pars extra conſpectum hominum ſit poſita, neque ad eos pertinere videatur, haud alienum eſſe opinari, aliquos extare, qui illa propius aſpiciant & admirentur.

*Inquiſitionem horum ut nimis curioſam reprehendi non debere.*

Sed dicent fortaſſe, cum de his ipſe ſupremus auctor nihil amplius docuerit aut revelarit, credendum eſſe ſibi ſcientiam eorum reſervaſſe, ac proinde temere, & curioſe nimis de iis inquiri. At nimium ipſos ſibi ſumere ajo, ſi definire velint, quouſque homines inveſtigando progredi debeant, diligentiæque eorum modum ſtatuere; ac ſi terminos, quos hic Deus præſcripſit, certo cognitos haberent; aut in hominum poteſtate eſſet illos prætergredi. Et ſane, ſi talibus ſcrupulis retenti fuiſſent qui ante nos vixerunt, adhuc ignorari potuiſſet quænam Telluris eſſet figura, aut quæ magnitudo, & num aliqua Americæ regio. Item an Solis radiis Luna illuſtraretur, quibuſve ex cauſis aut hæc aut ille deficerent; ac pleraque alia, quæ Aſtronomorum laboribus repertiſque accepta referimus. Quid enim tam abſconditum & inacceſſum videbatur, quam quæ de rebus cœleſtibus in aperta luce nunc poſita ſunt? Ex quo intelligitur induſtriam mentiſque acumen hominibus data eſſe, quibus paulatim rerum naturalium cognitionem conſequerentur, neque eſſe cur conari deſinamus & ulteriora inquirere. Attamen reconditiora illa, quibus hic præcipue inſiſtimus, ſcimus non eſſe ejuſmodi, ut quærendo penitus inveſtigari poſſint. Itaque nihil veluti

cer-

certum affirmamus, (quî poſſimus enim?) ſed conjecturis tantum agimus, quarum de veriſimilitudine ſuo cuique arbitratu judicare liberum ſit. Quod ſi quis irritam igitur, & inanem in his operam nos ponere dicat, de rebus iis conjecturas prodendo, de quibus ipſi fateamur nihil certi unquam comprehendi poſſe: reſpondebo totum Phyſices ſtudium, quatenus in cauſis rerum eruendis verſatur, eadem ratione fore improbandum; *ubi veriſimilia inveniſſe laus ſumma eſt, & indagatio ipſa rerum, tum maximarum, tum occultiſſimarum, habet oblectationem.* Sed veriſimilium multi ſunt gradus, alii aliis veritati propiores, in quo diligenter æſtimando præcipuus judicii uſus vertitur.

*Conjecturas non eſſe vanas, quia non plane certa.*

Ut vero mihi videtur, non tantum res ad cognitionem maximas hic indagamus, ſed quarum contemplatio ſtudiis quoque ſapientiæ multum conducat. Expedit nimirum ut velut extra Tellurem hanc poſiti, procul eam intueamur, quæramuſque, an ſola ſit in quam omnem ornatum natura contulerit. Ita enim rectius quid ſit, quoque loco habenda, intelligere poterimus: quemadmodum qui longinquas regiones obeunt, de patriæ ſuæ rebus verius judicare ſolent, quam qui nunquam inde ſe moverunt. Nec ſane ille magnopere admirabitur quæcunque hic vulgo maxima habentur, qui, rationibus noſtris aliquid tribuens, multitudinem Terrarum noſtræ ſimilium, ſimiliterque incolis ſuis frequentatarum, ſibi propoſuerit. Deum vero, tantarum rerum effectorem, quî poterit idem non valde ſuſpicere & venerari? cujus providentiam, ſapientiamque mirabilem, paſſim hic aſſertam inveniet, contra falſas opiniones eorum, qui vel ex fortuito corpuſculorum concurſu ortam eſſe Terram, vel omni principio eam carere dixerunt. Sed jam ad propoſitum.

*Ad ſapientiam & pietatem facere quæ hic tractantur.*

Et quoniam maximum ſumetur argumentum, ad ea quæ inſtituimus probanda, ex ordinatione Planetarum Copernicea, quodque inter eos Tellus hæc haud dubie numeratur; bina ſchemata hic initio deſcribo, quorum alterum orbes eorum, circa Solem diſpoſitos, continet, veris proportioni- TAB. LIV. fig. 1.

ni-

nibus expreſſos; ſimile illi quod in Automato noſtro ſæpius conſpexiſti: alterum rationes magnitudinum oſtendit, quibus corpora Planetarum inter ſe, & ad Solem, comparantur; quod in eodem Automato adjectum eſt. In priore punctum medium Sol eſt; à quo deinceps, noto omnibus ordine, ſunt orbitæ Mercurii, Veneris, Telluris, cum superaddita via Lunæ; tum Martis, Jovis, & Saturni: ac circa Jovem, Saturnumque circelli Comitum; illius quatuor, hujus quinque. Quos circellos, cum eo, qui Lunæ noſtræ dicatus eſt, longe majores hic poni ſciendum, quam pro ratione ad Planetarum primariorum orbitas; ne, ob parvitatem, penitus viſum effugerent. Orbitarum vero quanta reipſa ſit vaſtitas inde intelligere licet, quod diſtantia a Sole ad Terram, decem vel duodecim millia Terræ diametrorum continet: de qua menſura pluribus poſtea agetur. Omnes porro in eodem fere plano ſitæ ſunt; ut proinde non multum diſcedant ab eo in quo Tellus circumit, quod Eclipticæ planum vocatur. Hoc vero oblique ſecatur ab axe Telluris, in quo illa volvitur horis viginti quatuor, reſpectu Solis: iſque axis, niſi quod mutationem lentiſſimam ſubit, quam norunt Aſtronomi, ſibi ipſi parallelus manet, dum ipſa circa Solem defertur; ex quo dierum noctiumque oriuntur vices, itemque temporum anni commutationes, ut paſſim docent eorum libri. Unde & tempora periodorum, quibus circuitus ſuos Planeta quiſque peragit, huc tranſcribo. Nempe Saturni, annorum 29, dierum 174, horarum 5. Jovis annorum 11, dierum 317, horarum 15. Martis proxime dierum 687. Telluris dierum 365¼. Veneris dierum 224, hor. 18. Mercurii dierum 88.

*TAB. LV. fig. 1.*

*Copernici ſyſtema exponitur.*

*TAB. LIV. fig. 1.*

Hic eſt ille, notiſſimus jam, cæleſtium corporum ordo, a Copernico repertus, idemque naturæ ſimplicitati convenientiſſimus. Hunc ſi quis convellere aut improbare contendat; is diſcat primum, ex demonſtrationibus Aſtronomorum, quanto in hac deſcriptione melius faciliuſque omnium eorum, quæ circa motum ſiderum animadvertuntur, ratio reddatur, quam in Ptolemaico aut Tychonis ſyſtemate. Cogno-

*Copernici doctrinam qua rationes confirment.*



Digitized by Google

noſcat etiam, ex ſingulari Kepleri obſervatione, quomodo Planetarum, interque eos Telluris, a Sole diſtantiæ temporibus periodorum, quas retuli, certa quadam proportione reſpondeant; quam poſtea Jovis quoque & Saturni Comites, horum reſpectu, ſervare deprehenſum eſt. Intelligat quam contra motus naturam quiddam comminiſcendum ſit, quo demonſtretur cur ſtella Polaris, in extrema cauda minoris Urſæ, exiguo nunc circulo moveatur, duobus gradibus & tertia parte à Polo diſtans; cum ante annos mille octingentos viginti, ætate nempe Hipparchi, duodecim gradibus, 24 ſcrupulis, ab eodem Polo abſuerit: poſt aliquot vero ſæcula, ad 45 gradus inde receſſura ſit, & poſt annorum viginti quinque millia, eodem quo nunc eſt, reverſura. Ut proinde cælum totum, ſi circumrotari dicatur, ſuper alio atque alio axe id faciat neceſſe ſit, quod eſt abſurdiſſimum; cum in Copernici hypotheſi nihil ſit explicatu facilius. Denique expendat omnia illa, quibus, ad argumenta Copernico objici ſolita, Galilæus, Gaſſendus, Keplerus, aliique plurimi reſponderunt. Quorum rationibus ita ſublati ſunt qui ſupererant ſcrupuli, ut omnes nunc Aſtronomi, niſi tardiore ſint ingenio, aut hominum imperio obnoxiam credulitatem habeant, motum Telluri, locumque inter Planetas, abſque dubitatione decernant.

In altero, quod dixi, ſchemate, ita horum globi cum Sole oculis ſubjiciuntur, ac ſi juxta ſe poſiti eſſent. Atque hic rationem diametrorum, ad Solis diametrum, eam ſecutus ſum, quam tradidi in libro de Saturni Phænomenis. Nempe Annuli Saturnii eam quæ 11. ad 37; Globi incluſi, ad eandem Solis diametrum fere, quæ 5. ad 37; Jovis, quæ 2 ad 11; Martis, quæ 1 ad 166; Telluris, quæ 1 ad 111; Veneris, quæ 1 ad 84; quibus nunc addo Mercurii, quæ eſt 1 ad 290 ex Hevelii obſervatione Anno 1661 habita; cum in Solis diſco Mercurius conſpiceretur, noſtro tamen, non illius calculo.

*Planetarum magnitudinis inter ſe & ad Solem ratio.* TAB. LV. fig. 1.

Quomodo autem hæ noſtræ magnitudinum rationes inventæ ſint, tum ex cognita proportione diſtantiarum à Sole, tum

ex menſura Diametrorum, Teleſcopiis capta, eo, quem dixi, libro oſtendi: neque adhuc video cur multum, ab iis quas tunc definivi, recedam; etſi nihil eis deeſſe non contenderim. Nam quod multi exiſtimant, in metiendis apparentibus diametris, præſtare lamellis noſtris uſum Micrometrorum quæ vocant, quibus fila tenuiſſima in foco Lentis majoris prætenduntur, nondum iis aſſentiri poſſum, ſed aptiores eſſe lamellas virgulaſve tenues arbitror, quas eo loco objiciendas docueram. Ex quo iſtud Micrometrorum inventum, itemque Teleſcopii ad organa Aſtronomica adaptatio, non multo poſt emanavit: non ſine laude tamen eorum, qui in perficiendo tam utili invento elaborarunt.

*Micrometris præſtare lamellas virgulasve tenues.*

*Solem Planetis multo majorem eſſe.*

Cæterum, in hac planetarum comparatione, notanda eſt ingens Solis magnitudo, cum interioribus quatuor Planetis collata, utque hi Saturno quoque, ac Jove, longe longeque minores ſint. Nam conſiderandum, non ordine creſcere eorum corpora cum diſtantiis a Sole; quippe cum multo major ſit Veneris, quam Martis, globus.

*Tellurem Planetis, & hos Telluri recte aſſimilari.*

His de utroque Diagrammate expoſitis, nemo, ut puto, jam non videt, quam clare ex priore, in quo ſyſtematis eſt typus, ſequatur, eodem genere, cum cæteris quinque Planetis, Tellurem hanc noſtram contineri. Nam vel ipſi circulorum poſitus hoc teſtantur. Atqui præterea conſtat, teleſcopiorum obſervationibus, & globoſa eſſe omnium corpora, itidem ut Telluris, & à Sole ſplendorem ſimiliter eos mutuari. Ac denique in hoc quoque ei ſimiles eſſe, quod in ſe ipſis circum proprios axes volvantur: quis enim de cæteris dubitet, cum in Jove & Marte hoc certo compertum ſit? Sicut autem Tellus Lunam comitem habet, ita Jupiter & Saturnus ſuas. Quid igitur tam probabile eſt, cum in his tot rebus Telluri cum Planetis illis primariis intercedat ſimilitudo, quam non minori quoque dignitate & pulchritudine eos eſſe, nihiloque minus ornatos cultoſque: aut quænam cur hoc aliter ſe habeat ratio excogitari poteſt?

*Ex ſimilitudine in hiſce recte argumenta peti.*

Sane ſi cui, in diſſecti canis corpore, viſcera oſtenderentur, cor, ſtomachus, pulmones, inteſtina; tum venæ, arte-

teriæ, nervi; etiamſi nunquam animalis corpus apertum conſpexiſſet; vix dubitaret, quin ſimilis quædam fabrica, ac partium varietas, in bove, porco, cæteriſque beſtiis ineſſet. Nec ſi unius, ex Saturni aut Jovis Comitibus, naturam cognitam haberemus, non eadem fere quæ in illo, in cæteris quoque reperiri putaremus? Similiterque ex uno quopiam Cometa, ſi quidnam eſſet perſpici poſſet, eandem omnium rationem eſſe ſtatueremus. Itaque plurimum ponderis habet illa ex ſimilitudine petita, & à rebus viſis ad non viſas producta ratio. Quam proinde ſequentes, ex Planeta uno, quem coram aſpicimus, de reliquis ejuſdem generis rectè conjecturam faciemus.

Ac primùm quidem, non aliter quàm Tellus noſtra, ſolido corpore eos conſtare exiſtimabimus. Deinde prorſus etiam veriſimile cenſebimus, adeſſe globis eorum id quod gravitatem appellamus; cujus vi corpora quæque, in ſuperficie eorum hærentia, premant eam; aut, ſi dimoveantur, ex omni parte velut attracta recidant. Quod ex ipſa quoque globi forma liquet, cum hæc ex conatu corporum, ad centrum unum tendentium, generetur. Imo jam, certo quodam ratiocinio, colligere didicimus, quanto majus minuſve in Jove ac Saturno, quam apud nos, gravitatis momentum eſſe debeat. Qua de re, deque auctore ejus, in Diatriba de Cauſis gravium diximus.

*Planetas ſolidos eſſe & gravitate pollere.*

Nunc vero ulterius quærere pergamus, quibus gradibus ad penitiora quædam, de ſtatu ornatuque Terrarum iſtarum, cognoſcenda perveniri poſſit. Ac primùm quam veriſimile ſit herbas, & animalia in earum ſuperficie exiſtere, æque ac in Tellure noſtra. Nemo negabit puto, & formam & vitam, & creſcendi generandique rationem, in ſtirpibus animantibuſque majus quid eſſe, magiſque mirandum quàm corpora vitâ carentia, quantumvis mole conſpicua ſint; velut montes, rupes, maria. Patet etiam in utroque illo viventium genere, multo aliter longeque expreſſius, certi Divinæ providentiæ intelligentiæque præſtantiam. Cum

*Nec deeſſe illis animalia.*



Digitized by Google

enim quæ in Terra, imo quæ in Cælo quoque aſpicimus, aliquis Democriti, aut etiam Carteſii ſectator, ita ſe explanaturum profiteri poſſit, ut tantum atomis & motu horum indigeat, in herbis tamen & animalibus fruſtra erit, nec de primo eorum exortu quidquam veriſimile adferet; cum nimis manifeſto appareat, nunquam vago, ac fortuito corpuſculorum motu, talia quædam prodire potuiſſe: quippe in quibus omnia ad certum finem egregie apta accommodataque cernantur; cum ſumma prudentia, & legum naturæ, ipſiuſque Geometriæ, cognitione exquiſita, quemadmodum in ſequentibus ſæpius oſtendetur: ut jam omittamus illa in progignendo miracula. Quod ſi igitur in Planetis nihil aliud quàm vaſtæ ſolitudines, corporaque inertia, & vita carentia reperiantur; atque abſint ea in quibus clariſſime certiſſimeque Architecti ſupremi ſapientia eluceſcit; haud dubiè multum dignitate & pulchritudine concedent Telluri noſtræ: quod, ut jam dixi, rationi adverſatur.

Non igitur ſic; ſed erunt & ibi corpora quædam motu prædita, ſeſeque ipſa moventia, neque his quæ in Terra ſunt ignobiliora; adeoque erunt animantia. His autem poſitis, jam de herbis quoque fere neceſſario concedendum eſt; ut ſit aliquid quo illa alantur. Omnia verò hæc non aliter quam in ſuperficie Planetariorum globorum exiſtere, dubitari non poteſt; cum calore Solis gaudere ac foveri debeant; cujus radiis, non ſecus quam Tellus noſtra, expoſiti ſint.

*Et nec plantas.*

Sed dicet aliquis, celerius quàm par eſt, hic nos progredi. Nam, ut non negetur res aliquas in Planetarum ſuperficie reperiri, quæ ibi creſcant & moveantur, Deoque auctore, non minus quam noſtra hæc, dignæ ſint; longè diverſam tamen earum poſſe eſſe naturam, ut nec materia, nec creſcendi more, nec extrinſeca forma, aut internis partibus, quidquam iis, quæ apud nos ſunt, ſimile habeant: ac talia ſint denique, ut nihil ejuſmodi in mentem homini venire poſſit. Hoc igitur jam quæramus quam ſit veriſimile; & an non potius credendum ſit, non tantam eſſe diverſitatem

quan-

Digitized by Google

quanta exiſtimetur. Favet eorum ſententiæ, qui omnia alia illic imaginantur, quod Natura videatur varietatem plerumque, & plurimis in rebus, ſectari; quodque Conditoris potentia hoc ipſo magis declaretur. Sed cogitare debent, non eſſe hominum arbitrio definiendum quàm magna iſta ſit varietas ac diſſimilitudo. Neque, quia poſſit eſſe immenſa, reſque illæ ab intellectu, & comprehenſione noſtra penitus remotæ, idcirco neceſſe eſſe, ut reipſa tales exiſtant. Quamvis enim ſimilia omnia iis quæ apud nos ſunt, finxiſſet Deus in cæteris Planetis; nihilo minor eſſet ſpectatoribus eorum, ſi qui ſunt, admiratio, quam ſi plurimum diſtarent: cum, quid in aliis effectum ſit, nullo modo poſſint cognoſcere. Potuiſſet in terris Americæ, aliiſque longè remotis, aliqua creaſſe viventia, quæ his noſtris nihil ſimile haberent; neque id fecit tamen. Nam formarum quidem diverſitatem aliquam eſſe voluit, quibus animalia herbæque noſtræ à tranſmarinis illis, diſſiderent, ſed & in his ipſis formis, inque creſcendi & generandi modis, multa utriſque convenire fecit. Habent enim & illic animalia pedes, alas, atque intus cor, pulmones, inteſtina, vulvas, cum hæc omnia in unoquoque genere illorum, ac noſtratium quoque, planè diverſa ratione ordinari potuerint, ab infinitæ ſolertiæ opifice. Non igitur omnem varietatem quam poterat in rebus creatis, earum auctor exhibuit, nec proinde argumento illi, quod a Naturæ novandi ſtudio petitur, tantum tribuendum eſt, ut omnem, qui in cæteris Planetis eſt, ornatum ab eo, qui in Terra noſtra conſpicitur, prorſus alienum putemus. At contra credibile eſt, inter ea quæ in ſuperficie iſtorum globorum generantur, quæque apud nos ſunt, præcipuam eſſe differentiam, quæ ex majori, minorive, eorum a Sole, caloris vitæque fonte, diſtantia oriatur. Propter quam tamen magis materiam, quam formam rerum, variari neceſſe ſit.

*Non nimiam in hiſce fingendam diſſimilitudinem.*

Ad materiam vero quod attinet qualiumcunque ſtirpium, atque animantium, quæ Planetas exornant, etſi qualis ſit cogitatione aſſequi nequeamus, illud tamen vix dubitari poteſt, quin ex elemento humido, uti noſtra omnia, creſcant &

 alan-

Digitized by Google

alantur. Nihil enim aliter gigni poſſe omnes fere Philoſophi arbitrantur; & fuere inter præcipuos, qui ex aqua omnium rerum originem eſſe dicerent. Etenim, ſicca & arida quæ ſunt, motu carent: abſque motu vero nihil corporibus, quo augeantur, accedere poſſe manifeſtum eſt. At liquidorum particulæ, & inter ſe continue moventur, & facile ſeſe ubique inſinuant; quo fit, ut non tantum ſeipſas, ſed & alias diverſæ naturæ, quas ſecum vehunt, creſcentibus apponere aptæ ſint. Ita enim, aquæ affluxu, & herbas adoleſcere, foliiſque & fructibus augeri, & lapides ex arena concreſcere cernimus. Itemque metalla & cryſtallos, gemmaſque incrementa inde capere ſatis conſtat, etſi in his obſcurius id animadvertitur, propter lentiſſimos progreſſus; quodque ſæpe non in iis, quibus enatæ ſint, locis cavitatibuſque reperiantur; pervetuſtis, ut videtur, Terræ ruinis convulſionibuſque disjectæ. Sed aquæ elementum a Planetis non abeſſe, veriſimiles quoque conjecturæ ſuppetunt, ex teleſcopiorum obſervationibus. Apparent enim in Jove tractus quidam reliquo diſco obſcuriores, iique non eadem ſemper forma permanentes, quod nubium proprium eſt. Maculæ vero, quæ immutabiliter globo ejus inhærere conſpiciuntur, ſæpe longo tempore obtectæ manent, nubibus videlicet illis interceptæ, è quibus deinde rurſus emergant. Atque etiam nubes in medio Jovis diſco exoriri quandoque annotatum fuit, & maculas quaſdam minores exiſtere, reliquo corpore magis lucidas, neque eas diu intereſſe; quas Caſſinus ex nivibus eſſe conjectabat, cacumina montium inſidentibus. Mihi non improbabile videtur, terræ regiones candidiores eſſe, ſuperfuſis nubibus plerumque occultatas, ac nonnunquam ab iis liberas.

*Aquas a Planetis non abeſſe.*

Apparent, etiam in Marte, lucis & obſcuritatis diſcrimina, ex quibus converſio ejus ad Solem, viginti quatuor horis cum 40 ſcrupulis primis, abſolvi reperta eſt; nubes tamen nondum fuerunt animadverſæ, idcirco quod multò minor cernitur quam Jupiter; etiam cum maximè ad Tellurem appropinquat. Præterquam quod & intenſior Martis lux, utpote



Digitized by Google

a propiore Sole accepta, intuentibus impedimento eſt. Eademque lux magis etiam obſtat in Venere. Sed ſi Tellus ac Jupiter nubes aquaſque habent, vix dubitandum eſt quin & in cæteris inveniantur Planetis. Nec tamen noſtræ prorſus ſimiles eſſe aquas iſtas dixerim; etſi liquidæ ut ſint, ad uſus quos præſtare debent, requiritur; ut verò perſpicuæ, ad pulchritudinem. Noſtra enim hæc, in Jove & Saturno, continuo gelu aſtringeretur, propter magnam Solis diſtantiam. Itaque putandum eſt naturam earum, quæ in Planetis ſunt, ad ſuam quamque regionem attemperatam eſſe; ut in Jove quidem ac Saturno difficilius in glaciem vertantur, in Venere verò, ac Mercurio, minus facile in vapores abeant. In omnibus autem attractum a Sole humorem, ſubſidere rurſus, & unde venit reverti, neceſſe eſt, ne penitus aridum Solum relinquatur. Non cadet autem niſi in guttas denſatus; quod eveniet, ſicuti apud nos, cum in frigidiorem locum aſcenderit ex inferiore calidioreque ob terræ viciniam.

*Noſtra tamen non prorſus ſimiles.*

Habemus igitur in globis illis campos Solis radiis expoſitos, pluviiſque aut rore irrigatos, in quibus ſi quid enaſcatur; ut fieri debere utilitatis & ornatus gratia diximus; id eodem quo apud nos modo fieri veriſimile eſt: cum nec aliter fere, nec melius poſſit. Ut nempe radicibus ſuis ſolo adhæreat, ſimulque harum fibris humorem inde combibat. Neque vero ſatis ornatæ mihi eſſe terræ iſtæ videbuntur, niſi ſtirpes quaſdam habeant alte excreſcentes, quæque adeo arbores, aut arborum inſtar, fiant: quandoquidem hæ maximum, ac, præter aquas, unicum ſunt ornamentum, quod Natura terris largiri poſſit. Quæ quantum amœnitatis & gratiæ afferant facile unuſquiſque ſecum exiſtimat. Ut omittam jam materiæ ex arboribus oportuniſſimum ad omnia uſum. Porro vix aliter quoque propagari ſtirpes, aut perennare poſſe exiſtimo, quam producendis ſeminibus. Cum unica fere hæc ratio videatur, eademque tam mirabilis, ut non ſolius Telluris noſtræ gratia inventa ſit. Denique nihil vetat, ut, quemadmodum in diverſis hujus terræ regionibus, ita in iſtis quoque longè remotis, idem in iis quæ ad ſtirpes attinent, Natura ſecuta ſit.

*Nec alia ratione illic naſci & propagari ſtirpes quam apud nos.*

Ne-

*Idem & de animalibus [illegible] eſſe.*

Neque vero diſpar ratio eſt in animalibus; cur non & paſcendi, & generandi, modus ſimilis putetur in Planetis ei qui eſt apud nos. Quia nempe univerſa terræ hujus animalia, ſive quadrupedum generis, aut volucrum, aut natantia, aut reptilia, ipſaque inſecta, idem naturæ præſcriptum ſequuntur. Veſcuntur enim vel herbis, fructibuſque, vel ipſis animantibus, quæ inde nutrita fuere: omniumque generatio per conjunctionem maris & fœminæ, perque fœcunditatem ovorum (nam & hæc ubique animadvertitur) peragitur. Nam hoc quidem certum eſt, fieri non poſſe ut, vel herbæ, vel animantia quæ illic ſunt, ſine propagatione generis ſui eſſe perſeverent; quia vel fortuitis caſibus interire ea ac deficere contingeret; cum herbæ ſtirpeſque humida materia conſtent, eoque etiam exareſcere debeant; animalia mollibus flexilibuſque membris, nec, ut ſilices, duris. Quod ſi in his alias naſcendi vias comminiſcamur, velut ex arboribus; quemadmodum diu creditum eſt, ex harum genere quodam in Britannia anates naſci, apparet quàm id à ratione abhorreat, propter ſummam, quæ lignum inter carneſque eſt, differentiam. Vel ſi animalia ex limo terræ exiſtere putemus, velut de muribus in Ægypto multi prodiderunt, quis, naturæ paulo intelligentior, non videt hoc alienum eſſe inſtitutis ejus? aut quis non exiſtimet multò magis convenire Dei magnitudini ac ſapientiæ, ut ſemel omnis generis animantia creaverit, inque Terrarum orbem certo modo, (quem nemo hominum adhuc divinare potuit) impoſuerit, quam ut perpetuo novis ex terra producendis vacare neceſſe habeat? Quibus alendis, educandiſque, abeſſet quoque prorſus parentum cura ac charitas, quam neceſſaria quadam ratione, omni animalium noſtrorum generi, inſitam, ingenitamque novimus. Sed hæc quæ ad propagationem attinent, etſi fortaſſe aliter ſeſe habeant, hoc tamen rationibus ſuperius adductis ſatis probatum eſt, & ſtirpes & animalia in Planetarum terris inveniri, ne ſcilicet ſint hac noſtra viliores. Quod cum ita ſit, tum quoque, ne minus, quam noſtra Tellus, iſtæ aliæ ornatæ ſint, neceſſe eſt, ut non minor ſit,

in

in utroque genere illo, quàm apud nos varietas. Quænam vero hæc eſſe poteſt? Equidem cum, in omni animantium noſtrorum genere, cogito quibus modis moveantur; omnia video eo reduci, ut vel pedibus ingrediantur binis, quaterniſve; inſecta ſenis, vel etiam centenis; vel ut in aëre volent, alarum mirabili vi & moderamine; vel ſine pedibus reptent; vel flexu corporum vehementi, aut etiam pedum percuſſu, in aqua ſibi viam aperiant. Præter hos incedendi modos, vix videtur alius dari, aut omnino mente concipi poſſe. Ergo, quæ in Planetis extant animantia, uno aliquo ex his utentur; aut quædam pluribus etiam, quemadmodum apud nos aves amphibiæ; quæ & pedibus incedunt, & natant in aquis, & in aëre volitant: & crocodili & hippopotami, inter terreſtria, & aquatica, medii generis. Nulla autem præter haſce vita cogitari poſſe videtur. Quid enim eſſe poſſit, in quo animantia exiſtant, præter tellurem ſolidam, aut Elementum liquidum, quale aquæ noſtræ, aut multo liquidius, quale aër; aut illis ſimilia. Poſſet enim eſſe aër multò, quàm apud nos denſior, graviorque; eoque ad volandum accommodatior, neque tamen minus perſpicuus. Poſſent etiam liquidorum plura genera, alia aliis ſuperinducta eſſe. Velut ſi, ſuper mare, incumbere cogitetur alia quæpiam materia, quæ decuplo levior ſit aqua, centuplo gravior aëre; ac ſua quidem ſuperficie extrinſecus terminata, ſed ut extra eam, terræ partes ſolidæ emineant. Sed non eſt, cur plura hujuſmodi in cæteris Planetis, quàm in noſtro, inveniri putemus, & ſi inveniantur, non tamen aliis modis ibi animalia moveri poterunt. Cæterùm quod ad varias eorum formas attinet; cum videamus in variis terræ regionibus miram adeo ac multiplicem diverſitatem; invenirique in America, quæ fruſtra alibi quæras; magna ratio eſt ut nullam earum formarum, quæ in Planetis exſtant, imaginando aſſequi nos poſſe credamus. Quanquam ſi omnes iſtos movendi modos cogitemus, quos hic recenſui, nihil mirum eſſet non magis differre aliquod iſtorum animalium à noſtra-

te quopiam, quam noſtra diſcrepant inter ſe. Ea dico quibus minimum eſt ſimilitudinis.

Quam varia porro ſint genera eorum in Planetis ita optimè colligemus, ſi ad ea quæ apud nos ſunt, miramque in iis formarum diverſitatem, animum advertamus. Planè enim veriſimile eſt, non minori numero occurſuras, ſi quis ad Jovis, aut Veneris globum cominus ſpectandum admitteretur. Percurramus verò (nam de omnibus dicere longum eſſet) majores noſtrorum animalium differentias, vel formâ, vel proprietate aliqua ſingulari notabiles, idque in terreſtribus, aquatilibus, volucribus. Cogitemus quæ ſit inter equum, elephantum, leonem, cervum, camelum, porcum, ſimiam, hiſtricum, teſtudinem, chamæleontem, diſſimilitudo; quanta in aquaticis, cetum inter & phocam, raiam, lucium, anguillam, ſepiam, polypum, crocodilum, piſcem volantem, torpedinem, cancrum, oſtream, muricem. In avium genere quantum diſcrimen, aquilæ, ſtruthiocameli, pavonis, cygni, noctuæ, veſpertilionis. Reptilia pro uno tantum genere cenſeamus. At in inſectis formicas ſpectemus, araneos, muſcas, papiliones, & miram horum naturam, quod ex vermibus volatilia evadant. In omnibus vero his, ſcimus quàm magnus præterea ſit numerus minus diſſidentium.

*Summam animalium apud nos varietatem eſſe.*

At quantuſcunque ſit, nihilo minorem eſſe in unoquoque reliquorum Planetarum putandum eſt. Quamvis vero de figura iſtorum animalium fruſtra per conjecturas quæratur, tamen de vita eorum generatim jam aliquid aſſecuti videmur; & de ſenſibus erit in ſequentibus quod dicamus.

*Nec minorem in Planetis.*

Sicuti verò animantium, ita ſtirpium quoque & arborum noſtrarum præcipuæ differentiæ expendi poſſunt. Velut quæ in abiete, quercu, palma, vite, ficu; tum ea quæ nuces, Cocos dictas, generat arbore; itemque alia apud Indos, è cujus ramis radices novæ pullulant, inque terram demittuntur. Item, in herbis, gramen, papaver, braſſica, hedera, pepones, ficus Indica foliis craſſis, ſine caule, ſucceſcentibus,

*Idem in ſtirpibus locum habere.*

bus, aloë. In quibus rurſus ea quam ſcimus, minus diſſimilium eſt copia. Ad hæc propagandi viæ variæ inſpiciuntur, velut ex ſeminibus, nucleis, taleis, inſitione, bulbis. Quibus omnibus nihilo pauciora, aut minus miranda, in Planetarum terris reperiri, exiſtimandum ſit.

Sed quod in hac diſquiſitione præcipuum eſt, plurimamque jucunditatem habet, nondum attigiſſe mihi videor; quamdiu nullos in terris illis ſpectatores poſui, qui tot rebus creatis fruantur, pulchritudinemque, & varietatem earum, admirentur. Et video quidem, neminem fere eorum, quibus vel leviter hæc meditari contigit, dubitaſſe quin ſpectatores aliqui in Planetis collocandi ſint: non quidem homines nobis ſimiles, ſed animantia tamen ratione utentia. Nempe iis viſum eſt, qualemcunque terrarum iſtarum ornatum, velut fruſtra, nulloque fine aut conſilio, fore procreatum, ſi non hoc propoſitum fuiſſet, ut ab aliquo cerneretur, qui intelligere ejus elegantiam poſſet, fructumque ſimul percipere, & ſummi opificis admirari ſapientiam. Ego vero non hoc præcipuum argumentum habeo, cur animal rationis particeps Planetas incolere exiſtimem. Quid ſi enim dicamus ipſum Deum ſpectare quæ effecit; (alia quidem ratione quam nos, ſed videre eum quis dubitet qui oculos fabricatus eſt;) iiſque delectari, neque præterea quidquam requiri. Nonne enim ob hoc ipſum & homines condidit, & quicquid continet mundus univerſus? Itaque quod præcipue me movet, ut rationabile animal in Planetis non deeſſe credam, hoc eſt, quod nimia Terræ noſtræ præ cæteris illis eſſet præſtantia ac nobilitas, ſi ſola animal haberet tam longe cæteris omnibus animalibus, nedum ſtirpibus præcellens; in quo ineſt divinum quiddam; quo cognoſcit, intelligit, res innumeras memoria complectitur, veri expendendi judicandique capax eſt, cujus denique gratia quicquid terra progenerat paratum eſſe videtur. Omnia enim in uſus ſuos vertit. Lignis, lapidibus, metallis, domos exſtruit; Avibus, piſcibus, pecore & herbis veſcitur; Aquæ & ventorum commodis ad navigandum utitur; ex florum odore pulchriſque coloribus vo-

*In Planetis eſſe animantia, quæ ratione utantur.*

voluptatem percipit. Si nullum in Planetis eſt ejuſmodi animal, quid eſſe queat, quod tanti æſtimandum ſit, quove is defectus penſetur? Pone in Jove majorem multo animantium varietatem, plures arbores, herbas, metalla: nihil erit in omnibus his, ob quæ tantum dignitatis accedat iſti mundo, ac noſtro propter humani ingenii mirabilem naturam. Hic ſi me judicium fallit, fateor me pretia rerum æſtimare neſcire.

*Non obſtare hominum vitia quo minus decorem terræ concilient.*

Nec dicat aliquis, tantum malorum ac vitiorum eidem humano generi ineſſe, ut merito dubitari poſſit, an, tale quodpiam animal Planetariis mundis tribuendo, dignitas iis ornamentumque, an his contraria acceſſura ſint. Primum namque non impediunt vitia, majori hominum parti inſita, quin ii qui virtutem, ac rectum rationis uſum ſectantur, tanquam pulcherrimum quid præſtantiſſimumque cenſendi ſint. Præterea credibile eſt, ipſa illa animi vitia, magnæ hominum parti, non ſine ſummo conſilio data eſſe. Cum enim Dei voluntate ac providentia talis ſit Tellus, ejuſque incolæ, quales cernimus; abſurdum enim foret exiſtimare omnia hæc alia facta eſſe, quam ille voluerit, ſciveritque futura; putandum eſt utique non fruſtra multiplicem adeo animorum diverſitatem mortalibus eſſe inſitam; ſed malorum cum bonis miſturam, quæque inde eveniunt infortunia, bella, calamitates, eo fine accedere, ut neceſſitate urgente ſtimuloſque admovente, ingenia excitentur, exerceanturque, dum quærimus ea quibus ab hoſtibus nos tuemur, quibuſve machinis teliſque eos perſequamur: Utque paupertatem ac miſeriam depellere conantes, varias artes exquiramus, naturamque ſcrutemur, ex cujus cognitione deinde auctoris potentiam prudentiamque admirari neceſſe ſit; quas forſan alias pari ſtupore ac beſtiæ præteriiſſemus. Nec enim dubitandum eſt, ſi in continua pace, omniumque rerum affluentia homines ætatem agerent, fieri poſſe ut admodum diu, non aliter fere quam bruta animalia, victuri ſint, omnis ſcientiæ expertes, pluriumque commodorum ignari, quibus melius jucundiuſque vita tranſigitur. Careremus mirifica illa ſcriben-

bendi arte, niſi ſumma in commerciis belliſque neceſſitas eam extudiſſet. Huic artem navigandi, huic ſerendi debemus, maximamque partem cæterorum quibus fruimur inventorum; itemque naturæ arcana fere omnia, inter experiendum reperta. Ita ea ipſa propter quæ incuſanda rationis facultas videbatur, poſſunt dici ad perficiendam exacuendamque eam plurimum prodeſſe. Nam & virtutes ipſæ, fortitudo animi, & conſtantia, vix aliter quam in periculis rebuſque adverſis apparere poſſunt.

Quod ſi igitur genus animalium rationabile in cæteris Planetis eſſe cogitemus, quod virtutibus vitiiſque fere iiſdem atque homines præditum ſit, id tanti eſſe exiſtimandum eſt, ut abſque iis, longè quàm Tellus hæc noſtra viliores futuri ſint.

*Nec rationem in Planetarum incolis à noſtra diverſam eſſe.*

Poſitis vero ejuſmodi Planetarum incolis ratione utentibus, quæri adhuc poteſt, anne idem illic, atque apud nos, ſit hoc quod rationem vocamus. Quod quidem ita eſſe omnino dicendum videtur, neque aliter fieri poſſe; ſive uſum rationis in his conſideremus quæ ad mores & æquitatem pertinent, ſive in iis quæ ſpectant ad principia & fundamenta ſcientiarum. Etenim ratio apud nos eſt, quæ ſenſum juſtitiæ, honeſti, laudis, clementiæ, gratitudinis ingenerat, mala ac bona in univerſum diſcernere docet: quæque ad hæc animum diſciplinæ, multorumque inventorum capacem reddit. Exſtaretne alibi diverſa ab hac ratio? cenſereturque injuſtum aut ſceleſtum in Jove aut Marte, quod apud nos juſtum ac præclarum habetur? Certè nec veri ſimile eſt, nec omnino poſſibile. Cum enim rationis, qualem hic agnoſcimus, ductu opus ſit ad tuendam vitam ac ſocietatem (nam & hanc apud Planeticolas reperiri oſtendemus) ſi contraria ejus decretis ſtatuantur, ſequetur ruina ac ſubverſio eorum, quibus ejuſmodi mens perverſa contigiſſet. At conſervatio, ut videmus, rerum conditori ubique propoſita eſt. Verum utut affectiones animi à nobis aliquatenus diverſæ ſint apud iſtos longinquarum terrarum habitatores, puta in his quæ ad amicitiam, iram, odium, honeſtatem, verecun-

 diam,

diam, decorem attinent; non tamen dubitari poteſt, quin in veri inveſtigandi ſtudio, judicandis rationum conſequentiis, ac præſertim in ratiociniis, quæ ad quantitatem ac magnitudinem ſpectant, circa quæ Geometria verſatur, (ſi quid habent ejuſmodi, quod mox inquiremus) non, inquam, dubitari poteſt, quin prorſus ſimilis ſit, eademque via ingrediatur illorum ac noſtra ratio; quodque apud nos verum eſt, idem ſit in cæteris Planetis. Etſi vis ac facultas in his rebus major minorve illorum incolis fortaſſe quam nobis contigerit.

Sed jam nimis longè provectum me eſſe ſentio. Ante enim diſpiciendum erat de ſenſibus corporeis iſtorum in Planetis agentium, quibus ſi carerent, vix jam aut vitam, ut animalia, ſortiti eſſe videri poſſint, aut habere, in quo rationis uſum exerceant. Puto autem oſtendi poſſe probabilibus argumentis & bruta animantia, & quibus ratio ineſt, convenire, in his quæ ad ſenſus attinent, cum iis quæ terram hanc incolunt. Primùm namque ſi cogitemus quid ſit in animalibus videndi poteſtas, abſque qua neque paſcendi ratio eſſet, nec pericula vitandi, nec denique vita alia quam talparum aut lumbricorum; prorſus neceſſe eſſe intelligemus ut, ubi ſunt animalia his præſtantiora, ibi & viſu prædita ſint. Cum nihil ad vitam vel conſervandam, vel exornandam æque conducat. Quod ſi vero inſpiciamus mirabilem lucis naturam, ſtupendumque artificium, quo ad eam fruendam oculi comparati ſunt, facile cognoſcemus, perceptionem rerum procul diſtantium, cum circumſcriptione formarum, diſcrimen intervallorum, non alio modo, quam qui ex viſu fit, inſtitui poſſe. Non enim poteſt hic ſenſus, imo nec alius quiſquam eorum quos novimus, exiſtere, quam ex motu extrinſecus adveniente. Qui motus, ut alibi explicuimus, in efficiendo viſu, à Sole proficiſcitur, aut ſtellis inerrantibus, aut igne; quorum particulæ celerrima agitatione concitæ, circumfuſam cæleſtem materiam continue pulſant, impelluntque; qui impulſus a proximis ad longe diſſitas citiſſime propagetur, fere eo modo quo ſonus per aërem. Abſque hoc motu, materiaque æthe-

*Nec deeſſe illis ſenſus.*

*Nec viſum.*

ris qui intermedia cæli ſpatia complet, nec Solem nec ſtellas cernere poſſemus; neque etiam alia quæ propiora ſunt corpora; cum ab his ad nos idem ille motus repercuſſus pervenire debeat. Hic, oculorum ſenſu perceptus, lux appellatur. Inque eo ſenſu mirabile eſt ante omnia, quo pacto ad tantam ſubtilitatem perduci potuerit, ut minimâ cæleſtis materiæ commotiunculâ afficeretur, ſimulque qua ex parte illa oriretur perciperet. Tum quomodo nihil ſeſe mutuo impediant innumeri ejuſmodi pulſuum proceſſus, ſphæricæque ſuperficies, aliæ alias trajicientes. Hæc omnia tam mira ac ſubtili ratione conſtituta ſunt, ut nec minimam eorum partem hominum ingenia excogitare potuiſſent, cum vix etiam quomodo ſeſe habeant comprehendere queant. Quid enim tam mirabile, quam particulam corporis quandam ita fabricatam eſſe, ut ejus opera animal ſentiat procul poſitorum corporum figuram, poſitum, motum quemlibet, diſtantiam; idque etiam cum colorum varietate, quo diſtinctius ea dignoſceret. Oculi vero præter hæc artificioſiſſima conſtructio, quæ perfectam rerum extra poſitarum picturam in cava choroidis ſuperficie imprimere apta eſt, omnem profecto admirationem ſuperat, neque eſt in quo manifeſtius Geometriæ artem Deus exercuerit. Atque hæc non tantum ſolertia ſumma inventa & fabricata ſunt, ſed & videntur eſſe ejuſmodi, ſi quis propius attendat, ut non alia ratione perfici potuerint quàm hac quam cernimus. Nam neque lux aliter, quàm communicato motu per materiam cæleſtem, res longo intervallo remotas ſenſibus noſtris offerre poterat; nec oculorum artificio ullum aliud par dari ad diſtinctè referendas rerum imagines. Ut valde eos falli arbitrer, ſiqui hæc eadem multis modis ordinari potuiſſe contendere audeant. Quare omnino credibile eſt utrumque iſtud eodem modo ſe habere in Planetarum regionibus atque hic; neque aliam eſſe iis, quæ illic habitant animantibus, videndi rationem. Habebunt igitur oculos; atque etiam binos minimum, quò poſſint rerum ante pedes poſitarum diſtantias percipere, ſine quo vix tutò ingredi licet. Et hæc quidem ad vitæ uſum ne-

ceſſariò tribuenda ſunt animantibus Planetarum univerſis fere. Quæ vero ratione & mente prædita ſunt, cum alias quoque ex viſu utilitates capere poſſint, tantò magis conſentaneum eſt ut tam præclaro munere donata ſint. Nos enim colorum pulchritudinem, formarum elegantiam, ac concinnitatem viſu percipimus; legimus, ſcribimus, cælum & aſtra contemplamur, eorumque curſus, magnitudineſque metimur; quæ quatenus ad Planetarum incolas quoque pertineant, paulo poſt videbimus. Nunc illud prius quæramus an cæteros quoque ſenſus noſtros iis contigiſſe veriſimile ſit.

*Non auditum,*

Ac de auditu quidem multa ſuadent, ut cunctis, quæ illic ſunt, animalibus eum ineſſe credamus. Prodeſt enim plurimum ad vitam à periculis tutandam; cum ſonitu ac fragore ſæpe imminens infortunium cognoſcatur; præſertim noctu atque in tenebris, cum oculorum auxilium ereptum eſt. Videmus præterea ut animalia pleraque vocis ſono ſui ſimilia advocent, multaque inter ſe ſignificent, nobis quidem parum intellecta, ſed plura fortaſſe quam putamus. Apud ea vero quæ ratione utuntur, ſi cogitemus quam mirabilis ſit vocis & auditus oportunitas, vix credibile videbitur tam utilem ſenſum, tantumque loquendi artificium, hujus Terræ noſtræ, ac noſtri tantum cauſa fuiſſe inventum. Quomodo enim illis non multum deſit ad vitæ commoda, & felicitatem noſtræ ſimilem, qui tanto beneficio carent: aut quanam alia re penſari hoc poſſit? Quod ſi porro conſideremus, quam pulchre, quamque induſtrie natura hoc effecerit, ut idem ille aër, cujus reſpiratione vivimus, cujus flatu navigamus, qui, ut volare queant, avibus præſtat; ut, inquam, idem ille ad exprimendum proferendumque ſonum comparatus ſit; ſonus verò ad formandum, auribuſque ingerendum ſermonem; vix credemus inſignem hunc aëris uſum, in terris iſtis longinquis eam neglexiſſe?

*Nec per quem ſonus perferatur aërem,*

Eſſe enim illic aërem qui terris incumbat, vix dubitari poteſt, cum nubes in Jove apparere dixerimus. Sicut enim hæ ex aquæ guttulis minimis conſtant, ita ex particulis aquæ ſeorſim volitantibus magna ex parte formatur aër ille qui propius ter-

ram

ram circundat. Quem Planetarum globis adeſſe etiam hoc ſuadet, quod reſpirandi ratio, qua vita ſuſtentatur omnium quæ hic habemus animantium, videtur omnino ex univerſalioribus illis naturæ inſtitutis eſſe, velut nutriri ex fructibus terræ.

De ſenſibus autem reliquis animalium ut dicere pergam, cum ſanè qui ex tactu oritur, neceſſitate ſumma datum eſſe apparet omnibus iis quæ molli flexilique pelle teguntur, quò à lædentibus caveant refugiantque; cum abſque eo vulnera, plagas, contuſioneſque crebras acceptura fuerint. In quo tam provida natura fuit, ut, ne minimam quidem pellis particulam, doloris ſenſu vacare voluerit. Itaque hanc facultatem, tam neceſſariam ad conſervandam animalium incolumitatem, omnino credibile eſt etiam planetas inhabitantibus inditam eſſe. *Nec tactum;*

Odoratum vero ac guſtum quis non videt neceſſaria eſſe paſcentibus, quo conducibilia a noxiis, nihilve profuturis dignoſcant. Itaque ſi herbis, ſeminibus, aut fortaſſe carnibus quoque in regionibus iſtis animalia alantur; etiam his ſenſibus, tam ad cavendum, appetendumque neceſſariis, credibile eſt ea non deſtitui. *Nec odoratum, nec guſtum.*

Scio à nonnullis fuiſſe quæſitum, an non alii præter eos quinque quos diximus, naturâ dari potuerint. Quod quidem ſi concedatur, forſan dubitandum ſit animalium planetariorum ſenſus longè alios eſſe ac noſtratium. Nec ſanè obſtare quidquam videtur quo minus alii extare poſſint percipiendi modi: attamen cum perpendimus ad quos vitæ uſus unuſquiſque eorum, quos habemus, comparati ſint; non videtur ſaltem alius quiſquam neceſſarius adjungi potuiſſe. Nempe effecit providentia ut & propinqua, & longius remota, qualia eſſent oculis ſentiremus. Rurſus ut non viſa, ſive a tergo, ſive in tenebris, auditus exciperet. Item ut quæ nec oculi nec aures adeſſe nunciarent, alius tamen ſenſus qui in naribus eſt præſentiret, idque in canibus mirabili ut ſcimus ſubtilitate. Poſtremo effecit ut quæ quatuor iſtos ſenſus effugerent, quò minus in corpus impacta nocere poſ- *Nec horum ſenſus longe alios eſſe ac noſtratium.*

ſint, tactu perciperentur. Ita omnibus modis ſaluti conſervationique animalium conſuluit, nec quidquam amplius addi aut deſiderari poſſe videtur; ut proinde planetarum incolis vix aliud niſi ſuperfluum largitura fuerit.

Cum autem ex ſingulis ſenſibus, præter utilitatem, voluptas aliqua ad homines perveniat; velut ex guſtatu in cibis; ex odoratu in floribus & aromatis; ex viſu in contemplanda pulchritudine formarum, & colorum; ex auditu harmonicorum ſonorum; ex tactu in rebus venereis, (niſi peculiaris quidam ſenſus hic dicendus eſt) animalibus vero cæteris ex quibuſdam horum; nonne dicemus hæc naturæ munera fere eodem modo reliquorum Planetarum incolis diſtributa eſſe.

*Ut nec voluptatem ex iis ortam.*

Certe id quidem ratio poſtulare videtur. Sive enim cogitemus, quanto in univerſum, propter hæc, jucundior feliciorque vita reddatur, non debemus maximum ejus bonum noſtræ Telluris habitatoribus aſcribere, cæteras tenentibus denegare, quaſi res noſtræ rebus illorum multò præferendæ ſint. Sive ad voluptates, quæ in cibis capiendis, & in conjunctione utriuſque ſexus contingunt, attendamus; intelligemus hæc eſſe neceſſaria quædam veluti providæ naturæ juſſa, tacitè cogentis ad conſervandum, propagandumque animantium genus: vel etiam, in beſtiis quidem, fortaſſe genus ipſum propagari, ut utraque illa jucunditate fruatur; ut proinde, utroque nomine, in cæteris Planetis eadem reperiri conſentaneum ſit. Equidem cum hæc omnia quanti ſint, quantamque utilitatem habeant, conſidero; quamque admirabile ſit, tale quid, quale eſt voluptas, in rerum natura exiſtere; omnino adducor ut credam, non ſoli Telluri noſtræ, quæ de minoribus planetis unus eſt, rem tantam obtigiſſe. Et hæc quidem de voluptatibus iis quæ ſenſus corporeos afficiunt, rationis facultatem aut nihil, aut leviter tantùm. Sunt autem homini, præter iſtas, aliæ quoque; quæ mente tantum, & rationis ſenſu percipiuntur; aliæ cum lætitia conjunctæ; aliæ ſeriæ, neque ideo minoris faciendæ; velut quæ ex oblectatione ſcientiarum, inventorum, verique cognitione oriuntur; de quibus omnibus, an ad alio-

rum

rum quoque planetarum incolas pertineant, in ſequentibus dicendi locus erit.

Superſunt alia nunc expendenda quæ in terris illis ſimilia eſſe rebus noſtris veriſimile ſit. De Elementis terræ, aëris, & aquæ, vidimus jam quàm probabile ſit ea in Planetis cæteris non deeſſe. Videamus & de igne, qui apud nos quidem non tam Elementum eſſe dicendus eſt, quam motus quidam concitatiſſimus particularum à certis corporibus abreptarum. Hoc verò, quidquid eſt, etiam Planetarum incolis datum eſſe, multa ſunt quæ veriſimiliter probent. Primum quòd non tam in Terra hac, quàm in Sole, ignis ſedes collocata videatur; ac ſicut, calore Solis, herbæ & animantia hic creſcunt ac foventur, ita quoque haud dubie in cæteris fiat Planetis. Cum autem intenſior calor ignem generet, credibile eſt illic quoque, ac præſertim in Soli propinquioribus, eoſdem aut majoris caloris gradus exiſtere, eorumque vi ignem. Deinde videmus quam multis modis excitetur, velut colligendis Solis radiis, repercuſſu pelvium aut ſpeculorum; ferri & ſilicis colliſione; lignorum attritu mutuo; herbæ non bene ſiccæ congeſtis acervis; ex fulmine; ex montium terræque ſulphureæ incendiis. Quare mirum eſſet, non aliquo ex iſtis omnibus, in Planetarum terris, eum accendi. Cogitemus deinde quanta apud nos ſit ignis utilitas, quantaque neceſſitas. Hujus enim beneficio frigoris incommoda depellimus in iis regionibus, ubi calor Solis minus viget propter radiorum obliquitatem, atque ita efficimus ne magna Terrarum pars inculta inhabitataque maneat; quod in omnibus Planetarum globis, ſive æſtatis hyemiſque viciſſitudines ſentiant, ſive perpetuo fruantur æquinoctio, æque neceſſarium eſt remedium; quoniam & in his, loca polis viciniora, parum juvari Solis calore certum eſt. Eodem igne nocti lucem inducimus, diemque velut alterum creamus, quo non parum temporis vitæ adjicitur. Itaque ob hæc omnia prorſus veriſimile eſt tanta re non ſolos Telluris incolas frui, ſed omnibus Planetis communiter eſſe conceſſam.

*Ignem quoque Planetis communem eſſe.*

*Magnitudinem corporum in Planetis exiſtentium ex Planetarum magnitudine non recte conjici.*

Porro quæri poteſt de animalibus, tam ratione utentibus quàm brutis; atque etiam de ſtirpibus arboribuſque, an, quæ iſthic naſcuntur, noſtris magnitudine reſpondeant. Nam ſi hæc ipſorum globorum mole natura metiatur; eſſent in Jove ac Saturno animalia quædam decies aut quindecies altiora Elephantis, aut tantundem longitudine balænas noſtras ſuperantia. Tum illa quæ ratione prædita ſunt, gigantum corpora haberent noſtris comparata. Qua quidem in re nihil video quod vel mirum ſit, vel fieri nequeat. Nulla tamen ratione cogimur ut re ipſa id ita eſſe credamus; quandoquidem in multis rebus apparet non iis menſuræ regulis naturam ſe obſtrinxiſſe quæ noſtra opinione convenientiores videbantur. Veluti quod ipſorum globorum Planetariorum moles nequaquam pro diſtantia eorum a Sole conſtituta ſit, cum Mars manifeſto minor ſit Venere, etſi remotior: cumque converſio Jovis, ſuper axe ſuo, 10 horis peragatur; Telluris vero, tantò minoris, impendat horas 24. Poſſet vero dubitari, cum proportionem in his ita negligat Natura, an non fortaſſe pumiliones quidam ſint incolæ Planetarum, aut ranis muribuſve non majores. Sed oſtendam poſtea cur id nequaquam conſentaneum putandum ſit.

*In Planetis ut in Terra varia eſſe animalia quibus ratio competat.*

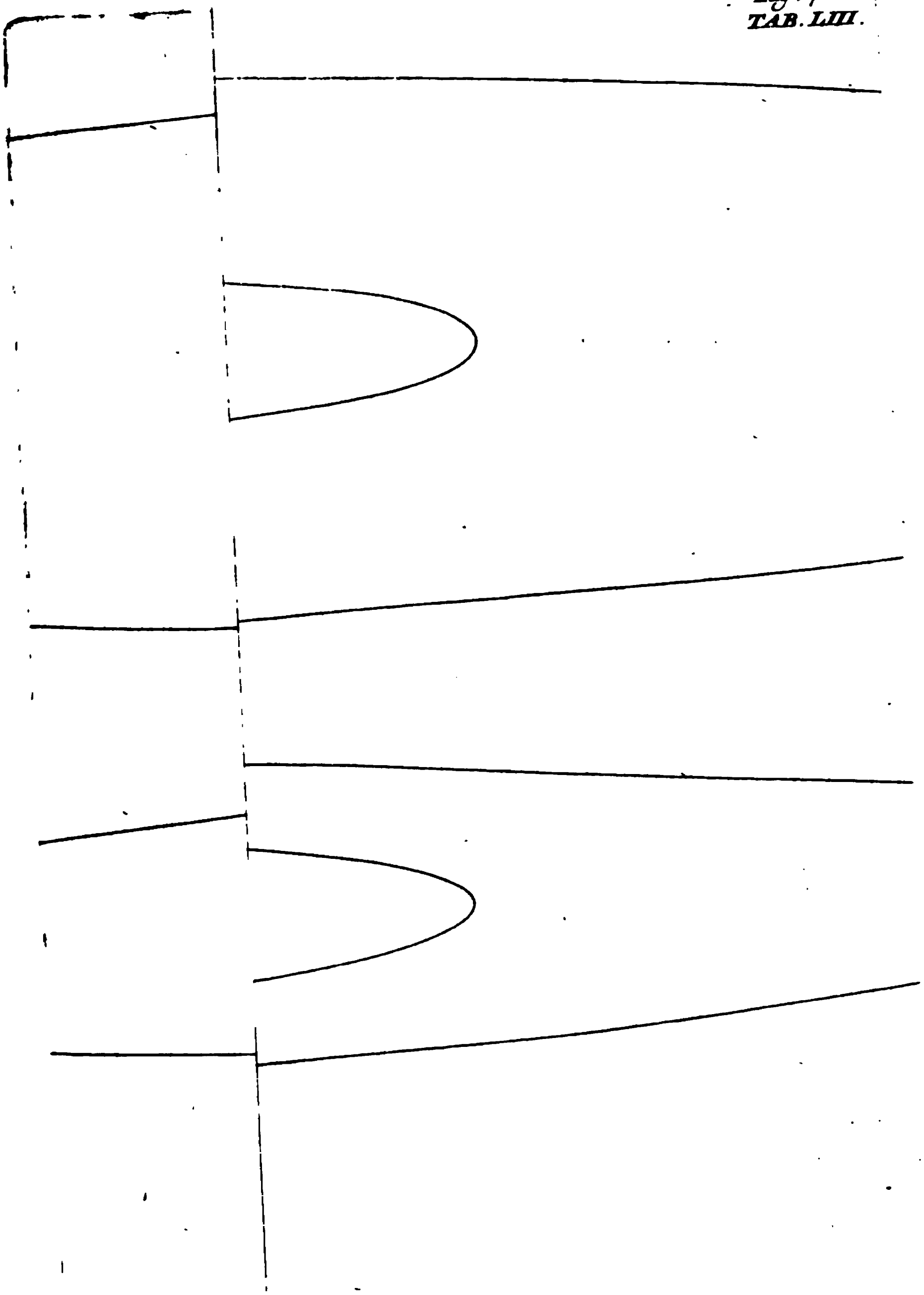
Aliud quoque dubium exoriri poſſet, utrum genus unum tantum animalium quæ rationem ſortita ſint, an plura in Planetis ſingulis reperiantur, & num diſpari rationis vi. Ac profecto tale quid in Terra hac noſtra contigiſſe cernimus. Non de iis nunc dico quæ figuram hominum præferunt; (etſi de his quoque id non abſurde dici poſſit) ſed ſi quorundam è beſtiarum genere, ſenſum intellectumque ſpectemus; veluti canum, ſimiarum, caſtorum, elephantorum, imo & avium quarundam, & apicularum, ea talia ſunt, ut nequaquam ſolum genus hominum rationis particeps dicendum videatur. Apparet enim quoddam hujus inſtar in iſtis omnibus, quod, abſque ulla inſtitutione aut experientia, iis ineſſe deprehenditur.

*Et inter ea Hominibus ſimilia.*

Attamen dubitari nequit quin longè præcellat hominum intelligentia & ingenium, quippe innumeris rebus aptum, con-

Digitized by Google

TAB. LIII.



Digitized by Google

Digitized by Google

conſilii ad futura capax, præteritorum memoria infinita præditum. Quod ingens præſtantiæ diſcrimen ſi perpendamus, credemus non ſine ratione, in cæteris quoque planetis, unum quoddam genus prætuliſſe naturam; atque eo magis, quod ſi plura forent eadem ingenii ſagacitate, poſſent nocere ſibi invicem, ac de poſſeſſionibus & imperio inter ſe contendere; quod nunc quoque faciunt nimis frequenter, licet unius generis ſint, quæ in Terra hac dominantur. Verum hæc utcunque ſe habeant, de iis nunc agamus terrarum iſtarum animalibus, quæ maximè cæteris ratione antecellunt; quæramuſque an ſciri poſſit, quibus in rebus ejus uſum impendant, & an habeant etiam artes ſcientiaſque ſuas, velut nos in hoc noſtro planeta. Quod quidem, inter ea quæ ad naturam eorum attinent, præcipuè expendi meretur. Sed, quo melius id fiat, paulò altius exordiendum eſt, vitaque & ſtudia hominum attentius inſpicienda.

Ac videtur quidem quatenus providendis procurandiſque rebus tantum neceſſariis homines intenti ſunt, ut nempe ab aëris injuriis tuti habitent; ut mœnibus incluſi ab inimicis ſibi caveant, ut leges condant ad ſecure ac tranquille vivendum; ut liberos educent; victum illis, ſibique parent; in his omnibus inquam nihil magnum admodum habere videtur rationis noſtræ uſus, cujus cauſa nos brutis animantibus anteferamus. Namque hæc pleraque iſtorum facilius ſimpliciuſque efficiunt; aliquibus nihil opus habent. Quin imo & virtutis, juſtitiæque ſenſus, propter quem paulo ante excellere mentem humanam dicebamus; itemque amicitiæ, gratitudinis, honeſti; quid aliud efficiunt, niſi ut vel vitiis hominum obſiſtatur, vel vita tranquilla & mutuarum injuriarum expers præſtetur; quod beſtiis ſponte ac naturæ ductu contigit. Jam ſi curas multiplices, animi ægritudines, concupiſcentiam, mortis metum, quæ omnia rationem illam noſtram comitantur; ante oculos ponamus; eaque cum vita parabili, quieta & innocua beſtiarum comparemus; videri poſſint harum plurimæ, ac præſertim ex avium genere, jucundius agere, & meliore quam homines ſorte frui. Nam

Pppp 3 quod

quod ad voluptates corporis attinet, haud dubie iis æque ac nos afficiuntur, quicquid contradicant novi quidam philoſophi; qui ſenſum omnem ita auferunt reliquis præter hominem animantibus, ut pro meris automatis aut neuroſpaſtis ea haberi velint; quorum abſurdæ, crudelique ſententiæ, miror quenquam accedere poſſe; præſertim cum & voce & verberibus fugiendis, & re omni contrarium beſtiæ ipſæ ſignificent. Imo vix dubito, quin miro pulchroque illo per aëra lapſu aves ſeſe delectari ſentiant; magis etiam ſenſuræ ſi intelligerent quantopere lentus ac humilis noſter inceſſus ipſarum pernicitate, ſublimique volatu ſuperetur. Quid igitur eſt in quo potiſſimum eminet humanæ rationis uſus, facitque ut antecellamus cæteris animantibus? Nihil æquè puto ac contemplatio naturæ, Deique operum; tum cultura ſcientiarum, quibus conſequimur ut eorum præſtantiam, magnitudinemque aliqua ex parte cognoſcamus. Abſque enim diſciplinis quid eſſet contemplatio? quamque multum intereſt inter eos qui Solis pulchritudinem, utilitatemque, & cælum ſideribus ornatum otioſe intuentur, alioſque doctiores qui curſus iſtorum omnium ſcrutantur: quomodo affixæ, quæ dicuntur, ſtellæ à vagis differant, quæque cauſa ſit diverſarum anni tempeſtatum intelligunt: qui denique ſubtili ratiocinio magnitudinem Solis ac Planetarum, ſimulque diſtantiam eorum metiuntur; quantumque item inter eos qui animalium varios motus agilitatemque mirantur, & hos qui fabricam omnium membrorum, artificioſiſſimamque compagem, architecturamque in iis ſpeculantur? Quod ſi igitur Planetæ reliqui dignitate non cedunt Telluri noſtræ, ut in ſuperioribus principii fundamentique loco poſuimus; oportet ibi animalia exiſtere, quæ non ſolum naturæ opera ſpectent & admirentur, ſed quorum ratio in examinandis, intelligendiſque iis occupetur, nec minora quam nos conſecuta ſit. Itaque non tantum ſidera intuentur, ſed & Aſtronomiæ ſcientiam excolunt; neque aliud obſtat quo minus hoc veriſimile credamus, quam ſuperba illa noſtrarum rerum æſtimatio, quæ difficulter ſane deponitur. Scio tamen futuros,

*Humanam rationem præ illa brutorum præcipue eminere in contemplatione naturæ.*

*Hinc Planetarum incolas ſcientias excolere, & inter eas, Aſtronomiam.*

ros, qui dicant nimis audacter nos iſta Planetarum incolis tribuere: multorum quippe veriſimilium accumulatione huc eſſe perventum; quorum ſi unum quodpiam contra ſe habeat, quam poſitum ſit, cadat, velut in vitioſa ædificatione, omne quod ſuperſtruximus. Sed ſcire eos velim, hoc quod de Aſtronomiæ ſtudio diximus, omiſſis fere omnibus hactenus adductis confirmari potuiſſe, atque inde initium fieri. Poſtquam enim poſitum fuit Terram hanc inter Planetas eſſe habendam, neque iis dignitate aut ornatu præferendam; quis dicere audeat in ea ſola reperiri, qui ſpectaculo Naturæ, quod unum pulcherrimum ac magnificentiſſimum eſt, fruantur? aut inter eos quibus hoc contigit, nos unos eſſe quibus cæli arcana penitius perfectiuſque perſpecta ſint? Ecce igitur & hac breviore via comprobata in Planetis Aſtronomiæ cognitio, ex qua & animal rationis compos, & pleraque alia quæ præceſſere, illis ineſſe conſequebatur. Adeo ut, ad priora confirmanda, hæc quoque noviſſima argumentatio conducat. Quò vero magis probabile fiat, ſaltem in ſuperioribus Planetis, Jove ac Saturno, Aſtronomiæ notitiam non deeſſe, conſiderandum eſt, quod ſi homines ad ſidera obſervanda impulit, ut credi par eſt, admiratio & pavor in defectibus Solis & Lunæ; multo magis, in utroque hoc Planeta, ea ratio valere debuit, propter cotidianas fere Lunarum, crebraſque Solis, quæ illic contingunt, eclipſes. Ut ſi quis æquè ignorare ponatur quid rerum in Planetis omnibus geratur, multo veriſimilius dicturus ſit Aſtronomiam in majoribus illis duobus, quàm in hoc noſtro, vigere.

Poſita autem apud Planeticolas hujus ſcientiæ cognitione & uſu, quam multa hinc præterea conſequuntur quæ de vita ſtatuque eorum reliquo, præter jam dicta, novas conjecturas afferant?

Primùm enim nulla obſervatio ſiderum, ad motus eorum inveſtigandos, abſque organis inſtitui poteſt; ſive ea è metallo, ſive è ligno aliave ſolida materia fabricata ſint. Quod ut fiat, nec fabrorum inſtrumento, ſerra, aſcia, dolabra, *Et quæ ei inſerviunt artes mechanicas.*

mal-

malleo, lima, carere poſſunt; neque hæc habere abſque uſu ferri aut æque duri cujuſpiam metalli. Sed & circuli arcus in partes æquales diviſi, aut lineæ rectæ in inæquales, in iſtis organis requiruntur. Atque hic jam Geometriæ & numerorum ratio arceſſenda eſt. Sed ante omnia quoque neceſſe eſt ut obſervationum memoria ad poſteros tranſmittatur; ut tempora & Epochæ annotentur; quæ ſine ſcripto non videntur explicari poſſe. Oportet igitur ut & ſuam ſcribendi artem habeant, multum fortaſſe diſſimilem noſtræ, qua fere omnes populi utuntur, ſed quæ vix ingenioſior, aut ad diſcendum facilior eſſe queat. Quis enim non videt longe eam præferendam eſſe Sinarum innumeris characteribus, multoque magis funiculorum nodis, aut pictis imaginibus, quæ apud barbaros Mexicanos Peruvianoſque in uſu erant. Omnium quidem Regionum homines aliquam ſcribendi, aut quoquo modo annotandi, artem quæſiviſſe videmus: quò minus mirum ſit, ſi & Planetarum incolæ, neceſſitate coacti, eam repererint, ac deinde ad Aſtronomiæ aliarumque diſciplinarum ſtudia adhibuerint. Neceſſitas vero ſcripturæ in rebus Aſtronomicis etiam ea re cognoſcitur, quod cum hypotheſibus variis, ſiderum motus, quaſi divinandi ſint; eæque hypotheſes priores in ſequentibus corrigendæ, prout obſervatis & Geometriæ ratiociniis vitia earum coarguuntur; nihil horum poſteris tradi poteſt, niſi literis conſignatum, figuriſque expoſitum.

*Ut & Geometriam, Arithmeticam,*

*Et ſcribendi Artem.*

Poſtquam vero omnia hæc jam iis conceſſerimus, longe etiamnum præſtantior perfectiorque apud nos erit ſiderum ſcientia; vel propter agnitam ſyſtematis univerſi veriſſimam formam, vel propter uſum teleſcopiorum, quibus Planetarum corpora, magnitudineſque & varias formas intuemur; ſuperficiei lunaris montes, montiumque umbras, ſtellarum ingentem multitudinem, aliaque plura non alias videnda, percipimus. Ut fere neceſſe ſit, niſi rurſus nobis tanquam hac parte felicioribus blandiri volumus, etiam illam cognitionis rerum cæleſtium conſummationem Planeticolis tribuere; itemque videndi aciem, quæ vel noſtram longe exuperet,

*Opticam.*

Digitized by Google

ret, vel lentium vitrearum, aut ſpeculorum adminiculo ſicut noſtra, adjuvetur. Quod tamen dicere vereor, ne quis, ex hoc uno audacius aſſerto, cætera omnia æſtimanda putet, ac riſu digna clamitet.

At non ſine ratione, ut videtur, objiciet quiſpiam, Planetarios noſtros fortaſſe omni ſubtiliore ſcientia deſtitui, quemadmodum Americanæ gentes, priuſquam ad illas Europei penetraſſent. Quas ſi reſpicimus, itemque in Africa, Aſiaque permultas æque barbaras, videbitur hoc tantum ſummo opifici propoſitum fuiſſe, ut vita fruantur homines, naturæque bonis & voluptatibus contenti ſint, grato animo omnium datorem colentes; ſcientiarum vero inquiſitionem præter naturam paucos aliquos affectaſſe. Talia vero dicentibus non deeſt quòd reſponderi poſſit. Prævidit enim certe Deus hominum ingenia eo eſſe proceſſura, ut res cæleſtes ſcrutarentur; ut artes vitæ utiles reperirent; maria quoque navigarent, metalla effoderent. Poſſetne enim horum quidquam præter mentem infinitæ illius intelligentiæ contingere? Quod ſi prævidit, etiam hominum generi ea deſtinata ſunt, nec poterunt artium & doctrinarum ſtudia, quaſi præter naturam eſſent, exiſtimari, quæ in ipſa natura indaganda occupantur. Præſertim cum tanta illa cupiditas amorque ſciendi non poſſint cenſeri fruſtra hominum animis infixa eſſe. Inſtabunt vero rurſus dicentque, de ſiderali ſcientia potiſſimum, ſi ad hanc quoque homines nati ſunt, cur tam pauci ad eam attendunt? Primum enim ex quatuor Orbis partibus, ſola fere eſt Europa, in qua Aſtronomiæ ſtudia excolantur. Nam Aſtrologiam divinatricem futurorum, quæ non ſcientia, ſed miſerum quoddam ac ſæpe noxium delirium eſt, ne nominandam quidem hic arbitror. At in Europæ Nationibus non unus è centum millibus hæc ſtudia amplectitur, aut addiſcere curat. Tum ad tempus quod attinet, multa ſæcula effluxiſſe dicent, antequam aut Aſtronomiæ, aut Geometriæ, ſine qua illa diſci non poteſt, ulla rudimenta innoteſcerent. Sciri enim quo tempore in Ægypto & Græcia primum exortæ fuerint. Ac recte quoque adjicient non adhuc octoginta annos præteriiſſe,

*Has ſcientias homini præter naturam non eſſe.*

ſe, ex quo verus ac ſimplex Planetarum motus, rejectis Epicyclorum figmentis, repertus ſit; atque ita demum Aſtronomia cum naturæ cognitione conjuncta. Hiſce ut occurratur, addam ad ſuperius reſponſum, quod à divina providentia petebatur, dubitari non poſſe, quin ea conditione homines nati ſint, ut multo temporis decurſu paulatim artes diſciplinaſque eruant; nullam enim harum iis ingenitam eſſe, aut ſubito à Deo infuſam, & has de quibus nunc agimus, omnium eſſe difficillimas remotiſſimaſque: ut magis mirum ſit unquam incipere eas potuiſſe, quam tam tarde fuiſſe inſpectas. Pauci fateor ſingulis ætatibus has curant, aut ad ſe pertinere exiſtimant: ſed ſi multorum ſæculorum tempora cogitentur, non exiguus fiet illorum Numerus; quos, quemadmodum ſibi videntur, reliquis beatiores eſſe quis negaverit? Denique paucorum induſtria in his rebus exerceri ſatis erat, cum inventorum utilitas ad nationes totas genteſque longe porrigatur. Cum igitur hujus Terræ incolis, etſi paucis tantum, ad ea percipienda ingenium & aptitudo contigerit; nihiloque putandi ſint cæterorum planetarum habitatoribus præſtantiores feliciореſve; manet profecto, quam inveneramus, veriſimilitudo, ut etiam apud illos reperiantur qui cognitione Aſtronomiæ non careant. Nunc ad alia pergamus quæ inde conſequi, neceſſe eſt.

Oſtendimus quomodo unà cum hac ſcientia, non ſolum Geometria & Arithmetice, ſed & Mechanicæ artes, inſtrumentaque incolis Planetarum concedenda ſint. Hic verò jam ſponte obvenit ut quæramus, quo pacto inſtrumentis illis, Machiniſque, & ad ſidera obſervanda organis uti poſſint, aut quomodo literas ducere; quæ omnia nos manuum opera exequimur. Itaque neceſſario & manus habebunt, vel aliud quodpiam, quod vicem earum fungi poſſit, membrum. In quibus hominum generi tantum eſſe præſidii exiſtimabat è veteribus Philoſophis quidam, ut in iis cauſam reponeret omnis eorum ſapientiæ. Qui, ut puto, hoc ſenſit, abſque manuum opera homines ad cultum animi, rerumque cognitionem non fuiſſe perventuros. Et vere quidem.

*Planeticolas manus habere.*

dem ille. Finge enim pro manibus datas fuiſſe ungulas, ut equis & bobus; nunquam nec oppida nec domos, licet ratione inſtructi, ædificaſſent. Nihil de quo loquerentur habuiſſent, niſi de iis quæ ad pabulum, aut ad conjugium, aut ſui tutelam attinent. Omni ſcientia, omnique rerum memoria caruiſſent: Denique à beſtiis parum abfuiſſent. Quodnam porro inſtrumentum æque accommodatum ac manus eſſe poſſit ad innumera illa ad quæ nobis uſui ſunt, obeunda? Elephanti proboſcide mirabiliter utuntur, qua & amplecti quidvis & projicere, minutioraque quævis è ſolo tollere norunt: unde & manus eorum pars illa dicta eſt, cum reipſa ſit in longum productus naſus. Roſtro quoque aves pleræque nidos exſtruunt, alimentaque congerunt. Sed harum nihil eſt quod non manuum oportunitati longè concedat. Et eſt ſane, tam illarum quam brachiorum, mirabilis quædam machinatio; ut protendi, reduci, inque omnem partem moveri poſſint. Tum mirâ induſtriâ inſtituti digitorum ac pollicis articuli, ut nervorum attractu quælibet prehendant, firmiterque contineant. Ut omittam ſenſum illum, in extremis digitis, exquiſitiſſimæ ſubtilitatis; quo vel in tenebris pleraque corpora internoſcimus. Patet itaque aut manus brachiaque, aut aliud quid eorum loco, quod vix æque aptum excogitari poteſt, Planetarum populis datum eſſe, ne non ſolum nobis, ſed & ſimiarum & ſciurorum generi, plus indulſiſſe hac in re natura exiſtimetur.

De pedibus vero minus etiam dubitabitur, ſi repetamus ea quæ ſupra diſſeruimus de vario animalium inceſſu, qui non videtur aliis modis, quam quos ibi recenſuimus, cogitari poſſe. Inter eos vero non eſt, qui tam bene Planeticolis ratione præditis conveniat, quam quo & nos utamur. Niſi forte & volandi facultatem in aliquibus Globorum iſtorum acceperunt. Quod minus probabile tamen propter vitam in ſocietate degendam, de qua poſtea dicemus. *Et pedes;*

Non caret autem veriſimilitudine, erectos oculos, vultumque ad ſidera contemplanda iis contigiſſe, quandoquidem hoc in hominum corpore providentiâ divinâ ſic inſtitu- *Erectos oculos, vultumque.*

 tum

tum videtur, & a Philoſophis merito celebrari ſolet. De reliquorum vero membrorum poſitu, ſi ſapientiam artificis laude dignam cenſemus, quod oculos in ſuprema corporis parte collocaverit; ſordidiora vero membra procul inde, atque a conſpectu quodammodo removerit; nonne putandum eſt eadem fere obſervaſſe illum in formandis iſtorum procul habitantium corporibus? Nec enim propterea dicimus figuram noſtræ ſimilem iis tribuiſſe. Eſt enim infinita quædam animo concipienda formarum poſſibilium varietas, qua & ſingulæ quæque partes iſtorum corporum à noſtris differre queant, & totorum exterior interiorque œconomia. Cernimus quam aptè & commodè animalium noſtrorum quædam lana aut pilis veſtiantur; alia elegantius etiam plumis penniſque. Quidni iſti in Planetis, quos rationis participes diximus, aliqua ſimili ratione tecti ſint? propter quod meliori quidem conditione beſtiæ, quam homines, apud nos eſſe videntur. Niſi hoc eo fine ſic conſtitutum fuit, ut ipſa nuditas neceſſitatem hominibus imponeret quærendi ac fabricandi varia operimentorum genera, atque hinc etiam ingenii exercendi materia exiſteret. Et apparet ſane, ex hac neceſſitate, non minimam commerciorum, artificiorumque mechanicorum occaſionem naſci. Sed & propterea forſan nudos homines natura produxit, ut pro arbitrio ſuo tenuius denſiuſve amicti incedere poſſint; atque ita ad quaſvis terrarum oras inhabitandas ſeſe componere. Alia vero major hac, quam diximus, differentia intelligi poſſet inter corpora Planetariorum ac noſtra; cum animalia quædam ita à natura formata reperiantur, ut veluti oſſa extrinſecus habeant, carnes introrſum, atque oſſibus incluſas, qualia ſunt cancri, aſtacique, & fere etiam teſtudines. Attamen hanc membrorum compagem, & in paucis vilioribus tantum illa ſecuta eſt, & Planetarum incolis, quo minus eam tribuam, facit, quod ſubtili varioque digitorum uſu carituri eſſent, quo tam valde eos opus habere oſtenſum fuit: nam abſurda ſpecie non multum alioqui moverer.

*Nec tamen hinc ſequi eorum formam noſtra plane ſimilem.*

Etenim omnino cavendum eſt ab errore vulgi, cum animum

*Quo minus animus ra-*

mum

mum rationis capacem non alio in corpore, quam noſtris ſimili habitare poſſe ſibi perſuadet. Ex quo factum eſt, ut populi penè omnes, atque etiam Philoſophi quidam, humanam formam diis adſcripſerint; Imo ut, à ſimili perſuaſione, cuidam Chriſtianorum ſectæ nomen inditum fuerit. Hoc vero non niſi ab hominum imbecillitate & præjudicata opinione proficiſci quis non videt? uti illud quoque, quod eximia quædam pulchritudo humani corporis eſſe putatur: cum tamen ab opinione & aſſuetudine id totum quoque pendeat, affectuque eo, quem cunctis animalibus natura provida ingeneravit; ut ſui ſimilibus maxime caperentur. Illa verò tantum poſſunt, ut non ſine horrore aliquo animal homini multum diſſimile conſpectum iri credam, in quo rationis & ſermonis uſus reperiretur. Nam ſi tale ſolummodo fingamus aut pingamus, quod, cætera homini ſimile, collum quadruplo longius habeat, vel oculos rotundos duploque amplius diſtantes; continuo eæ figuræ naſcuntur, quas non poſſimus intuentes non averſari, quamvis ratio deformitatis nulla reddi queat.

*tionis capax etiam alii forma inhabitet, nihil impedire.*

Dixi in ſuperioribus cum de magnitudine agerem incolarum qui in Planetis ſunt, veriſimile videri non eſſe eos valde exiguos nobiſcum comparatos. Suadet enim hoc primò, quod probabile ſit, ſicut corpora hominum ſe habent ad Telluris magnitudinem, ut peragrare univerſam poſſint, atque ita formam molemque ejus cognoſcere; eodem modo & in cæteris Planetis incoliſque eorum rationalibus ordinatum eſſe; niſi hac in re, quæ ſane magna eſt, nos ipſis rurſus præferre velimus. Deinde cum ſiderum ſcientiam & obſervationes apud eos exerceri oſtenderimus, ſequitur ut & corpora nacti ſint lignis metalliſve tractandis, inque inſtrumenta machinaſque adaptandis, idonea. Quæ & eo præſtabiliora ſunt quo ampliora. Ac ſane ſi homunciones quoſdam, muribus non majores, cogitemus, non poſſent ii ſiderum animadverſiones, quales requiruntur, inſtituere; nec inſtrumenta ad eas parare, aut diſponere. Itaque omnino vel æquales nobis ponendos eſſe

*Planeticolas nobis vel æquales vel majores eſſe.*

exiſtimo, vel majores, ac præſertim in Jove, Saturnoque, quorum Globi tanto Tellurem noſtram ſuperant.

*Eos in ſocietate vivere.*

Porrò quia, ut diximus, aſtronomiæ ſtudium ſine annotatione obſervatorum non poteſt procedere, ars vero ſcribendi non niſi in ſocietate ratione utentium, & cogentibus vitæ neceſſitatibus, inveniri potuit; neque magis ars fabrorum aut fuſoria; ſequitur ex eo (quod ſupra dicebam) & ſocietates coli apud Planetarum indigenas, ac mutuas operas eos inter ſe præſtare; adeoque hac parte ſimilitudinem magnam ibi eſſe noſtratium rerum. Quamobrem & certas ſtabileſque ſedes potius quam ambulatoriam vitam iis convenire dicendum eſt. Quid igitur? an & cætera ſociali vitæ propria habebunt? leges, Magiſtratus, tecta, urbes, mercaturas aut rerum permutationes? Certe equidem apud barbaros Americæ & inſularum populos, cum primum ad eos perventum eſt, eadem hæc fere jam in uſu erant. At non propterea negaverim aliter iſta in Planetis cæteris ſe habere poſſe quam apud nos; cum ex iis quædam ſint quæ abeſſe queant à ſocietate animalium ratione præditorum; eoque tantum excogitata, ne ratione male utamur & cum aliorum injuria, itaque ſocietas ſolvatur. Poſſunt enim in aliis iſtis globis in ea rerum abundantia verſari, ut nihil alieni appetant, rapiantve. Poſſunt ea eſſe æquitate, ut pacem perpetuo colant, nec ſibi invicem inſidientur, aut mortem inferant; imò ut neque oderint nec iraſcantur; quod ſi eſſet, multo quàm nos feliciores putandi ſint. Sed veriſimilius eſt, ut quemadmodum apud nos, ſic ibi quoque bonis mala, ſapientiæ ſtultitia, paci bellum miſceatur, nec deſit egeſtas artium magiſtra. Quia & ex his utilitatem aliquam proficiſci antea oſtendimus; &, ſi nulla eſſet, tamen nec præferendi res illorum rebus noſtris cauſam habemus.

*Colloquiorum jucunditate frui.*

Quod autem nunc dicam, audacius, ſcio, videbitur; nec tamen probabilitate caret. Nempe, ſi in ſocietate (quod jam penè obtinuimus) vivant gentes Planetarum; etiam, præter commoda inde provenientia, voluptate aliqua tali eas affici, quali nos, ex congreſſibus colloquiiſque amicorum, amo-

Digitized by Google

amoribus, jocis, ſpectaculis. Hoc, inquam, probabile eſt, quia ſi nihil horum Planeticolis concedamus, ſed ſemper eos ſeriò, ac ſine omni hilaritate, aut animi remiſſione agere putemus; ingens vitæ condimentum, quoque vix illa carere poſſit, iis adempturi ſimus, atque ita noſtram hanc beatiorem facturi, contra quam ratio poſtulat.

De reliquis vero occupationibus & ſtudiis illorum ut porrò inquiramus; videndum eſt quænam iſtorum, præter ea quæ jam diximus, cum noſtris aliquam ſimilitudinem habere probabile ſit. Domos ſibi eos conſtruere, ideo vel maxime credere libet, quòd & pluvias in terris illis cadere oſtendimus. Sequebatur enim hoc ex eo, quod in Jovis Planeta nubium quidam mutabiles tractus cernuntur; vapores, aquamque haud dubie continentes: quam aliunde quoque illic non deeſſe argumentis adſtruebamus. Erunt ergo & imbres & venti, quia attractum à Sole humorem recidere in terram neceſſe eſt; & calore ſoluti vapores ventorum cauſa ſunt; quorum flatus ex illa nubium Jovialium mutabili facie cognoſcitur. Adverſus hoc ergo, ut noctes tuto & quiete tranſigant (habent enim & noctes & ſomnum proinde, uti nos) munire ſe eos, caſaſque ac tuguria ædificare, aut ſpecus effodere, veriſimile eſt. Atque eo magis quod omne genus animalium, apud nos, exceptis piſcibus, ad ſui tutelam hæc molitur. Cur vero caſas & tuguria, & non domos amplas & magnificas Planetarum habitatoribus exſtrui credamus, niſi quod non poſſumus res noſtras non præ omnibus pulchras perfectaſque putare. Qui autem nos? Nempe in globulo illo vitam agentes, qui non decies milleſimam partem globorum Saturni aut Jovis æquet, ſi corporum moles inter ſe conferantur. Nulla equidem ratio adferri poteſt cur non Architecturæ elegantiam, ſymmetriamque, æque cognitam habeant in iſtis cæteriſque Planetis, ac nos in noſtro: nec cur non palatia, turres, pyramideſque alicubi noſtris multo altiores ſumptuoſioreſque, nec minori concinnitate exædificent. Cumque multiplex ſit hominum in his rebus induſtria, ut in cædendis lapidibus, coquenda calce & lateri-

*Domos adverſus pluviam exſtruere.*

ri-

ribus; cum ferro, plumbo, vitro utantur, atque ad ornatum auro quoque; his omnibus nihilo inferiora illic haberi veriſimile eſt.

Si vero diviſa eſt illis, ſicuti nobis, Globi ſui ſuperficies, ut pars terram, pars maria contineat; uti ex ſupra memoratis Jovis obſervationibus colligi poteſt, quia nubes vix aliter quam ex maris amplis tractibus enaſcerentur; permagna ratio eſt ut & navigare eos putemus. Cum alioqui etiam rem tantam, tamque utilem, noſtræ Telluris Globo ſoli non abſque arrogantia aſcripturi ſimus. Præſertim verò in Jovis Saturnique maribus commoda eſſet navigatio propter Lunarum plurium utrobique copiam; quarum ductu longitudinum menſuram, quam vocant, quæ nobis non contigit, facile conſequi poſſint. Quod ſi navium uſum habent, quam multa præterea habebunt quæ ad eas pertinent; Vela, anchoras, funes, trochleas, gubernacula; & horum uſum peculiarem quemadmodum nos; ut vento penè contrario navigetur, in contrarias vero partes eodem vento faciliime. Nec fortaſſe nauticæ pyxidis invento carebunt; ſiquidem motus materiæ magneticæ, quæ terræ globum continue pervadit, eſt ejuſmodi quid, ut cæteris quoque planetis convenire cenſeri poſſit. Mechanicæ quidem ſcientia, & Aſtronomiæ, in re navali neceſſario requiritur, atque adeo utriuſque harum magiſtra Geometria, de qua jam ante aliquid attigimus.

*Navigare, adeoque & artes, quæ eo faciunt excolere.*

Exiſtimo autem, etiamſi nec ad iſtas artes nec ad alias quaſdam reſpiciamus, in quibus vel neceſſitas vel occaſio Geometriæ inveniendæ initium fecerit, non deeſſe rationes, quibus veriſimile fiat ejus notitiam Planetarum incolis obtigiſſe. Sive enim cognitionis ipſius pretium ac dignitas ſpectetur, in qua ſingularis quidam intelligentiæ eſt uſus, ac certa indubitataque veri comprehenſio, quanta in nullis rebus diſciplinisve aliis reperitur: ſive quod eſt ejuſmodi natura ſua, ac talia ejus axiomata & effata, ut quocunque loco & tempore, aut quibuſcunque in mundis extet, prorſus eadem ubique eſſe debeat; videtur omnino non ſolis Telluris noſtræ incolis res talis parata aut oblata eſſe. Quid quod figuras

*Ut & Geometriam.*

Geo-

Geometricas, velut circulos, triangula, polygona, ſphæras, multis modis natura ipſa oculis objicit, ad variaſque eorum proprietates indagandas quaſi invitat; in quarum contemplatione, etiam extra utilitatem omnem, ſumma eſt oblectatio. Quis enim non admiratur, cum diſcit ea quæ de circulo in Elementis Euclideis, & Apollonii locis Planis docentur? aut quæ de ſphæræ ſuperficie & quadratura Parabolæ Archimedes prodidit, aut recentiorum ſubtiliſſima inventa? Quorum omnium eadem, & ad diſcendum æque expoſita, eſt veritas in Saturno, ac Jove, atque apud nos, & ex iiſdem ſimpliciſſimis principiis pendens, quo facilius credi poteſt pulcherrimi jucundiſſimique ſtudii in illis ac cæteris planetis aliquos participes eſſe: Etſi præcipue hoc ſuadet utilitas quæ ex eo in omnem vitam emanat. Quod ſi jam eo uſque rei Geometricæ peritos qui in Planetis ſunt dicerem, ut & Tabulas Sinuum, & Logarithmos, & calculum Analyticum invenerint; abſona ac pene ridicula proferre viderer. Nec tamen quidquam obſtat quin horum aliquid reperiſſe potuerint, aut aliquando reperturi ſint; atque etiam his noſtris fortaſſe majora. Non debemus enim, ut jam ſæpe diximus, præferre nos ipſos ac res noſtras rebus Planeticolarum.

Cæterum illud quod uniuſmodi & æternum in Geometrica ſcientia ineſſe animadvertimus, ſimiliter quoque in Harmonicis inveniri certum eſt; cum conſonantiæ omnes conſtanti menſura ac proportione conſtituantur; omnis vero phtongorum ordo, omniſque cantus delectatio, etiam vocis ſingulæ, in conſonantiis fundata ſit. Quo fit ut apud omnes gentes eadem tonorum intervalla canantur, ſive per gradus continuos, ſive ſaltu vox progrediatur. Imo animal quoddam in terris Americæ reperiri fide digni auctores narrant, quod ſex muſicos tonos deinceps voce exprimat: Ut appareat ipſam naturam immutabili ratione eos præſcribere. Quandoquidem igitur quæ huc ſpectant, certa quoque & unica, & neceſſaria ratione ſeſe habent, veriſimile eſt, non minus quam Geometriæ, *Muſicam*,

etiam Muſicæ oblectationem ad plures quam ad nos pertinere. Poſitis enim aliis terris atque animalibus ratione & auditu pollentibus, cur tantum his noſtris contigiſſet ea voluptas, quæ ſola ex ſono percipi poteſt? Neſcio equidem quantum apud alios valiturum ſit argumentum, quod hic ab unitate, & immutabili natura iſtarum artium petiimus, mihi non leve aut contemnendum videtur, nec multum ei cedere, quo in ſuperioribus uſus ſum, cum videndi facultatem Planetariis animalibus convenire docui.

Porro ſi tonis harmonicis & cantu delectentur, vix quoque fieri poteſt quin & inſtrumenta quædam muſica repererint; quoniam & caſu in hujuſmodi inventa incidere contingit: velut chordis valide contentis, aëris ſono, cannarum aut cicutarum ſibilo. A quibus initiis, ſicuti ad teſtudines, citharas, tibias, & organa polyplectra nos pervenimus, ita illi quoque non minus elegantia excogitare potuerint. Sed quemadmodum certi definitique licet ſint toni, cantuſque intervalla, tamen apud diverſos populos,

*Quæ tamen à noſtra diverſa eſſe poſſit.*

alium atque alium eſſe canendi morem ac normam videmus, ut olim apud Dores, Phrygas, Lydos; noſtra ætate apud Gallos, Italos, Perſas: ita fieri poteſt ut ab omnibus his longius abeat Planetariorum Harmonice, quamvis illorum auribus gratiſſima. Cur vero noſtra rudiorem opinemur nulla ratio eſt; neque etiam cur non & chromaticis ſonis, & quibuſdam Enarmoniis utantur? cum hemitonia quoque natura ſuppeditet, certiſque proportionibus definiat. Imo ne minus aſſecuti ſint hiſce in rebus quam nos, etiam plurium vocum aut chordarum concentus, artificioſaque permiſtio, & diſſonantium tonorum, & tritoni, & diapente diminutæ uſus iis fortaſſe concedendus ſit. Scio vix aliquam veriſimilitudinem apud multos hæc habitura, ac minorem etiam, ſi æque doctos dicamus in Jove aut Venere incolentes, ac ſunt ii qui in Gallia, Italiave plurimum hac arte excellunt. Et tamen fieri poteſt ut vel illis peritiores ſint, ac præcipue in parte Theoretica hujus artis ea perſpexerint, quæ apud noſtrates hoſce parum hactenus intellecta.

Digitized by Google

cta ſunt. Si enim ex noſtris Muſicis quæras, cur conſonantia diapente poſt aliam ſimilem vitioſe ponatur, dicent alii nimiam dulcedinem devitari, quæ ex gratiſſimæ conſonantiæ iteratione naſcatur: alii varietatem in harmonicis ſequendam eſſe. Hæc enim præcipui artis auctores, cumque iis Carteſius, adferunt. At Jovis aut Veneris incola forſan veriorem hanc cauſam demonſtrabit, quod à Diapentè ad aliam deinceps pergendo, tale quid fiat, ac ſi repente toni ſtatum immutemus; cum Diapente, unà cum interjecto ditoni ſono, (qui ſi deſit, mente ſuppletur) toni ſpeciem certo conſtituat: hujuſmodi vero ſubita commutatio auribus merito injucunda inconditaque judicetur; cum etiam in univerſum ea plerumque durior accidat, (præterquam in tranſitu) quæ fit à tribus ſonis conſonis, ad trium aliorum harmoniam, nullo priorum manente. Sciet etiam ille idem fortaſſe, quod nemo adhuc animadvertit noſtrorum hominum, cur in nullo vocis unius, pluriumve cantu, tonus ſervari poſſit in eadem altitudine ac tenore, niſi conſonantia intervalla pleraque ultro, ac nemine advertente, ita temperentur, ut à perfectione ſumma nonnihil deſciſcant. Et cur optimum ſit hoc temperamentum in chordarum ſyſtemate, cum ex Diapente quarta pars commatis ubique deciditur. Quod idem abſque ſenſibili diſcrimine effici ex diviſione Diapaſon in partes æquales 31, indeque Cyclum quendam Harmonicum in ſe redeuntem exiſtere, non ita pridem oſtendimus. Quod tamen Planetarum incolæ ſi perſpexerunt, etiam Logarithmorum numeri iis noti eſſe debebunt.

*Cur conſonantia diapente poſt aliam ſimilem vitioſe ponatur?*

At de Tono vocis temperando quod dixi, probationem habet non difficilem; quam hic adjungimus, quandoquidem jam aliquid præter ſomnia noſtra venditare cœpimus. Ajo itaque, ſi quis canat deinceps ſonos, quos Muſici notant Literis C, F, D, G, C, per intervalla conſona, omnino perfecta, alternis voce aſcendens deſcendenſque; jam poſteriorem hunc ſonum C, toto Commate, quod vocant, inferiorem fore C priore, unde cani cœpit.

*Demonſtratio temperamenti in tono vocis adhibendi.*

pit. Quia nempe ex rationibus intervallorum iſtorum perfectis, quæ ſunt 4 ad 3, 5 ad 6, 4 ad 3, 2 ad 3; componitur ratio 160 ad 162, hoc eſt 80 ad 81; quæ eſt Commatis. Ut proinde, ſi novies idem hic cantus repetatur, jam propemodum tono majore, cujus ratio 8 ad 9, deſcendiſſe vocem, tonoque excidiſſe oporteat. Hoc verò nequaquam patitur aurium ſenſus, ſed toni ab initio ſumpti meminit, eodemque revertitur. Itaque cogimur, occulto quodam temperamento uti, intervallaque iſta canere imperfecta; ex quo multo minor oritur offenſio. Atque hujuſmodi moderatione fere ubique cantus indiget; uti colligendis rationibus, quemadmodum hic fecimus, facile cognoſcitur. Et hæc quidem in gratiam artis illius ſtudioſorum nec Geometriæ rudium exponere placuit. Nunc eo unde diſceſſimus revertimur.

Diximus de artibus inventiſque quibuſdam quæ nobiſcum communia habere Planeticolas veriſimile ſit; præter quæ etiam alia exſtare illic neceſſe eſt, ſive ad uſus & commoda vitæ facientia ſive ad delectationem. Hæc vero quam multa ſint, quantique facienda, ita optime rationem inibimus, ſi plurima illa, quæ apud nos reperiuntur, recenſere & ob oculos ponere libuerit.

Expoſui ſupra animantium fruticumque apud nos genera quæ plurimum inter ſe figuris differrent: præter quæ, minus diſſimilium, ingens copia reperiatur: dixique nihilo pauciora utriuſque generis, ut longe diverſa, in Planetarum terris exſtare putandum. Nunc etiam illud videamus, quæ utilitas quæve commoda, tum ex animalibus, tum ex herbis arboribuſque ad nos perveniant, ac prorſus veriſimile exiſtimemus non minora ex iis, quæ illic terrarum inveniuntur, ad incolas ipſarum redundare.

*Recenſentur commoda, quæ ad nos perveniunt ex animalibus, herbis, arboribus.*

Hic vero operæpretium eſt ut quæ ſint divitiæ noſtræ inſpiciamus, quæ multæ magnæque ſunt. Nam, præterquam quod alimenta nobis arborum fructus herbæque ſuppeditent; illæ pomis, nucibus; hæ ſeminibus, foliis, radicibus; quodque plurimorum ex his in medicina uſus eſt;

pe-

petitur ex arboribus materia qua domos naveſque fabricamus. Et lino veſtes paramus, excogitatis nendi & texendi artificiis. Ex cannabe, ſpartove, fila ac funiculos torquemus; ex filis vela ac retia conficimus; ex funiculis rudentes & funes anchorarios. Florum porro odoribus coloribuſque oblectamur; & quamvis ſint etiam qui nares offendant, & noxiæ quædam herbæ inveniantur, tamen in iis ſæpe boni quid deliteſcit; vel fortaſſe hoc egit natura ut comparatione mali bona magis eminerent: quod multis in rebus ſecuta videtur. Quanta vero ex animalibus eſt utilitas? Oves lanam ad veſtitum præbent, vaccæ lac; utræque carnes ad veſcendum. Aſinis, camelis, equis, ad portandas ſarcinas utimur. His etiam ut nos vel inſcenſi vehant, vel curribus juncti pertrahant. Ubi egregium illud rotarum inventum occurrit, quod libenter Planetarum quoque habitatoribus adſcriberem, cum jam in ſocietate eos vivere & domos ædificare pene evicerim. Utrum vero etiam animalibus pro cibo utantur, an Pythagoræ ſimile dogma ſequantur, non habeo quod affirmem. Apparet quidem hoc homini datum eſſe, ut omnibus iis alatur quæ vel in terra vel in aquis naſcuntur, ſi quid nutrimenti contineant; ut herbis, pomis, lacte, ovis, melle, piſcibus, volucrum quadrupedumque plurimorum carnibus. In quo mirum ſane videri poteſt, animal illud rationis compos ita eſſe comparatum, ut cum multorum aliorum pernicie cædeque vivat. Nec tamen naturæ præſcripto contrarium hoc eſſe putandum eſt, cum placuiſſe ei videamus ut leones, lupi, aliaque rapacia, pecudes & infirmiora quælibet pabuli loco habeant: aquilæ columbas leporeſque prædentur: Piſcium permulti piſciculos ſe minores devorent. Quin & canum varia genera ad venandum nobis largita eſt, ut quæ pedibus noſtris perſequi nequiremus, illorum celeritate ac ſagacitate conſequeremur. Præter omnem vero iſtam ex viventibus herbiſque utilitatem, hanc quoque delectationem ex iis nos capere voluit rerum conditor, ut varias eorum formas na-

turaſque & generandi vias contemplaremur; in quibus infinita quædam varietas ac mirabilia multa inſunt, quæ apud naturæ ſcriptores celebrantur. Imo in ipſis inſectis quis non miratur apium cellulas hexagonas, aranearum telas; tum bombycum involucra, ex quibus incredibili induſtria delicatiſſimam veſtem conficimus, eaque copiâ ut naves totæ ea onerentur. Atque hæc quidem de herbarum animantiumque genere, quatenus homini proſunt, ſummatim retuliſſe ſufficiat.

*Ex Metallis,* Cogitetur jam porro quanta ſit ejus ſolertia in reperiendis, effodiendis, explorandis metallis; itemque in fundendis, repurgandis, miſcendis. Quanta in tenuandis auri laminis, aut hydrargyro reſolvendis, ut parvo impendio, quæcunque voluerimus, auri ſplendorem coloremque induant. Quam mira ac multiplex ſit ferri utilitas; quam quæ ignorarunt nationes, eæ omnium ferè mechanicarum artium rudes vixerunt, proque armis, tantum arcus, clavas, ſudeſque habuerunt. Nos vero & pulverem ex ſulphure & nitro miſtum habemus, varioſque ejus uſus, qui an plus juvet an noceat merito dubitari poteſt. Videbatur enim mira ejus vi, ſimulque artificioſa muniendorum oppidorum arte, certius præſidium inventum eſſe, quam priſcis temporibus fuerit, adverſus hoſtiles impetus: ſed & horum ex eo ſimul violentiam creviſſe videmus, & fortitudini viribuſque in præliis multo minus nunc locum eſſe quam tunc fuerit. Quod enim olim Imperator Græcus dixiſſe fertur, *Periiſſe Virtutem* cum Catapultarum, ac Baliſtarum inventa exorirentur, idem nunc majori jure queri poſſumus; ac maxime Bombis, quos vocant, repertis; quos non mœnibus, nec ſitu oppida arceſve repellere poſſunt, ſed quamvis validæ disjiciuntur, ac ſolo æquantur. Ut, vel ob hoc unum, melius homines ejus pulveris invento carituros fuiſſe dicendum ſit. Nec tamen propterea prætereundum fuit in commemorandis noſtræ Telluris repertis, cum veriſimile ſit, etiam in cæteris Planetis, noxia artificia quædam cum bonis emerſiſſe.

An-

Auſpicatior eſt aquæ & aëris apud nos uſus: quo & na- *Ex aqua, &*
vigandi ratio conſtat, & vires comparantur, quibus, nullo *aëre, variiſ-*
labore noſtro, molas machinaſque verſemus. At hæ quam *que artifi-*
multiplices; quamque ad varias res adhibentur? Nam & fru- *ciis,*
menta iis comminuimus, & olea exprimimus, & ligna ſeca-
mus, & pannos tundendo denſamus, & chartis materiam
conterimus; quarum aliàs quoque pulcherrimum eſt inven-
tum, cum ex viliſſimis linteorum ſcrutis, tam pulchra folio-
rum candidiſſimorum copia paretur. His addatur jam præ-
clarum illud typographiæ inventum, cujus opera artes omnes
reliquæ, non ſervantur tantum, ſed & comparantur multo
quam ante facilius. Item ſculpendi pingendique peritia, a
parvis rudibuſque initiis eo progreſſa, ut nihil elegantius ab
hominum ingenio profectum eſſe videatur. Ponatur & vi-
tri excoquendi ſcientia, atque in tot formas ducendi facili-
tas. Tum ſpeculorum vitreorum politura, hydrargyrique
ſuper ea inductio. Ac præcipue quoque vitri uſus mirabi-
lis, in pervidenda rerum natura, poſt teleſcopii microſco-
piique inventa. Recenſeantur etiam horologiorum auto-
matôn fabricæ; aliorum tam exilium, ut geſtanti nihil in-
commodent; aliorum tam exquiſita æqualitate tempus me-
tientium, ut nihil ſupra optari poſſit, quibus utriſque inven-
ta noſtra plurimum profuere.

Multa addere poſſem de multiplici doctrina & rerum na- *Ex iis, quæ*
turæ cognitione quam præter Geometriæ Aſtronomiæque *noſtra ætate*
ſcientias conſecuti ſumus, atque ea pleraque noſtra ætate: *inventa ſunt.*
velut de gravitate aëris ac vi qua compreſſus reſilit. De ſin-
gularibus Chymicorum experimentis; è quibus liquores in-
flammabiles, nuperque ultro lucentes, ac levi tractatione ar-
dentes, prodierunt. De ſanguinis circuitu per arterias ve-
naſque, qui antea intelligebatur, nuper vero & oculis uſur-
pari cœpit, adhibito microſcopio, in piſcium quorundam
caudis extremis. Item de generatione animalium, quod in-
ventum eſt nulla niſi ex ſimilium ſemine naſci; idque de her-
bis quoque verum eſſe. Quodque in ſemine marium repe-
riuntur animalculorum myriades vivaciſſimorum, quæ ipſam
ani-

Digitized by Google

animantium ſobolem eſſe veriſimillimum ſit: res mirabilis, atque ab omni ævo incognita.

*Illa omnia veriſimiliter non extare in Planetis, ſed aliis æque dignis rependi.*

Jam vero poſtquam hæc omnia accumulavimus Telluris incolarum inventa, putemus fieri quidem poſſe, ut quædam eorum etiam apud Planetarios extent; credibile tamen eſſe maximam partem eorum illis ignorari. At iis quæ non habent rependendis æque multa, pulchraque & utilia, admiratione digna iis tributa eſſe oportet. Quanquam igitur ibi terrarum aliquos ratione præditos, & Geometras, & Muſicos reperiri probabilibus argumentis oſtenderimus, & in ſocietate communitateque viventes, & manibus pedibuſque inſtructos, tectiſque & mœnibus munitos: non tamen dubitandum eſt, quin & formæ, & rerum quas agunt novitate, mirabile ſupra quam dici poſſit futurum ſit ſpectaculum, ſi quis Mercurius, aut potens Genius eò nos deducat. Sed cum ejus itineris conficiendi ſpes omnis adempta ſit, id unum tamen, quod poſſumus inveſtigare non pigebit; qualis nempe cæleſtium rerum facies ſeſe offerat, in unoquoque iſtorum globorum vitam agentibus, cum ad eam hoc quoque pertineat. Simul vero & de præſtantia cujuſque, tum ob magnitudinem, tum ob adjunctum comitum lunarum numerum, quædam ſcitu digna referemus, ac ſtellarum denique inerrantium incredibilem diſtantiam nova ratione indagabimus. Sed à longa attentaque meditatione requieſcemus hic paulum, finemque huic Libro imponemus.

CHRI-

Digitized by Google

# CHRISTIANI HUGENII
# COSMOTHEOROS,

SIVE

De Terris Cœleſtibus, earumque ornatu, Conjecturæ.

AD

## CONSTANTINUM HUGENIUM,

Fratrem.

## LIBER II.

CUm ante annos complures Librum Athanaſii Kircheri, qui *Iter Ecſtaticum* inſcribitur, evolverem; in quo de Natura Siderum, rebuſque in Planetarum ſuperficie extantibus, diſſeritur; mirabar nihil illic adferri eorum quæ mihi jam ab illo tempore circa hæc, tanquam valde probabilia, occurrebant: ſed longè alia tradi, inania pleraque, & à ratione aliena. Quod magis etiam intellexi, cum conſcriptis ſuperioribus idem opus denuo percurrerem. Jamque viſum eſt aliquid eſſe conjecturas noſtras, ac ponderis nonnihil iis accedere, ſi cum Kircherianis conferantur. Quod ut judicari poſſit, utque appareat quàm de his rebus fruſtra philoſophari conentur, qui fundamenta unica veriſimilitudinis, quibus uſi ſumus, rejiciunt; non abs re erit de opere illo quædam annotaſſe.

Is igitur Vir optimus, Genio quodam duce, per cæli ſpa- *Kircheri iter extaticum examinatur.*

ſpatia, ſtellaſque ſe circumferri fingens, partim ea quæ ex Aſtronomorum ſcriptis hauſerat, partim quæ ipſe de Planetarum terris meditatus erat, ac vulgo probari poſſe putabat, quaſi viſa enarrat. Antequam verò iter longinquum ingrediatur, hæc duo tanquam certo tenenda ſtatuit ſancitque; nullum videlicet Telluri motum eſſe tribuendum; tum nihil in Planetarum globis Deum extare voluiſſe, quod vita aut ſenſu præditum ſit, adeoque nec herbas quidem. Itaque, relicto Copernici ſyſtemate, Tychonicum ſibi quod ſequatur deligit. Sed cum ſtellas inerrantes pro totidem Solibus habeat, iiſque ſingulis ſuos Planetas circumponat; hoc ipſo (quod an ſenſerit neſcio) infinita numero jam exoriuntur ei Copernicea ſyſtemata. Quæ quidem perabſurdè, præter ſibi proprios motus, univerſa circum Tellurem noſtram, viginti quatuor horis, immani celeritate converti facit. Cumque horum maximam partem fateatur extra hominum conſpectum eſſe remotam, in hoc quoque incidit incommodum, ut fruſtra tot Soles lucere dicendi ſint, fruſtraque calorem ſuum impertiri tot globis Telluri ſimilibus, elementaque eadem, (ita enim vult) & cætera omnia habentibus, præter ſtirpes & animalia. Atque hinc porro ad alia magis abſona delabitur. Nam quia ne Planetarum quidem, qui noſtro ſyſtemate continentur, alium ullum reperit uſum, ad diu exploſas Aſtrologorum ineptias ſe convertit; & hoc fine tot tantaſque corporum moles conditas eſſe vult, ut influxu eorum vario, certiſque legibus temperato, mundi univerſitas conſervetur, incolumiſque perduret: utque præterea in hominum animos iidem influxus vires ſuas exerceant. Itaque, in Aſtrologicæ artis gratiam, in Veneris Planeta jucundam pulchramque rerum faciem ſibi oblatam narrat; cum luce blanda, undis dulciter fluctuantibus, odoribus ſuaviſſimis, atque undique fulgentibus cryſtallis. In Jove auras ſalubres, ac ſuaveolentes, aquas limpidiſſimas, terras argentei ſplendoris. Quò nimirum, ab influxu hujus utriuſque ſideris, fauſta ac ſalutaria omnia in Terram hominesque deriventur; ut vel pulchros & amabiles, vel ad prudentiam & gravitatem

tem

Digitized by Google

tem propenſos reddat. In Mercurio neſcio quid ſerenum vividumque, unde ingenium ac ſolertia naſcentibus inſinuetur. At in Marte omnia tetra, exitialia, fætida, piceas flammas, fumoſque ſe vidiſſe memorat. In Saturno triſtia, horrenda, ſquallida, caliginoſa; ut ex his Planetis, (neſcio quare Apoteleſmaticis omnibus inviſis) influxus maligni infeſtique mundo ac mortalibus eveniant; niſi tamen benigniorum illorum radiis corrigi ac mitigari eos contingat. Hæc nempe & his ſimilia Genio illi cæleſti comes adhærens diſcit. Quem & ſerio reſpondere facit cum interrogatur, anne aquis, quæ in Veneris Planeta fluunt, Hebræus aut Paganus quiſpiam, eo delatus, ritè baptizari queat. Eodem quoque docente Magiſtro, intelligit cælum ſtelliferum non eſſe ex materia ſolida conflatum, ſed liquidum prorſus, in quo ſtellæ Soleſvé innumeri longè latéque ſpargantur; nuſquam alligati, (& hactenus rectè) quique omnes diei ſpatio vaſtiſſimos, ut dixi, circuitus peragant. Quo in motu, ſi talis foret, non advertit quanta vi illi undique diffugituri ſint, ob motum circularem tam immenſæ celeritatis. Sed ne ſic avolent, inque ſpatia infinita recedant, Intelligentiæ motrices, credo, impedient. Etenim unicuique ſtellæ fixæ, imo & Planetæ, Intelligentias aut Angelos ſuos adjungit, qui impellant eos, curſumque moderentur. In quo Doctorum quorundam turbam ſequitur, qui vaniſſimum Ariſtotelis commentum inconſideratè, invitaque ratione, adoptarunt. Iſtos verò beatos Genios labore tanto Copernicus liberat, ſolius Terræ inducto motu; cujus ſanè neceſſitatem, vel ex hoc uno, omnes vident, niſi qui ultrò, ac volentes, cæcutiunt. Equidem cogitavi nonnunquam, meliora à Kirchero exſpectari potuiſſe, ſi, quæ ſentiebat, liberè exponere auſus fuiſſet. Sed cum hoc non auderet, neſcio cur non in totum illo argumento abſtinere maluerit. Sed hunc celeberrimum ſcriptorem jam omittamus: &, quandoquidem nil veriti ſumus, conjecturis noſtris, ſpectatores in Planetis ponere, adeamus nunc, uti propoſitum fuerat,



Digitized by Google

ſingulos; & quinam ſint anni eorum, qui dies, quæ denique Aſtronomia, deinceps conſideremus.

*Apparens qualis ſit conſtitutio Solis & Planetarum in Mercurio.*

Itaque, ut ab intimo, & Soli viciniore incipiam, ſcimus Mercurium triplo propius circiter quam Tellurem noſtram ad ingens illud ſidus accedere. Cui conſequens eſt ut triplo quoque majus id conſpiciant ejus incolæ, ratione diametri, lumen vero & calorem ejus ſentiant noncuplo quam nos majorem. Nobis proinde intolerabilem, quique accenſurus ſit ſiccatas herbas, fœnum ſtramenque, qualia apud nos creſcunt. At nihil impedit ita comparata eſſe, quæ ibi vivunt animantia, ut optatam temperiem in ardore illo experiantur. Herbas vero eſſe ea natura, ut multo magis vim caloris perferant. Nec mirum eſſet iſtos Mercurii indigenas putare non ferendo frigore nos urgeri, luceque frui exigua, qui tanto longius a Sole abſimus. Sicut nos de Saturni colonis facile nobis perſuademus. Non deeſt verò dubitandi ratio, cum à calore vita pendeat, iſque corpori mentique vigorem alacritatemque præſtet; an non, propter Solis viciniam, Hermopolitæ illi nobis ingenio præſtare putandi ſint? Sed quo minus huic cauſæ tribuam facit, quod calidiſſimas terræ noſtræ regiones ſortitos, Africæ, Braſiliæque populos, nec ſapientia nec induſtria æquare videmus temperatiorum tractuum incolas; ut vel ex eo perſpicitur, quod in omnium ſcientiarum ac fere artium ignoratione verſentur: cum nec nauticæ rei, qui circum littora incolunt, niſi perexiguam notitiam habeant. Nollem quoque Jovicolis, Saturnicoliſque hebetes, plumbeaſque mentes, intelligentiamve tribuere noſtra minorem, propterea quod tanto longius a Sole remoti vivunt; cum uterque globus iſte tam præſtanti ſit magnitudine, tantoque comitatu ſtipatus feratur. Qualis porro ſit Mercurialibus Aſtronomia, utque cæteros Planetas certis temporibus Soli oppoſitos ſpectent, ex figura ſyſtematis, priore libro expoſita, perfacile eſt intelligere. Atque his oppoſitionum temporibus Venerem ac Tellurem præcipuo ſplendore illic effulgere neceſſe eſt. Nam cum adeo

Digitized by Google

adeo lucida nobis Venus appareat, quo tempore tenuem naſcentis Lunæ faciem refert; oportet eam ſextuplo aut amplius clariorem cerni, cum Soli opponitur, ex Mercurii Globo pleno orbe ſpectatam, & minore quoque intervallo diſtantem: atque ita tunc non parum diſpellere nocturnas tenebras gentibus iſtis, Lunæ auxilio carentibus. Quænam ſint denique apud eos dierum ſpatia, & an varias anni tempeſtates experiantur, incompertum eſt hactenus, quod ignoretur an axem diurnæ converſionis ad orbem, quo circa Solem defertur, obliquum habeat, & quanto tempore converſio ea peragatur. Neque enim dubitari debet de diebus noctibuſque eorum cum in Tellure, Marte, Jove ac Saturno hæc viciſſitudo certò cognoſcatur. Anni vero ſpatium vix quartam partem noſtri æquare illic conſtat.

In Veneris globo poſitis, eadem fere in cælo apparere neceſſe eſt quæ de Mercurio diximus, niſi quod hunc nunquam videt Soli oppoſitum, cum non niſi 38 circiter gradibus ab eo recedat. Sol vero illis major apparet quam nobis, diametro ſeſcupla, orbe plus quam duplo; quo & bis tantum caloris luciſque præbere cum oportet. Itaque propius ad noſtræ temperiem Tellus iſta accedit. At annus menſibus noſtris ſeptem cum dimidio fere finitur. Noctu verò globus hic noſter, in locis Soli oppoſitis, multo lucidior Veneri apparere debet quàm unquam nobis appareat Venus; ac tunc Lunam quoque, perpetuum comitem noſtrum, facile conſpiciunt, ſi modo oculos habent noſtris non imbecilliores. Sæpe autem in Venere miratus ſum, cum tubis longioribus, pedum 45, aut 60, eam inſpicerem Terræ propinquam; Lunæque ſemiplenæ ſimilem, aut jam in cornua curvari incipienti; prorſus æquabili ſplendore ſuperficiem ejus perfundi: ut vix dicere audeam, aliquid maculæ ſimile, in ea me animadvertiſſe; cujuſmodi in Jove & Marte manifeſtè notantur, licet orbe multo minore ſeſe offerentibus. Si enim maria ac terras habet Veneris globus, obſcuriores nobis maris tractus conſpici deberent; terrarum vero clariores; ſicuti ex prææltis rupibus inſpectum deſuper mare, *Qualis in Venere.*

re, non perinde, ac adjacentes terræ, lucidum apparet. Credebam nimium Veneris fulgorem in cauſa eſſe, quo minus diverſitas lucis animadverti poſſet. Sed cum fumo infeciſſem vitrum oculo proximum, ad auferendam partem radiorum, nihilo minus æqualis in tota ſuperficie lux viſa eſt. An igitur nulla ibi maria, an Solis lucem magis quam apud nos aquæ, aut minus terræ repercutiunt? an potius, (quod credibilius mihi videtur) denſior ibi, quam in Jove aut Marte, Vaporum regio à Sole illuſtrata, Veneriſque globum circundans, omnem fere illam quam videmus lucem ad nos remittit, vixque ſubjectorum ſibi marium terrarumque diſcrimen percipi ſinit? Nam certum eſt noſtram quoque atmoſphæram, ſi Tellurem procul intueri daretur, plurimum obſtituram luce ſua, quo minus terræ mariſque tam diverſa claritas apparere poſſet, quam quæ cernitur ex edito ſcopulo deſpicienti. Eadem ratione qua Lunæ quoque maculas interdiu minus aperte quam noctu animadverti ſinunt vapores iidem; quoniam tunc quoque inter illam oculoſque noſtros interpoſiti, Soliſque luce illuſtres, viſui officiunt: noctu non item.

*In Marte.* At in Marte reliquis diſci partibus obſcuriores, ut jam dixi, maculæ notantur. Ex quarum recurſibus pridem fuit obſervatum dies nocteſque illic iiſdem fere quibus apud nos intervallis reverti. Hyemem vero æſtatemque exiguo diſcrimine incolæ ſentiunt, eo quod axis diurnæ converſionis paulum duntaxat ad orbitam Planetæ inclinatur, ut ex motu macularum intellectum eſt. Qui autem ex globo illo Tellurem noſtram intuentur, eodem modo fere, ac Venus nobis, apparere iis debet, formaſque lunaribus ſimiles oſtendere, ſi teleſcopio ſpectetur; nec ultra gradus 48 à Sole evagari; in cujus diſco etiam conſpici quandoque poſſit, uti & Veneris Mercuriique corpuſcula. Et hoc quidem nunquam aliàs; Venus raro iis apparere debet, uti nobis Mercurius. Terræ vero ſolum in Marte nigriore materia conſtare veriſimile eſt, quàm in Jove, aut etiam Luna noſtra; eoque fieri ut rubicundior Mars ſpectetur, nec, pro ratione intervalli

quo

quo à Sole abeſt, lucem remittat. Minor verò eſt globus ejus quam ſtellæ Veneris, licet à Sole longius diſtans, ut jam ſupra animadvertimus. Nec Lunam habet ullam comitem; atque in eo Telluri noſtræ, quemadmodum & Venus & Mercurius, dignitate impar videtur. Lux vero Solis, calorque, Marticolis duplo atque interdum triplo quam nobis minor ſentitur; nullo tamen, ut credimus, ipſorum incommodo.

*Jovem & Saturnum reliquis Planetis longe præſtare, tam magnitudine, quam Lunarum multitudine.*

Quod ſi Tellus hæc, propter adjunctam ei Lunam, præſtare cæteris Planetis, quos huc uſque percurri, dicenda eſt; nam magnitudine nec cedit iis multum, nec ſuperat; quantopere & his tribus, & Telluri ipſi, anteponenda erunt ſidera Jovis & Saturni. In quibus ſive globorum molem conſideremus longiſſimè omnium iſtorum corpuſcula excedentem; ſive Lunarum quibus ambiuntur multitudinem, prorſus veriſimile ſit has duas primarias habendas eſſe Tellures, inter eas quæ circa Solem ſunt: præ quibus reliquæ quatuor ſint minimum quiddpiam, ac nequaquam cum iis comparandæ. Quanta enim ſit differentia, quò rectius animo concipiatur, ſubjicere hic placuit, ſecundum proportiones veras, aut non multum à veris abeuntes, tum Tellurem noſtram, cum circumjecta Lunæ orbita, ipſoque in ea Lunæ globulo; tum Jovis ac Saturni ſyſtemata: Illud quaternis, hoc quinis Lunis exornatum; quarum quæque in ſua itidem orbita ponuntur. Joviales Galilæo deberi notum eſt; quæ quanto animi gaudio primum illi animadverſæ ſint, facile quivis ſecum reputet. Saturniarum una nobis obtigit, quæ cæteris clarior eſt, & ab extrema proxima. Quam Anno 1655 teleſcopio noſtro non ultra duodecim pedes longo, primi deprehendimus. Reliquæ diligentiſſimis Dominici Caſſini obſervationibus patuerunt, vitreis orbibus utenti à Joſ. Campano expolitis, primùm 36 pedum; deinde totidem ſupra centenos. Tertiam enim quintamque vidimus Anno 1672, ipſo monſtrante Caſſino, & poſtea ſæpius. Primam, cum ſecunda, ſibi repertas ſignificavit, miſſis literis, Anno 1684. Hæ vero difficillimè cernuntur, certoque affirmare nequeo mihi conſpectas ha-

TAB. LIII.

Digitized by Google

hactenus. Nec propterea quidquam vereor Clariſſimo Viro fidem habere, atque has quoque Saturno ſocias adſcribere. Imo præter harum numerum alias quoque, vel unam vel plures, latere ſuſpicari licet; nec deeſt ratio. Cum enim, inter extremas duas, ſpatium amplius pateat quàm pro diſtantiis cæterarum; poſſet hoc inſidere ſextus ſatelles: vel etiam, ultra quintum, alii circumvagari, qui propter obſcuritatem nondum ſint viſi: cum ille ipſe quintus, tantùm in orbitæ ſuæ parte quæ ad occidentem ſpectat, cernatur, in reliqua nunquam appareat; cujus rei cauſam ſatis intellectu facilem poſtea adferemus.

Fortaſſe autem, ubi ad ſigna Borea Saturnus revertetur, altéque ſupra horizontem attolletur, (nam, quo tempore hæc ſcribimus, maximè deprimitur) aliquid circa hæc novi obſervare continget, ſi quis tuas tunc lentes, Frater optime, ad Teleſcopia pedum 170. & 210. paratas, ſideribus applicet: quibus majores, formæque perfectioris, nullas hactenus extare arbitror. Quanquam enim cælo nondum eas admovimus, vel propter moliendi difficultatem, vel quod diſceſſus tuus ſtudia hæc noſtra conatuſque interrupit: omni tamen vitio eas carere certi ſumus, poſt experimenta illa faciliora, quæ in ambulacris ſuburbanis ſub noctem inſtituebamus; inſpectis procul literis, quibus appoſitum erat lumen. Quorum equidem lubens reminiſcor, ſimulque jucundi laboris noſtri, quem, in elaborandis expoliendiſque vitreis hujuſmodi diſcis, impendere unà ſolebamus; excogitatis novis artificiis machiniſque, ſemperque ulteriora agitantes. Sed redeo ad diagrammata ante deſcripta, de quibus aliqua dicenda ſupererant.

*Proportio diametrorum tum Jovis, tum orbitarum ſatellitum ejus, ad orbitam Lunæ circa Terram.*

Feci in iis Jovialis globi diametrum duarum circiter tertiarum ejus diſtantiæ quæ inter nos noſtramque Lunam interjacet; quandoquidem plus quàm vicies diametrum Terræ diameter Jovis continet; Luna autem diſtat à Terra diametris hujus triginta. Orbitam vero comitis Jovis extremi ad noſtræ Lunæ orbitam poſui ſicut $8\frac{1}{2}$ ad 1, quoniam ejuſmodi inter eas proportio re ipſa reperitur. Et hi quidem comites,

tes, ſive Lunæ ſingulæ, non videntur Tellure noſtra minores eſſe, ut ex umbris earum in Jovis diſco ſæpe obſervatis, probari poteſt. Sunt autem (ut hoc quoque addamus) periodorum tempora ſub Ecliptica, apud Caſſinum, intimi Jovialium dies 1, horæ 18, 28′, 36″. Secundi dies 3, horæ 13. 13′. 52″. Tertii dies 7. horæ 3. 59′. 40″. Quarti dies 16, horæ 18. 5′. 6″. Diſtantiæ à centro Jovis, comitis intimi $2\frac{1}{6}$. Jovis diametrorum. Secundi $4\frac{1}{2}$. Tertii $7\frac{1}{6}$. Quarti $12\frac{2}{3}$. In Saturniis periodica tempora, intimi, dies 1, horæ 21, 18′, 31″. Secundi dies 2, horæ 17, 41′, 27″. Tertii dies 4, horæ 13. 47′, 16″. Quarti dies 15, horæ 22, 41′, 11″. Quinti dies 79, horæ 7, 53′. 57″. Diſtantiæ à centro Saturni, diametris Annuli dimenſæ, Comitis intimi, $\frac{19}{20}$. Secundi $1\frac{1}{4}$. Tertii $1\frac{3}{4}$. Quarti 4, quæ mihi erat $3\frac{1}{2}$. Quinti 12, omnia magnis laboribus vigiliiſque reperta.

*Tempora periodorum comitum Jovialium.*

Ecquis jam ſyſtemata hæc inſpiciens, atque inter ſe conferens, non ſtupet ad magnitudinem, ingentemque paratum duorum præ exiguo tenuique Telluris noſtræ? aut cui nunc in mentem venire poteſt in hac una Solem ambientium, omnem ornatum, omnia animalia, omnes qui cœleſtia mirentur inveniri; in illis vero nihil impoſuiſſe rerum conditorem; nec alio fine tam vaſtas corporum moles creaſſe, quam ut lucem eorum nos homunculi intueremur, curſumque forſitan inquireremus?

Credo equidem futuros qui falſa aut incerta eſſe dicant, quæ de magnitudine cœleſtium ſpatiorum nobis hic ſumuntur. Scio enim quam difficulter quiſquam adducatur, qui orbis Terrarum ſpatia mirari aſſueverit, inque eo tot populos, urbes, imperia; ut alibi exſtare credat quorum collatione hoc totum tam ſit exiguum quam hæ figuræ demonſtrant. Atqui ex ſummorum hujus ætatis Aſtronomorum ſcriptis ea hauſimus, ex quibus iſtæ ſyſtematum inter ſe rationes conſequantur. Si enim Terra à Sole decem vel undecim mille diametris ſuis diſtat, ut Caſſinus in Gallia, apud Anglos Flamſtedius colligunt, parallaxium in Marte ſubtiliſſimis obſervationibus uſi; cum nos quoque probabili conjectura,

*De hac proportione magnitudinis conſtare ex recentiorum obſervationibus.*

duodecim mille diametros invenerimus; erunt & iſtæ orbium magnitudines inter ſe ferè quales hic deſcripſimus.

*Quinam ſit Solis apparens magnitudo & lux in Jove, & quî cognoſci queat.*

Sed de Jove dicere pergamus, ex quo Sol ſpectatus diametrum quintuplo quam apud nos minorem habet; ut proinde lucis caloriſque illic pars tantum vigeſima quinta ſentiri poſſit. Sed ea lux nequaquam debilis putanda eſt, idque oſtendit inſignis Jovis per noctem claritas. Tum quod in Solis Eclipſibus quæ nobis contingunt, etiamſi nec vigeſima quinta pars diſci ejus ſuperſit, ut me videre memini, non admodum ſentiatur obſcuratio. Si vero experimento inquirere libeat quanta ſit illa in Jove Solis lux, ſumatur tubus certæ longitudinis, iſque parte altera obturetur, impoſitâ lamellâ in cujus medio foramen ſit rotundum, ea latitudine quæ ad tubi longitudinem ſe habeat ut ſubtenſa 6 ſcrupulorum primorum ad radium, hoc eſt fere ut 1 ad 570. Deinde ad Solem tubus obvertatur, radiique ejus per foramen ingreſſi excipiantur parte oppoſita, in chartæ candidæ folium; nec aliunde eo lux incidere poſſit. Hi radii imaginem Solis circulo referent, cujus claritas erit eadem quæ ſerenis diebus percipitur à Jovis incolis. Remotâ autem chartâ, ſi eodem loco oculus ponatur, videbit hic Solem ea magnitudine ac ſplendore, qui in Jovis globo conſiſtenti appareret.

*Itidem in Saturno.*

Quod ſi in eodem tubo foramen duplo anguſtiori diametro ſtatuatur, incidet in chartam, aut in oculum, lux ejuſmodi qualis ad Saturnicolas pervenit. Quæ cum centeſima tantum pars ſit noſtræ quam a Sole accipimus, tamen per tenebras noctis Saturnum ſatis lucidum nobis oſtendit. In utroque vero Planetarum iſtorum, ſi nubilos quandoque dies habent; malignam tunc lucem eſſe oportet, ſi noſtris oculis judicanda ſit; at illorum habitatoribus talem haud dubiè, ut nihil de tenuitate ejus querantur. Sicut in noctuis, veſpertilionibuſque utilior gratiorque eſt crepuſculi lux, aut quæ in ipſa nocte relinquitur, quam quæ diei tempore aërem terramque illuſtrat.

*In Jove dies eſſe horarum quinque.*

In Jove porro dierum ſpatia, quinque tantum horas noſtrates æquare, ac noctes tantundem, admiratione non caret,

Digitized by Google

ret, propter tantam illius globi præ noſtro magnitudinem. Et ex hoc nimirum intelligitur naturam haudquaquam ea in re ſervaſſe rationem quæ eſt ſecundum globorum molem, aut eorum diſtantiam à Sole; cum etiam in Marte dies ſint fere noſtris pares. At in annorum longitudine, hoc eſt, tempore circuitus circa Solem, certam omnino diſtantiarum, quibus ab illo Planetæ abſunt, rationem habuit. Sunt enim ut harum cubi, ita quadrata temporum periodicorum, ut primus advertit Keplerus. Idque in comitibus Jovis & Saturni eodem modo ſe habere inventum eſt. Cum itaque anni & dierum tempora in Jove à noſtris multum diverſa ſunt, tum dies hoc nomine etiam differunt, quod eadem ſemper ſint longitudine. Perpetuo enim illic fruuntur æquinoctio, quoniam axem motus diurni Jupiter rectum ferme habet ad planum itineris ſui circa Solem, nec ut Tellus obliquum; ut teleſcopiorum obſervationibus conſtat. Frigidiores autem & ibi ſunt regiones quæ polis viciniores propter radiorum Solis obliquitatem; at longas noctes non patiuntur, ſicut quæ ſunt prope polos Terræ; ſed tenebras luceſque habent, ut dixi, horarum quinque, ubique & ſemper. Ac nobis quidem haud ſanè placeret tanta dierum brevitas, meliuſque nobiſcum agi putamus quod plus quam duplo longioribus utimur. Nulla tamen ratione, niſi quoniam potiora ducere ſolemus ea quibus aſſuevimus.

*Et perpetuum æquinoctium.*

Planetarum unum Saturnum ex Jove vident; cum cæteri nimium Soli vicini ſint; ipſeque Mars ab eo non ultra 18 gr. digrediatur. Ex quaternis vero quas habent Lunis, quin multò plus commodi capiant, quàm nos ex unica noſtra, negare non poſſumus, vel eo ſolo quod perrarò illunes noctes experiantur. Si verò & maria ſua navigant, de quo ſupra dictum fuit, egregiè curſus regere earum auxilio poſſunt. Ut præteream ſpectaculi jucunditatem ex variis earum conjunctionibus, Eclipſibuſque, quas quotidie intuentur.

Eadem porrò commoda ac ſpectacula, imò etiam majora, Saturnicolis evenire neceſſe eſt, cum ob quinque Lunarum numerum, tum ob mirabiles Annuli aſpectus, nocte dieque

iis obverſantes. Sed totam eorum Aſtronomiam, ſicut in cæteris fecimus Planetis, exponere oportet.

*Planeticolis ſtellas fixas eodem modo apparere, ac nobis.*

Atque hic primum illud annotabimus, quod de omnibus dici poterat, ſed hic magis mirandum eſt, ſtellas inerrantes è Saturno iiſdem planè figuris, eademque luminis diverſitate diſtinctas, atque apud nos ſpectari: idque ob immanem earum diſtantiam, de qua poſtea dicetur. Ad quam nempe illa, quam viginti quinque annis globus à tormento emiſſus pervaderet, perexigua cenſenda ſit.

Eadem igitur ſigna Orionis, Urſæ, Leonis, & reliqua, Aſtronomi illic contemplantur; at non circum eoſdem polos ac nobis ſeſe convertentia, ſed qui unicuique Planetæ diverſas cœli partes obtineant.

*Qualis ſit Planetarum aſpectus, dierum ratio in Saturno.*

Sicut autem Jovis incolis ſolus Saturnus è primariis Planetis cernitur, ita Saturnicolis ſolus ſpectatur Jupiter; qui idem illis eſt quod nobis Venus, nec niſi 37 circiter grad. à Sole recedit. Quantam verò habeant dierum longitudinem, certò cognoſci nequit. Sed, ex comitis intimi diſtantia ac periodo, exque eorum comparatione cum intimo Jovialium, veriſimile fit non longiores eſſe dies illas quam ſint in Jove; quas decem horarum eſſe diximus, aut paulo minus. Sed, cum hæ æqualiter in lucem ac tenebras dividantur, Saturnicolæ inſignem inæqualitatem atque etiam majorem quam nos perpetiuntur, majuſque etiam æſtatis & hyemis diſcrimen; propter inclinationem axis globi Saturnii ad planum orbitæ ſuæ, quæ eſt partium 31; cum noſter Terræ axis tantum 23 & dimidiæ obliquitatem habeat. Hæc eadem declinatio in Saturno, Lunas ejus longe evagari facit à Solis via, vel quam pro hac illi habent: atque etiam cauſa eſt, cur nunquam Lunas ſuas pleno orbe lucentes conſpiciant, niſi æquinoctiorum tempore; quæ triginta annis noſtris bis ibi contingunt. Idem denique axis poſitus phænomena varia, ac mirabilia, Planetæ ejus incolis præbet; quæ ut intelligi poſſint, totius Saturni cum Annulo figuram hic rurſus deſcribemus: in qua, ſicut jam olim definivimus, cum mirum hunc fornicem è tenebris primùm erueremus, inter diame-

tros,

tros annuli globique ea erit ratio, quæ 9 ad 4. Vacuumque ſpatium inter utrumque interjectum, eandem quam annulus latitudinem habebit. Craſſitudinem autem hujus exiguam eſſe, obſervationes comprobant, quæ tamen ratione diametri, non nimia erit, etiamſi ſexcenta milliaria Germanica efficere putetur.

Sit igitur ſecundum hæc Saturni globus cujus poli A, B. Annuli diameter G N, obliquè inſpecti, ita ut Ellipſin anguſtiorem circunferentia ſua referat. Sunt igitur circa polos utroſque portiones ſuperficiei, arcubus C A D, E B F, 54 partium, definitæ, quas qui incolunt (niſi frigus forſan inhabitabiles reddit) nunquam Annulum conſpicere poſſint. Ex reliqua omni ſuperficie vident eum annis continuis quatuordecim, menſibus novem: quod eſt ipſis anni ſpatium dimidium. Altero dimidio abſconditur. Quocirca qui habitant in zona ampliſſima inter circulum polarem C D, & T V, æquatori annuloque ſubjacentem, quandiu ſuperficiem annuli ipſis obverſam Sol illuminat, vident media nocte portionem ejus K G L, arcus lucidi forma, qui utrimque ab horizonte exurgit, ſed medius interrumpitur umbra globi Saturnii partem G H tegente plerumque ad extremum uſque marginem. Poſt mediam verò noctem umbra eadem paulatim in partem dextram movetur, ſpectatori in hemiſphærio boreo agenti; in ſiniſtram verò, ſi in oppoſito verſetur. Evaneſcitque matutino tempore, manente tamen arcus ſpecie, quem tota die cernere poſſint, ſed tenuius lucentem quam nobis Luna noſtra interdiu conſpicitur. Siquidem ſua illis eſt atmoſphæra, ſive aër a Sole ſplendeſcens, ut probabile eſſe ſuperius oſtendimus. Nam ſi nihil tale haberent, non aliter interdiu quam noctu & annulum & Lunas ſuas, ſtellaſque inerrantes lucere viderent. Annuli porro ſpectaculum, hôc quoque pulchriùs eſſe oportet, quod eum in ſeſe converti, ex maculis quibuſdam, aut inæquali ſplendore animadvertunt. Neque enim ex tanta propinquitate hoc notari non poteſt, cum vel è Tellure noſtra inæqualis claritas, in ſuperficie annuli, appareat; quæ limbo exteriore, quàm

TAB. LIV. fig. 2.

*Qualis ſit Annuli aſpectus in Saturno.*

interiore, minor eſt. Simul autem, dum globi umbra in Annuli partem G H projicitur, etiam annuli umbra obſcurat globi partem circa P F, quæ alioqui Solis luce frueretur. Ut proinde ſemper Zona quædam ſit P Y E F, nunc latior, nunc anguſtior, cujus incolæ multo tempore conſpectu Solis, annulique ſimul, priventur; qui tunc quoque ſtellarum partem aliquam illis aufert. Quod certè miraculi inſtar videri neceſſe eſt; intercepto Sole, in profundam noctem incidentibus; nec quid eam efficiat videntibus. Quo tempore Lunarum ſolo lumine ſe ſolantur. Altera anni parte dimidia, cum oppoſitam annuli ſuperficiem Sol illuſtrat, eodem modo, luce fruitur hemiſphærium T B V, quo prius T A V; & hoc viciſſim tunc longas illas eclipſes patitur. Sola æquinoctiorum ſunt tempora, Sole in ipſum productum annuli planum incidente, cum lumine deſtitutus vix Saturnicolis apparere poteſt; quando nec noſtris percipitur dioptris. Tenente nimirum Saturno, ex Sole viſo, gradum Virginis, aut Piſcium, viceſimum primum cum dimidio; quemadmodum in Saturnio ſyſtemate olim expoſuimus. Ubi ratio quoque redditur eorum, quos diximus, exortuum Solis ſuper Annuli planum, toto Saturnii anni decurſu.

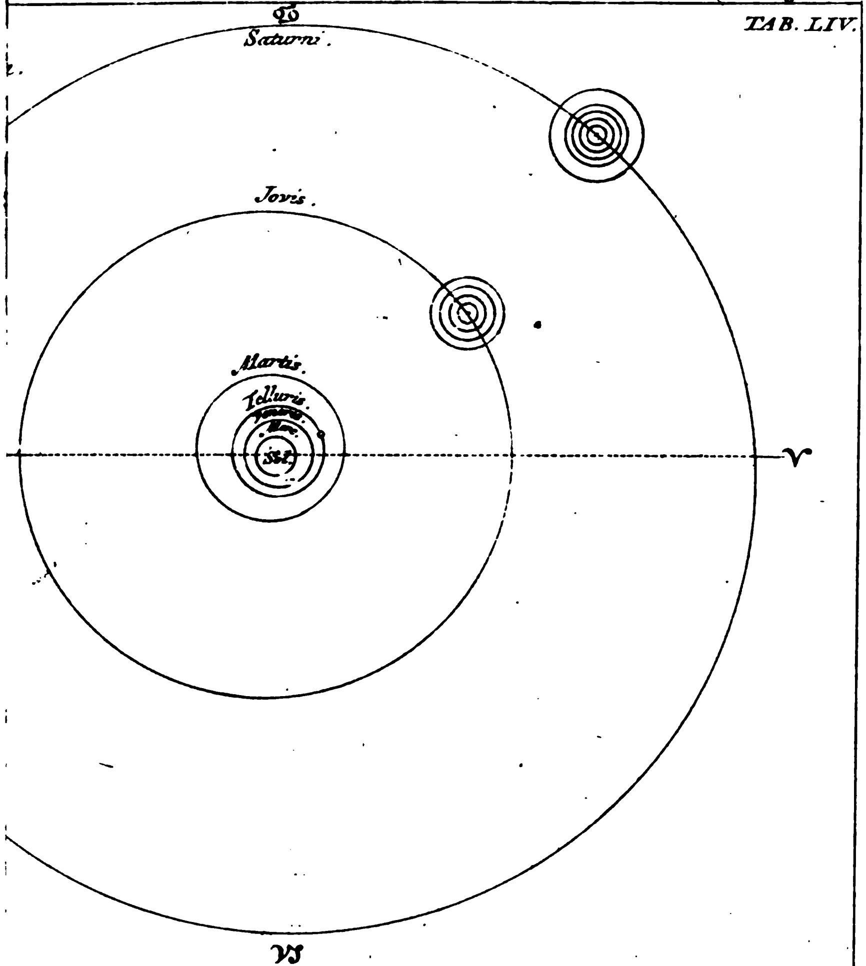
Appoſui in ſchemate hoc, juxta Saturnum, Terræ noſtræ, Lunæque globos, ſervata magnitudinum vera ratione; ut rurſus intelligatur, quam exigua ſit habitatio noſtra, ad Saturni ſphæram annulumque collata; quod continue cogitationi infixum habere expedit. Imaginem vero Saturniæ noctis, geminis annuli lucentis arcubus adverſis, & quinque Lunis ornatæ, ſibi quiſque formare ex jam dictis poterit. Et de primi quidem ordinis Planetis, hæc fere erant quæ dicenda habebam.

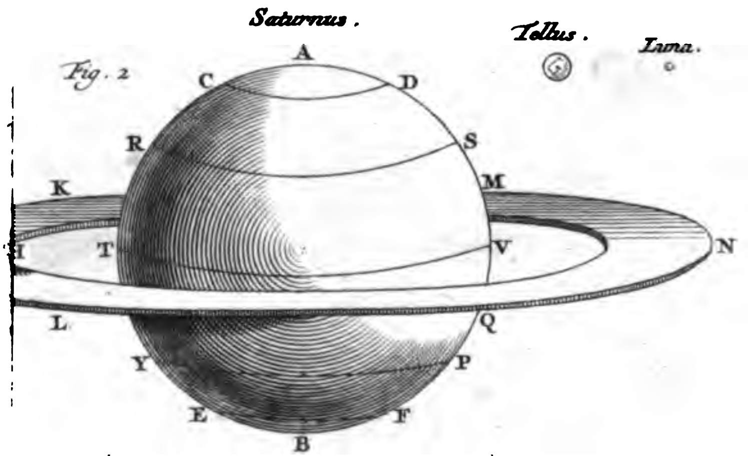
Supereſt ut de Lunis quoque Saturno ac Jovi additis, ac præcipuè de noſtra, quæramus, tam quæ ad phænomena aſtronomica attinent, quam quæ ad ornatum in earum ſuperficie reperiendum, ac præſertim an aliquem eſſe probabile ſit; quod hactenus facere diſtulimus.

*De Luna pauciora conjici poſſe.*

Ac videtur quidem, cum tam propinquus nobis ſit Lunæ glo-

TAB. LIV.




Digitized by Google

globus; teleſcopioque utentibus multa particulatim conſpicienda præbeat; plura quoque ac probabiliora de univerſa natura ejus, quàm de Planetarum cæterorum conjici poſſe, tanto quippe remotiorum. Sed contra evenit ut vix quidquam de Lunæ rebus dicendum reperiam, nimirum quia ejus generis Planetam nullum coram intueri contigit; cum in primariis illis aliter hoc ſeſe habeat. Sunt enim, ut jam ſatis conſtat, generis ejuſdem ac Tellus noſtra, in qua, quid rerum geratur, quidve exſtet, propè intuemur, eoque de cæteris ſimilia quædam conjectandi ratio ſuppetit.

*Satellitum Saturni & Jovis eandem ac Lunæ rationem eſſe.*

Illud vero ſine omni dubitatione ſtatuere poſſumus, ejuſdem naturæ, ac Luna noſtra, eſſe illas, quæ Jovem ac Saturnum comitari dictæ ſunt, ſiquidem eodem prorſus modo primarios hoſce Planetas circumeunt, ſimulque cum illis circum Solem feruntur, perinde ac cum Tellure Luna. Sed & aliam utrobique ſimilitudinem intercedere poſtea videbimus. Quamobrem ſi quid de Lunæ ſtatu conjicere poſſimus, (poſſumus autem pauca admodùm) idem in quatuor illis circa Jovem, & in quinque Saturniis haud multo aliter ſe habere putandum erit. Illud ſemper menti infixum tenendo, non eſſe illas viliores aut minore ornatu exultas.

*Lunam montibus & vallibus diſtinctam eſſe.*

Illud igitur in Luna noſtra apparet, etiam minoribus perſpicillis trium quatuorve pedum longitudine, plurimis montium tractibus, rurſuſque planis vallibus latiſſimis, ſuperficiem ejus diviſam eſſe. Cernuntur enim montium umbræ ea parte quam a Sole averſam habent; ac frequenter jugo in circulum fere compoſito incluſæ valles quædam minores animadvertuntur; quarum medio monticuli, unus pluresve rurſum eminent. Ex qua vallium rotunditate argumentum ſumebat Keplerus, Lunicolarum, cum ratione operantium, immenſas has eſſe molitiones. Sed hoc incredibile prorſus, tum ob nimiam earum magnitudinem; tum quod facile naturalibus cauſis cavitates ejuſmodi orbiculares formari poſſint.

*Carere vero mari.*

Marium vero ſimilitudinem illic nullam, (etſi & ille, & alii plerique omnes contra ſentiunt) reperio. Nam regiones planæ ingentes, quæ montoſis multo obſcuriores ſunt; quaſ-

que

que vulgo pro maribus haberi video, & oceanorum nominibus inſigniri; in his ipſis, longiori teleſcopio inſpectis, cavitates exiguas ineſſe comperio rotundas, umbris intus cadentibus; quod maris ſuperficiei convenire nequit: tum ipſi campi illi latiores non prorſus æquabilem ſuperficiem præferunt, cum diligentiùs eas intuemur. Quocirca maria eſſe non poſſunt, ſed materia conſtare debent minus candicante, quàm quæ eſt in partibus aſperioribus: in quibus rurſus quædam vividiori lumine cæteris præcellunt. *Fluviis,* Nulli quoque fluvii in Luna ineſſe videntur. Non enim effugerent aciem perſpicillorum noſtrorum; ſaltem ſi inter montes aut ripas præaltas, ut noſtri plerique, laberentur. *Nubibus,* Sed neque nubes ullæ ſunt unde pluviæ generentur ad ſuppeditandum fluviis humorem. Si enim eſſent, videremus eas nunc has nunc illas Lunæ regiones obtegere, ac viſui noſtro ſubducere, quod nequaquam contigit, ſed perpetua apparet ſerenitas.

*Aëre & aqua.*

Porrò nec aëre aut atmoſphæra Lunam cingi, qualis circum Tellurem hanc ambit, manifeſtum eſt. Quia ſi qua talis exiſteret, non poſſet extrema Lunæ ora tam præciſe circumſcripta ſpectari, quam ſubeunte ſtella aliqua ſæpe animadverſa eſt; ſed evanida quadam luce, ac velut lanugine finiretur, ut omittam vapores atmoſphæræ noſtræ maximam partem ex aquæ particulis conſtare; ac proinde, ubi nulla ſunt maria aut fluvii, non eſſe unde eorum copia ſurſum educatur. Hæc igitur inſignis differentia quæ Lunam inter Terramque noſtram reperitur, omnem fere aditum conjecturis obſtruit. Nam ſi maria amneſque ineſſe cernerentur, haud leve argumentum eſſet cæterum quoque Terræ ornatum ei convenire, veramque adeo eſſe Xenophanis opinionem, qui habitari in Luna dicebat, eamque Terram eſſe multarum urbium & montium. Nunc vero in ſolo arido, & omnis aquæ experte, non videntur neque herbæ, neque animantia exſtare poſſe, cum omnibus iſtis humor materiam & alimenta præſtare debeat.

*Hinc de animantibus & ſtirpibus in-*

Anne igitur credendum, tantæ magnitudinis globum in hoc conditum eſſe ut noctu nobis lucem tenuem largiatur,

aut

Digitized by Google

aut æſtus maris cieat? Nemo erit qui pulcherrimo inde ſpe- *certiorem conjecturam eſſe.*
ctaculo fruatur Telluris noſtræ in ſe revolutæ, & nunc cum Europa Africam, nunc Aſiam, nunc Americam oſtentantis; nunc plene, nunc dimidio orbe lucentis? Omnes item quæ Jovem ac Saturnum circunſtant Lunæ, æquè inutiles vacuæque ferentur? Non habeo equidem quod dicam, cum nulla ab re ſimili conjectura ſuppetat. Magis tamen probabile videtur ob corporum præſtantiam, aliquid in ſuperficie eorum geri, aliquid creſcere ac vivere, qualecunque tandem id ſit, & quantumlibet à rebus noſtris diverſum. Poſſet forſan ſtirpium animaliumque ibi vitam aliud quid, aquæ noſtræ diſſimile, ſuſtentare. Poſſet exiguus humor in terra, non æque ac noſtra, aquam combibente, ſufficere radiis Solis, unde rorem educerent, alendis herbis arboribuſque idoneum. Quod idem Plutarcho in mentem veniſſe video in eo qui de Facie in orbe Lunæ eſt dialogo. Nam neque apud nos, niſi ſumma maris ſuperficie, ac tenui veluti pellicula opus eſſet, ad humorem terris, ſatiſque ſuppeditandum, quem Solis vis elicuiſſet, quique in rorem tantum, non vero in nubes condenſaretur. Sed hæ admodum leves ſunt conjecturæ aut ſuſpiciones potius, nec aliud habemus ex quo de Lunæ noſtræ, atque etiam reliquarum natura aliquid colligamus. Omnium enim, uti diximus, eadem putanda eſt; idque præter adductam ſuperius rationem, etiam hac alia confirmatur, quod ſicuti Luna noſtra eandem perpetuò faciem ad nos obverſam habet, ita & illæ Joviales ac Saturniæ ad ſuos Planetas primarios. Mirum videatur hoc ſciri potuiſſe; at non erat difficilis conjectura, poſtquam, ut paulo ante dixi, animadverſum fuit extremam Saturniarum tunc ſolum conſpici, cum Planetæ huic ad occidentem poſita eſt; ab oriente vero ſemper eam latere. Facile enim perſpicitur id inde evenire, quod magna ſui parte obſcuriorem ſuperficiem habeat hæc Luna; quæ pars obſcurior cum ad nos converſa eſt, tunc cerni nequeat præ luminis tenuitate. Cumque ſemper in orbitæ ſuæ latere quod orientem ſpectat obſcurata reperiatur, in altero nunquam, manifeſtum indicium eſt eandem glo-

*Jovis ac Saturni Lunas, non ſecus ac noſtram Telluri, eandem partem ſuo Planetæ obvertere.*

globuli regionem ſemper Saturnum reſpicere, quoniam ex eo illud contingere neceſſe eſt. Quis vero jam dubitet, cum & illius omnium remotiſſimæ & noſtræ Lunæ facies ſemper eadem ex primario Planeta ſuo ſpectetur, quin idem in cæteris, quæ circa Jovem ac Saturnum volvuntur, natura effecerit? Cauſa vero quare id fiat vix aliunde peti poteſt, quam quod denſior ponderoſiorque materia ſit Lunarum omnium parte ea, quâ ſemper à Planetis ſuis averſæ ſunt. Sic enim ea ipſa pars majore vi à centro circuitus recedere contendet: cum alioqui, ex motus legibus, eadem ſemper facies non ad Planetam, ſed ad fixas ſtellas eaſdem, continue obverti debuerit.

*Lunæ incolis ſi qui ſint, qualis apparitura ſit cælorum conſtitutio, dierum ratio, &c.*

Porro ex hoc poſitu Lunarum ad Planetas ſuos mira quædam ſpectacula evenire neceſſe eſt eas habitantibus, qui an ſint aliqui, ut jam apparuit, multo incertiſſimum eſt; ſed quaſi eſſent ponantur. Satis erit autem de noſtræ Lunæ indigenis dixiſſe. His igitur ſic in duo hemiſphæria globus ejus dividitur, ut qui alterum incolunt, ſemper Telluris noſtræ conſpectu fruantur, qui reliquum, ſemper eo careant. Niſi quod quidam, circa confinia utriuſque agentes, amittant eum per vices ac recuperent. Cernunt autem Gæoſcopi illi Tellurem in æthere pendentem multo majorem quam quanta nobis Luna apparet, quippe ferè quadruplo ampliore diametro. Sed illud mirabile, quod nocte dieque eodem cœli loco velut immobilem perpetuo hærere vident; alii recta ſupra caput defixam, alii certa altitudine ab horizonte diſtantem, quidam & in ipſo horizonte ſitam: atque interea convertentem ſe circum axem ſuum, regioneſque quas continet univerſas deinceps oſtendentem horarum viginti quatuor ſpatio, atque eas quoque proinde (quod utinam videre liceret) quæ ad utrumque polum nobis incolis adhuc incognitæ manent. Præterea & lumine creſcentem eam vident & imminutam menſtrua periodo, atque ita per vices plenam, dimidiatam, inque cornua tenuatam, eâdem formarum varietate quam Lunæ globus nobis exhibet. Sed lucem à Tellure noſtra accipiunt quindecuplo majorem quam nos ab illa. Adeo ut,

Digitized by Google

ut, in hæmiſphærio meliore, ad nos obverſo noctes inſigniter claras habeant; nec tamen cum claritate illa ullus ad eos calor manare poteſt, etſi hoc aliter Keplero viſum eſt. Sol verò ſemel illis oritur ſingulis menſibus noſtris, ſemelque occidit, atque ita dies noctesque, quindecuplo quam nos longiores habent, at inter ſe æquales perpetuo æquinoctio. Qua dierum longitudine, quandoquidem non amplius ab illis quam à nobis Sol abeſt, neceſſe eſſet eos, quibus altè ſupra horizontem aſcendit, æſtu incommodo torreri, ſi corpora eorum perindè ac noſtra afficiantur. Aſcendit autem maximè iis qui circa confinia hemiſphæriorum, quæ diximus, incolunt, qui vero inde procul diſtant, ac circa regiones habitant polis Lunæ ſuppoſitas, non magis ob longos iſtos dies calebunt, quam qui circa Iſlandiam aut novam Zemblam æſtivo tempore cetos piſcantur; qui perſæpe frigora ingentia, ipſius ſolſtitii tempore, ac trium licet menſium diebus, experiuntur. Sunt autem poli Lunæ, quos circum ſtellæ fixæ converti cernuntur in ea habitantibus, nequaquam iidem qui nobis, neque etiam cum Eclipticæ polis conveniunt, ſed his circunferuntur, quinque gradibus ſemper diſtantes, idque periodo annorum novendecim. Anni autem ſpatium idem illic quod nobis; quod motu fixarum metiuntur ac reverſione earum ad Solem. Idque iis perfacile eſt, cum diei tempore, non minus quam noctu, ſtellas conſpiciunt, nihil impediente Solis claritate; quoniam, ut ſupra oſtenſum eſt, nullam vaporum ſphæram habent; ſine qua & nos interdiu cœlum ſideribus plenum aſpiceremus. Nec vero nubes quoque ullæ unquam obſtant obſervantibus, adeo ut curſus Planetarum melius quàm nos inveſtigare poſſint; ſed tamen difficilius multò verum ſyſtema reperire. Quoniam incipientibus ſtare Terra ſua videri debuit, in quo eos longius quàm nos error abduxit.

Hæc omnia vero ad Jovis & Saturni Lunas referuntur, quibus idem quod nobis Tellus eſt, ſui ſunt primarii Planetæ. Singula autem diei noctiſque ſpatia ſimul ſumpta, cujuſque Lunæ periodus metitur, quas ſupra annotavimus. *Quod ad Jovis & Saturni Lunas facile transferre eſt.*

Quo ſit ut Saturni quintam incolentibus, cujus periodus dierum noſtrorum erat 80, eveniant ſui dies noctesque noſtris quadraginta æquales. Iiſdem vero, propter Saturni revolutionem tricennalem, ſiunt æſtates hyemeſque ſingulæ annorum noſtrorum quindecim. Itaque tum propter tam longa frigora, tamque longos ſomnos vigiliaſque; etiamſi nil aliud eſſet, plane aliam quam apud nos vitam illic fore manifeſtum eſt.

Explicuimus igitur hactenus, quæ ad Planetas primarios ſecundarioſque Solem circundantes ſpectant. Hinc vero priuſquam ad Solem ipſum & ſtellas fixas, tertium nempe genus cœleſtium corporum, pergamus, operæ pretium videtur, ut magnitudinem, ac magnificentiam totius Solaris mundi, aliqua ratione, atque evidentius quam hactenus factum ſit, exprimamus. Quod quidem ſchemate in foliis hiſce deſcripto haudquaquam poſſumus, propter parvitatem corporum Planetariorum ad vaſtiſſimas orbitas ſuas collatorum. Sed verbis ſupplebitur quod deſcriptione perfici nequit. Itaque repetitâ figurâ quam ſuperioris libri initio poſuimus, cogitetur ei ſimilis ac proportione reſpondens, ſed quæ deſcripta ſit in ampliſſima politiſſimaque areæ cujuſdam planitie, cujus extremus circulus, Saturni orbem referens, trecentos ſexaginta pedes ſemidiametro contineat. In cujus deinde circunferentia globus Saturni cum ſuo ponatur Annulo, quantus in figura altera cernitur, ubi Solis & Planetarum ſunt corpora. Cæterique ſimiliter globi in ſua quiſque orbita collocentur; inque medio omnium Sol qua magnitudine ibi deſignatur, quatuor nempe pollicum diametro. Ita Telluris circuitus, quem *magnum orbem* vocant Aſtronomi, ſemidiametrum ſortietur pedum triginta & ſex. In quo Tellus ipſa milii grano non major circunferri cogitanda eſt; eique comes Luna, vix punctum viſibile ſuperans, in circello paulo plus quam duos pollices lato; velut in adſcripto hic diagrammate. In quo linea AB circunferentiæ partem refert ejus, quam diximus, Telluris orbitæ, cujus triginta & ſex pedes continet ſemidiameter. In ea Tellus eſt cir-

TAB. LIV. fig. 1. *Solaris mundi ſecundum veram proportionem deſcriptio.*

TAB. LV. fig. 1.

TAB. LV. fig. 2.

circellus C: Lunæ vero circum eam via, circulus DE; in quo Lunæ corpuſculum quale ad D expreſſum eſt.

Saturniarum vero Lunarum exterior in circulo feretur cujus ſemidiameter pollicum 29. Jovialium item exterior in minore aliquanto, cujus ſemid. poll. 19½.

Sic demum habebitur germanus & omni proportione perfectus ſolaris Regiæ typus, in quo jam Tellus duodecim mille diametris ſuis à Sole aberit. Cujus ſpatii amplitudo ſi milliarium numero deſignanda ſit, plus quam ſeptemdecim milliones, ut vocant, milliarium Germanicorum comprehendet. Sed melius fortaſſe hanc vaſtitatem animo concipiemus, ſi motus cujuſdam celeritate eam metiamur, Heſiodi Poëtæ exemplo; qui altitudinem cœli, & Tartari profunditatem æquis ſpatiis definiens, novem dierum noctiumque lapſu, ferream incudem è cœlo dimiſſam, ad terram decimâ pervenire ſcripſit; ac tanto quoque tempore è Terræ ſuperficie cadentem ad Tartara ferri. Nos vero non incudis lapſum ſed continuam potius celeritatem globi ex majore tormento emiſſi huc adhibebimus; quem ſingulis horæ ſecundis ſcrupulis, ſive arteriæ pulſibus, centum circiter hexapedas conficere experimentis compertum eſt, quæ in Baliſticis Merſennus commemorat; cum ſonus eo tempore ad centenas octogenas extendatur.

*Immenſitas intervallorum inter Solem & Planetas, illuſtratur comparatione cum motu globi è tormento emiſſi.*

Ajo igitur, ſi ex Terra ad Solem tanta illa celeritate globus continuè feratur, fere annos 25 eſſe inſumpturum antequam iter hoc peragat. Ut proinde à Jove ad Solem 125 annis opus habeat, à Saturno 250. Et hic quidem calculus ex menſura Terræ diametri pendet, qui ex probatioribus Gallorum obſervationibus eſt hexapedarum Pariſienſium 6538594. cum gradus unus circuli maximi efficiat hexapedas 57060. Quanta itaque ſint iſtorum orbium ſpatia, quamque exilis, eorum reſpectu, Telluris globulus, in quo tam multa homines molimur, tantum navigamus, tot bella gerimus, ex his intelligitur. Quod utinam diſcant cogitentque Reges & Monarchæ noſtri; ut ſciant quantilla in re laborent cum de angulo aliquo terræ occupando totis viribus, magno multorum



Digitized by Google

malo, contendunt. Sed ad noſtra revertamur, ac de Sole videamus, cujus jam ſimul ad Planetas & eorum orbitas magnitudinem ampla illa deſcriptio, quam expoſuimus, demonſtrat.

*In Sole omnem conjecturam deficere.*

In hoc igitur ipſo Sole non improbabile quibuſdam viſum eſt animalia vivere poſſe. Sed cum multo magis etiam, quam in Lunis, conjectura omnis hic deficiat, neſcio qua ratione id ita eſſe opinati ſint. Non enim adhuc planè compertum eſt, utrum dura an liquida ſit vaſti illius globi materies; etſi propter lucis naturam, quam aliàs explicui, magis veriſimile ſit liquidam eſſe; quod etiam perfecta rotunditas ejus, lumenque per totam ſuperficiem æqualiter diffuſum ſuadere videtur. Nam exigua quædam in diſci circunferentia apparens inæqualitas, quæ teleſcopiis, nec tamen ſemper, cernitur, & ex qua miros *undarum fluctus, flammarumque eructationes*, nonnulli ſibi fingunt, nihil aliud eſt quàm vaporum prope Terram noſtram tremula agitatio, quæ & ſtellas noctu ſcintillare facit.

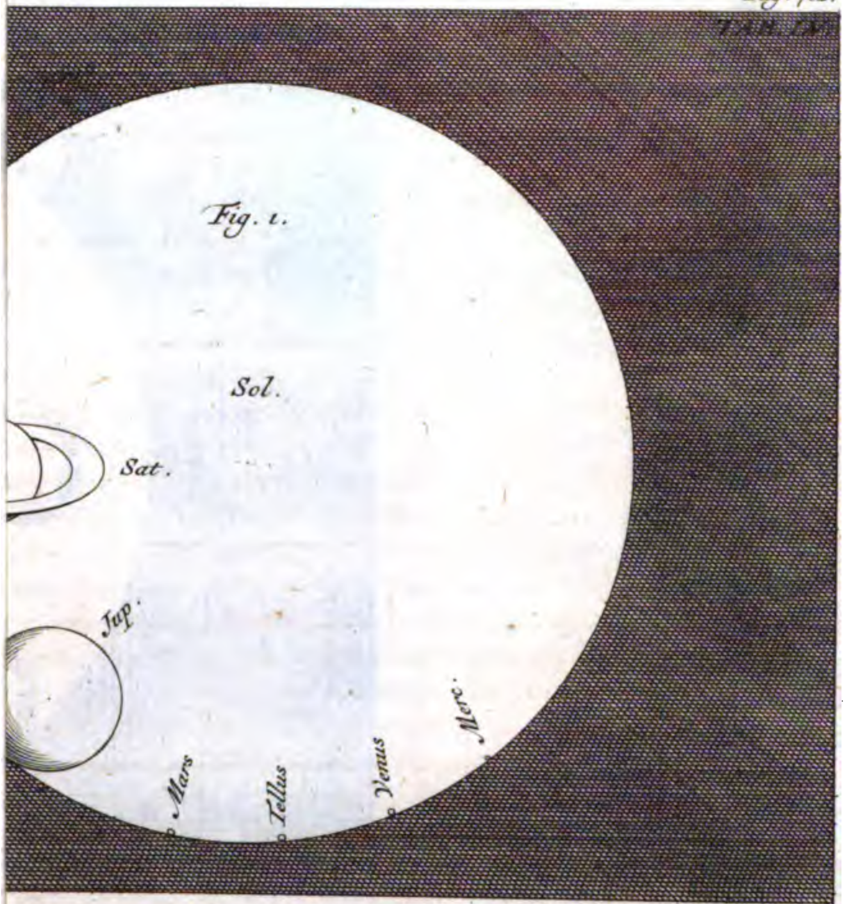
*Faculas Solares incertas videri.*

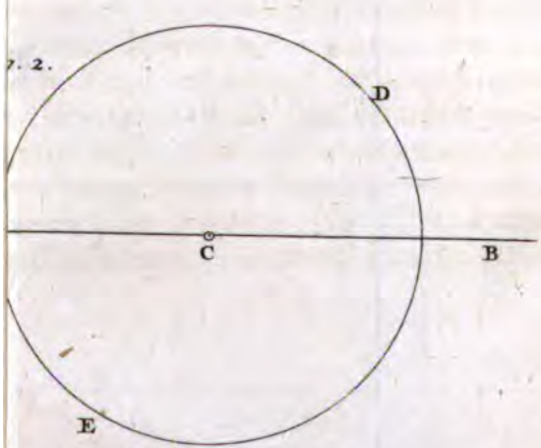
Neque ego faculas illas, quas unà cum maculis fere omnes celebrant, unquam videre potui, etſi has ſæpius ſpectaverim; ac valde dubito an aliquid in Sole, ipſo Sole lucidius appareat. Invenio enim, fideliores obſervationes conſulens, non niſi in nubeculis illis ſubfuſcis, quæ maculas plerumque circundant, aliquando ſolæ feruntur, puncta quædam clariora interdum notari, quæ non mirum eſſet, propter obſcuritatis illius viciniam, ſplendidiora quam ſint videri.

*Propter calorem nulla illic vivere copora noſtris ſimilia.*

Summum quidem in Sole calorem, fervoremque eſſe, certo credendum eſt, in quo nihil omnino noſtrorum corporum ſimile vivere poſſit, aut momento ſupereſſe. Itaque aliud genus viventium animo concipiendum eſſet, longeque ab omni natura eorum quæ unquam vidimus, aut cogitavimus, diverſum. Quod fere idem eſt ac ſi dicamus nihil hic conjectando nos conſequi poſſe. Eſt quidem tam præſtans, tantæque molis corpus haud dubiè maxima ratione, ac propter inſignem uſum aliquem creatum. Sed an non apparet jam abunde utilitas ejus in mirabili illa lucis caloriſque in totum Planetarum circumſtantium chorum effuſi-

ſi-




Digitized by Google

Digitized by Google

ſione; ex qua univerſo animantium generi non vita ſolum conſtat, ſed & jucunda ut ſit efficitur? Idque non in exiguis ſolum, qualis Tellus noſtra, ſed & in tanto majoribus Jovis & Saturni globis, quorum non eſt contemptibilis ad Solem collata magnitudo. Hæc quidem tanta ſunt ut nihil mirum ſit eorum gratia duntaxat Solem eſſe conditum. Nam quod Keplerus opinabatur, aliud quoque illi delegatum eſſe munus, ut nempe omnium circum ambientium Planetarum motus in ſuis orbibus incitaret, propria ſua circa axem converſione, quod in Epitome ſyſtematis Copernicei multis comprobare conatur, non poſſim aſſentiri, propter ea quæ in ſequentibus dicentur.

*Stellas fixas totidem eſſe Soles.*

Solem ex ſtellis inerrantibus unam eſſe, ante Teleſcopii inventionem, adverſari videbatur Copernici ſententiæ; quia cum ſtellæ, quæ dicuntur primæ magnitudinis, cenſerentur trium ſcrupulorum diametro, eſſentque ſecundum Copernicum tam procul remotæ, ut totus ille Orbis magnus, quo Terra defertur, velut puncti inſtar eſſet ad ſphæram affixarum comparatus; quandoquidem toto anni tempore, etſi locum Terra mutaret, nihil mutari cernerentur ſtellarum diſtantiæ; ſequebatur ſingulas earum, quæ cæteris clariores apparent, majores eſſe toto illo magni orbis ambitu: quod abſurdum erat. Atque hoc, ut palmarium contra Copernici doctrinam argumentum, Tycho Braheus objectabat. Sed poſtquam radios ſtellarum nudo viſu apparentes, Teleſcopia ſuſtulerunt; (quod ita optimè faciunt, ſi lens oculo proxima flammæ afflatu obſcuretur) atque ita haud aliter eas ac puncta lucentia ſpectandas præbuerunt; prorſus ſublata quoque eſt ea difficultas, nec quidquam jam impedit quominus ſtellæ iſtæ pro totidem Solibus habeantur. Idque eo probabilius redditur, quod conſtet propria luce ſua eas lucere: tanta enim eſt diſtantia, ut à Sole illam mutuari nequaquam poſſint. Singulas vero Sole minores non eſſe nihil credi vetat, cum ex tam immenſo intervallo tam vividum lumen fundant. Hanc itaque ſententiam nunc paſſim tenent qui Copernici ſyſtema amplectuntur. Qui recte quoque hoc

*Eas ſpargi per vaſta cæli*

ſta.

*ſpatia, & alias ab aliis, ut proximas à Sole removeri.*

ſtatuunt, non in una eademque ſuperficie hærere ſtellas iſtas; tum quod nulla ratio hoc ſuadeat, tum quod in eandem ſphæram Sol, qui earum una eſt, referri nequeat. Itaque veriùs eſſe ſpargi eas per vaſta cœli ſpatia, quantumque à Terra aut Sole ad proximas interjacet, tantum circiter ab his eſſe ad ſequentes, atque inde rurſus ad alias, continuo progreſſu.

*Nec Solem præ cæteris eminere contra Keplerum notatur.*

Scio etiam hic aliud ſentire Keplerum, in ea, quam diximus, Epitome. Quamquam enim exiſtimet tota cæli profunditate ſtellas diſſeminatas eſſe, vult tamen Solem hunc noſtrum multo amplius ſpatium circa ſe habere, quaſi ſphæram vacuam, ſupra quam confertius ſtellis cœlum inciपiat. Putabat enim alioqui futurum ut paucæ tantum ſtellæ numerarentur nobis, eæque ſumma magnitudinis diverſitate: *nam cum omnium maximæ tam appareant parvæ, ut vix inſtrumentis poſſint notari aut menſurari, conſequens eſſe ut quæ duplo aut triplo &c. diſtarent longius, duplo & triplo appareant minores, poſitis æqualibus ipſis veris magnitudinibus; citoque veniatur ad eas quæ penitus fiant inſenſibiles: atque ita pauciſſimas viſum iri ſtellas, eaſque in maxima differentia;* cum contra amplius quam mille obſerventur, nec magnitudine ita multum diverſæ. Sed ex his nequaquam id quod ille intendit evincitur; ac præcipue in eo deceptus fuit, quod non advertit ignium, & flammæ eam eſſe naturam, ut ex maximis intervallis cerni poſſint, iiſque unde alia corpora, æque exiguis angulis comprehenſa, prorſus evaneſcant. Quod vel lucernæ comprobant, quæ per urbium noſtrarum vicos noctu incenduntur. Quæ cum ad centenos pedes inter ſe diſtent, tamen earum viginti & plures, in continua ſerie magis magiſque remotas, numerare licet, etſi viceſimæ flammula vix 6 ſecundorum ſcrupulorum angulo conſpiciatur. Idem vero multo magis fieri neceſſe eſt in eximia illa ſtellarum luce; adeo ut nihil mirum ſit, ad mille aut duo millia earum, oculis notari poſſe; Teleſcopiis vero adhibitis, etiam vigecuplo plures deprehendi. Sed ſuberat ratio, cur Keplerus Solem præ reliquis ſtellis præcipuum

Digitized by Google

puum quid habere cuperet; circumque eum eſſe unicum, in Natura, Planetarum ſyſtema, idque mundi medio ſitum. Hiſce nimirum opus habebat ad confirmandum myſterium Coſmographicum ſuum, quo certis quibuſdam proportionibus reſpondere volebat Planetarum à Sole diſtantias diametris ſphærarum, quæ corporibus polyedris Euclideis inſcribuntur & circunſcribuntur ſingulis. Quod tum demum veriſimile videri poterat, ſi in mundo univerſo unus tantum eſſet circa Solem aberrantium ſiderum chorus, adeoque & Sol ipſe ſolus ſui generis.

Sed myſterium illud totum, ſi bene perpendatur, ſomnium quoddam ex Pythagoræ aut Platonis Philoſophia enatum eſſe apparet. Nec proportiones ſatis quadrant, ut ipſe quoque auctor agnoſcit; ſed, cur hoc ita ſit, alias cauſas plane frivolas comminiſcitur. Idem levioribus etiam argumentis probat extremam mundi ſuperficiem, ſtellas omnes continentem, ſphæricæ eſſe figuræ; ac numerum præterea earum neceſſariò eſſe finitum, ex eo quod ſingularum finita ſit magnitudo. Illud vero vaniſſimum, quod à Sole, ad ſuperficiem cavam ſphæræ fixarum, definit ſpatium ſexies centena millia Terræ diametrorum. Quoniam ſcilicet, ſicut Solis diameter ad diametrum Orbitæ Saturni; quos inter ſe eſſe ſtatuit ut 1 ad 2000; ita ſit hic diameter ad illum ſphæræ fixarum interioris; quod nulla ratione nititur. Atque hæc quidem Viro ſummi ingenii, magnoque Aſtronomiæ inſtauratori excidiſſe mirum eſt. Nos vero unà cum præcipuis noſtræ ætatis Philoſophis, ne dubitemus eandem ſtellarum earum & Solis naturam exiſtimare. Ex quo jam mundi idea multo major naſcitur, quam quæ ex hactenus traditis percipiebatur. Quid enim nunc prohibet, quin unamquamque ex ſtellis hiſce, ſive Solibus, haud aliter ac Sol noſter, circum ſe Planetas habere putemus, quæ rurſus ſuis Lunis ſtipatæ ſint? Imo hoc ita ſe habere, manifeſta ecce ratio ſuadet. Etenim ſi cogitatione in cœli regionibus nos ponamus, non minus à Sole, quàm fixis ſtellis, remotos; nihil quicquam diſcriminis haſce inter atque illum tunc eſſemus animadverſuri. Longè enim abeſt ut corpora Pla-

*Nihil impedire, quo minus credamus circa unamquamque ex fixis, ut circa Solem, eſſe Planetas.*



Digitized by Google

netarum, Solem ambientium, conſpecturi ſimus, vel ob tenuiſſimam eorum lucem, vel quod univerſæ, quibus feruntur, orbitæ in unum idemque lucidum punctum cum Sole confunderentur. Hic igitur poſiti, meritò eandem omnium ſtellarum rationem naturamque eſſe exiſtimarémus; & ex una, propius inſpecta, de cæteris quoque judicari poſſe nihil ambigeremus. At nunc Dei benignitate, ad unam ex ipſis, Solem videlicet noſtrum, admoti ſumus, ac tam prope acceſſimus, ut circum eam ſex minores globos converti cernamus; & circa horum quoſdam, alios obire ſecundarios. Cur itaque non eo judicio nunc utamur; ac prorſus veriſimile putemus non ſolam hanc ſtellam tali comitatu cingi, aut aliqua in re cæteris præminere? Neque etiam ſolam circum axem ſuum converti; ſed potius cæteras omnes eadem hæc ſimilia habere? Ergo hac ratione etiam cuncta illa quæ in Planetis circumſolaribus ineſſe, ad Terræ noſtræ ſimilitudinem diſſeruimus, conſentaneum erit, ut ad innumeros Planetas alios, tot mille Solibus additos, æquè pertinere credamus. Eruntque & illic ſtirpes & animalia, atque etiam ratione inſtructa, quæ cœli convexa mirentur, & ſidera obſervent, motuſque eorum intelligant; atque omnia denique habeant, ſine quibus neque hæc haberi poſſe ſupra oſtendimus.

Quam mirabilis igitur quamque ſtupenda mundi amplitudo & magnificentia jam mente concipienda eſt. Tot Soles, tot Terræ, atque harum unaquæque tot herbis, arboribus, animalibus, tot maribus, montibuſque exornata. Et erit etiam unde augeatur admiratio, ſi quis ea, quæ de fixarum ſtellarum diſtantia & multitudine hiſce addimus, perpenderit.

Tantam igitur eſſe diſtantiam hanc, ut quæ Solem Terramque interjacet, Terræque diametrorum duodecim millia continet, ei comparata, exilis plane habenda ſit, non una ratione conſtat: atque hac inter cæteras, quod ſi proximæ quædam inter ſe ſtellæ notentur, quæ claritate plurimum differunt; velut in media caudæ, (quæ duplex eſt) Urſæ ma-

majoris; nulla apparentis intervalli earum mutatio animadvertitur, quocunque anni tempore ſpectatarum; quod tamen fieri neceſſe eſſet, propter diverſas viſus poſitiones per annui Orbis ambitum, orireturque parallaxis aliqua ſi, ut conſentaneum eſt, propior ſit ſtella quæ lucidior apparet. Qui autem ante nos definiendi tam vaſti ſpatii rationem inierunt, nihil certi comprehendere potuerunt, propter nimiam obſervationum neceſſariarum ſubtilitatem, quæque omnem diligentiam ſuperet. Itaque mihi unica hæc via ſupereſſe viſa eſt, quam nunc inſiſtam, qua ſaltem veriſimile quid in re tam exploratu ardua conſequamur. Cum ergo ſtellæ ut jam diximus, totidem ſint Soles; ſi earum aliquam Soli æqualem eſſe ſumamus; erit illius tanto major quam Solis diſtantia, quanto apparens diameter diametro Solis minor erit. Sed tam exiguæ apparent ſtellæ, etiam quæ primæ ſunt magnitudinis, atque etiam Teleſcopio ſpectatæ, ut veluti puncta lucentia ſine viſibili latitudine refulgeant. Quo fit ut ejuſmodi obſervationibus nulla earum menſura deprehendi poſſit. Cum itaque hac non ſuccederet, tentavi qua ratione Solis diametrum ita imminuere poſſem ut non majorem lucem quam Sirius, aut aliud è clarioribus ſideribus, ad oculum mitteret. Ergo occluſi rurſus, ut ſupra, tubi duodecimpedalis vacui aperturam alteram lamella tenuiſſima, cujus medio tam exiguum effeci foramen, ut Lineæ partem duodecimam non ſuperaret, ſive pollicis centeſimam quadrageſimam quartam. Hunc tubum ea parte ad Solem obverti; altera oculo admovi; qui tunc particulam Solis cernebat, cujus diameter, ad totius diametrum, erat ut 1 ad 182. Sed eam particulam multo clariorem comperiebam, quàm noctu Sirius apparet. Itaque cum longè magis arctandum Solis diametrum viderem, id ita effeci, ut, in perforata ejuſmodi lamina, vitreum globulum objicerem minutiſſimum, pari circiter diametro ac prius illud foramen habebat; quo globulo ad microſcopia antehac uſus fueram. Ita per tubum in Solem intuenti, contecto undique capite, ne quid diei lux turbaret, non minor ejus claritas quam Sirii videbatur.

*Modus probabiliter inveſtigandi diſtantiam fixarum à Sole.*

Atqui, ex Dioptrices legibus inſtituto calculó, fiebat jam Solis diameter $\frac{1}{182}$ ejus particulæ centeſimæ octogeſimæ ſecundæ, quam, per foramen exiguum, prius conſpexeram. Ductis autem in ſe $\frac{1}{152}$ & $\frac{1}{182}$, fit $\frac{1}{27664}$. Ergo euſque contracto Sole, vel euſque remoto, (erit enim effectus idem) ut diameter ejus ſit $\frac{1}{27664}$ ejus, quem in cœlo intuemur, ſupereſt illi lux quæ Sirii luci non cedat. Solis vero euſque remoti diſtantia erit neceſſario, ad eam quam nunc habet, ut 27664 ad 1: & diameter paulum excedet 4 ſcr. tertia. Itaque cum æqualis ei Sirius ponatur, ſequitur Sirii quoque diametrum totidem eſſe ejuſmodi ſcrupulorum; diſtantiamque itidem, ad eam qua à Sole abſumus, ut 27664 ad 1. Quod quàm incredibile ſit intervallum, apparebit eadem ratione, quam in æſtimanda Solis diſtantia adhibuimus. Nam ſi 25. annis opus habebat tormenti bellici globus, continua velocitate, quanta exploditur, incedens, ut à Terra ad Solem perveniret; jam numerus 27664 vicies quinquies ducendus eſt, atque ita fiunt 691600, adeo ut penè ſeptingenta annorum millia inſumpturus ſit globus, in tanta celeritate ſua, priuſquam ad proximas ſtellarum inerrantium perveniat. Atque ad has ſtellas ſerena nocte oculos circumferentes, quantum horum judicio comprehendere poſſumus, vix aliquot milliaribus ſupra verticem eas exſtare putamus. Quæſivi vero de proximis tantum. Cæteræ enim cum, ut jam diximus, iis ſpatiis in ulteriora cœli recedant, ut non minora ſint deinceps à propioribus ad ſequentes, quàm à Sole ad iſtas, quanta immenſitas ſupereſt! Si enim plures quàm mille, nudo viſu notantur; teleſcopiis verò decuplo aut vigecuplo amplius; quomodo ſciri poteſt aut definiri, quanta ſit multitudo ulteriorum, quas neque hoc auxilio attingere licet: aut quis numerus nimis magnus dicendus eſt, ſi ad Dei potentiam ſpectemus? Etenim, ſæpe hæc cogitanti mihi, in mentem venit, tantùm in primis numerorum exordiis calculos omnes noſtros verſari. Eſſe enim in ſerie eorum infinita, qui non tantùm viginti aut triginta, aut centum, aut mille notis ſcribantur in progreſſione noſtra denaria; ſed

qui

qui tot characteribus conſtent, quot arenæ grana in tota Telluris mole continerentur. Quis verò dicere audeat tali numero non majorem eſſe multitudinem ſtellarum inerrantium? Nam longè ulterius progreſſi ſunt, qui infinitam eſſe dixerunt; ut Veterum aliqui, atque etiam Jordanus Brunus, qui pluribus argumentis hoc ſe eviciſſe putat, ſed, ut mihi videtur, parum firmis. Nec tamen contrarium quoque perſpicuis rationibus probari poſſe exiſtimo. Illud conſtat, ſpatium naturæ univerſæ infinitè undique protendi; at nihil obſtat, quin, ultra definitam ſtellarum regionem, res alias innumeras Deus effecerit, à cogitationibus noſtris, æque, ac ſedibus, remotas.

Quid ſi verò nec innumeras quidem condidit, ſed ultra eas vacuum reliquit infinitum; ut totum illud, quod exſtare voluit, veluti nihil ſit præ iis quæ producere ejus omnipotentia potuiſſet? Sed ulteriorem horum inquiſitionem, totamque illam de infinito difficillimam diſputationem perſequi omitto, ne ad tot maximarum rerum comprehenſionem, qua jam defuncti ſumus, novus labor accedat. Ea tantùm hic ſubjungam, ex quibus, quænam ſit noſtra de toto mundi ſpatio opinio, cognoſcatur; quatenus nempe Solibus ſeu ſtellis inerrantibus patet, quibus ſua circumponi plenetaria ſyſtemata, probabile eſſe antea oſtendimus.

Exiſtimo itaque unumquemque Solem circumdari vortice quodam materiæ celeriter motæ, ſed qui multum diſſimiles ſint Carteſianis illis, tum ſpatii ratione, tum motus genere, quo in illis materia agitetur. Ea enim apud Carteſium eſt vorticum amplitudo, ut quiſque eorum alios ſe circumſiſtentes contingat, occurrens ſingulis plana ſuperficie, veluti cum in aqua ſapone imbuta bullarum cumulos pueri inflant: moveri vero univerſam cujuſque materiam ſtatuit, in partem eandem rotando. At hunc motum non parum impediri oporteret, propter angulоſam vorticum ſuperficiem. Deinde cum ſit ejuſmodi, ut, velut circa axem cylindri, materia tota feratur, exoritur ei poſtea non exigua difficultas, cùm globoſam Solis formam ex hoc motu deducere conatur: fru- *Unumquemque Solem vortice cingi, ſed Carteſianis multum diſſimili; contra quem pluribus diſputatur.*

ſtra prorſus, atque iis rationibus, quæ incautis aliquid eſſe videantur, cum reipſa nihil explicent. Vult præterea innatare, ac circunferri cum hac materia ætherea, Planetas; atque ea ratione videlicet in ſuis orbibus eas retineri, quòd non majore vi, quàm ipſamet, à centro motus recedere conentur. Sed hic ex Aſtronomicis complura objiciuntur, de quibus aliqua attigimus in diatriba de cauſſis gravitatis. Ubi & aliam rationem expoſuimus, quæ Planetas intra orbium ſuorum limites contineret. Ea eſt gravitas eorum Solem verſus; quæ unde exoriatur oſtendimus, quamque eo magis miror Carteſium præteriiſſe, quod de gravitate, qua corpora in Terram feruntur, primus ſolito meliora adferre cœpiſſet. Refert Plutarchus in libro ſupra memorato de Facie in orbe Lunæ, fuiſſe jam olim qui putaret ideo manere Lunam in Orbe ſuo, quod vis recedendi à Terra, ob motum circularem, inhiberetur pari vi gravitatis, qua ad Terram accedere conaretur. Idemque ævo noſtro, non de Luna tantum, ſed & Planetis cæteris ſtatuit Alphonſus Borellus; ut nempe Primariis eorum gravitas eſſet Solem verſus; Lunis vero ad Terram, Jovem, ac Saturnum, quos comitantur. Multoque diligentius ſubtiliuſque idem nuper explicuit Iſacus Neutonus, & quomodo ex his cauſis naſcantur Planetarum orbes Elliptici, quos Keplerus excogitaverat; in quorum foco altero Sol ponitur. Oportet autem, ſecundum noſtram de natura gravium ſententiam, quò Planetæ ad Solem ſuo pondere inclinent, vorticem turbinemve materiæ cœleſtis circa eum converti non totum in eaſdem partes, ſed ita ut variis motibus, iiſque celerrimis in omne latus ſecundum diverſas ſui portiones rapiatur, nec tamen dilabi poſſit, propter circunſtantem ætherem, qui non tali nec tam celeri motu agitetur. Hujuſmodi vortice gravitatem corporum in Terram, ejuſque effectus omnes explicare conati ſumus, in ea, cujus memini, diatriba. Eademque, ut puto, eſt ratio gravitatis Planetarum Solem verſus, & ex his quoque tam Terræ

no-

Digitized by Google

noſtræ, quàm cæterarum, atque etiam Solis, rotunditas conſequitur; quæ in Carteſiana hypotheſi tantum habet incommodi.

Porro & ſpatia horum vorticum, ut dixi, multo quam ille contractiora pono. Sic enim fere eos ſtatuo in vaſta cœli profunditate diſperſos, quemadmodum turbines aquæ exiguos, hinc inde in ſpatioſo lacu ſtagnove, baculi agitatione, excitatos, ac magnis intervallis totiſque ſtadiis diſtantes. Et ſicuti horum motus nequaquam ab unis ad alios perveniunt, nec proinde ſeſe mutuo impediunt; ita quoque cœleſtium vorticum motus, circum aſtra aut Soles, ſe habere exiſtimo.

Itaque neque alii alios deſtruere poſſunt aut abſorbere, quemadmodum finxit Carteſius, cum oſtendere vellet quomodo ſtella aut Sol aliquis vertatur in Planetam. Apparet autem, cum hæc ſcriberet, non attendiſſe eum ad immenſam ſtellarum inter ſe diſtantiam; idque vel ex hoc uno, quod, cum primum Cometes aliquis intra vorticem noſtrum, cujus centrum Sol occupat, deſcendit; vult eum nobis viſibilem fieri, quod eſt abſurdiſſimum. Quomodo enim, ſidus ejuſmodi, quod ex Solis lumine repercuſſo tantummodo ſplendet; ut cum pleriſque Philoſophis ipſe ſtatuit; quomodo, inquam, poſſet conſpici à tanto intervallo, quod ſaltem decies millies contineret illud quod à Terra ad Solem eſt. Non enim ignorare poterat vaſtiſſimum, circa Solem undique extenſum, ſpatium; cum ſciret in Copernici ſyſtemate orbem magnum, hoc eſt, orbitam Terræ, velut punctum eſſe cum illo comparatum. Sed tota hæc de Cometarum, atque etiam de Planetarum, & mundi origine, commentatio apud Carteſium tam levibus rationibus contexta eſt, ut ſæpe mirer tantum operæ in talibus concinnandis figmentis eum impendere potuiſſe. Mihi magnum quid conſecuti videbimur, ſi quemadmodum ſeſe habeant res, quæ in natura exſtant, intellexerimus; à quo longiſſime etiam nunc

nunc abſumus. Quomodo autem quæque effectæ fuerint, quodque ſunt, eſſe cœperint, id nequaquam humano ingenio excogitari, aut conjecturis attingi poſſe, exiſtimo.

# FINIS.

Digitized by Google

# CHRISTIANI HUGENII

# OPERA

# MISCELLANEA.

*TOMUS QUARTUS.*

Digitized by Google

## Tomi quarti contenta.


*De* Ratiociniis *in* LUDO ALEÆ. 723.

NOVUS CYCLUS HARMONICUS. 745.

Varia *de* OPTICA. 755.

Experimenta Phyſica. 767.


Digitized by Google

# DE RATIOCINIIS IN LUDO ALEÆ

AUCTORE

CHRISTIANO HUGENIO.



Digitized by Google

Digitized by Google

# CHRISTIANUS HUGENIUS

Clariſſimo Viro,

## D. FRANCISCO SCHOTENIO

*S. D.*

*Um in editione elegantiſſimorum ingenii tui monumentorum, quam præ manibus nunc habes, Vir Clariſſime, id inter cætera te ſpectare ſciam, ut varietate rerum, quarum tractationem inſtituiſti, oſtendas quam latè ſe protendat divina Analytices ſcientia, facilè intelligo etiam illa plurimùm propoſito tuo inſervire poſſe, quæ de aleæ ratiociniis conſcripſimus; quantò enim minus rationis terminis comprehendi poſſe videbantur, quæ fortuita ſunt atque incerta, tantò admirabilior ars cenſebitur, cui iſta quoque ſubjacent. Quare cum in tui gratiam primùm illa exponenda ſuſceperim, túque digna exiſtimes, quæ ſimul cum ſubtiliſſimis tuis inventis in lucem exeant, adeo tibi non refragabor, ut etiam è re mea eſſe exiſtimem hâc potiſſimùm ratione ipſa in manus hominum pervenire. Quippe cum in re levi ac frivola operam collocaſſe videri alioqui poſſem, non tamen prorſus utilitatis expers ac nullius pretii cenſebitur, quòd tu veluti inter tua*

*adoptaveris, nec ſine multo labore è vernacula lingua noſtra in Latinam converteris. Quanquam, ſi quis penitùs ea quæ tradimus examinare cœperit, non dubito quin continuò reperturus ſit rem non ut videtur ludicram agi, ſed pulchræ ſubtiliſſimæque contemplationis fundamenta explicari. Et Problemata quidem quæ in hoc genere proponuntur, nihilo minus profundæ indaginis viſum iri confido, quam quæ Diophanti libris continentur, voluptatis autem aliquanto plus habitura, cum non, ſicut illa, in nuda numerorum conſideratione terminentur. Sciendum verò, quod jam pridem inter præſtantiſſimos totâ Galliâ Geometras calculus hic agitatus fuerit, ne quis indebitam mihi primæ inventionis gloriam hac in re tribuat. Cæterùm illi, difficillimis quibuſque quæſtionibus ſe invicem exercere ſoliti, methodum ſuam quiſque occultam retinuêre, adeo ut a primis elementis univerſam hanc materiam evolvere mihi neceſſe fuerit. Quamobrem ignoro etiamnum an eodem mecum principio illi utantur; at in reſolvendis Problematîs pulchrè nobis convenire ſæpenumero expertus ſum. Horum Problematum nonnulla in fine operis addidiſſe me invenies, omiſſa tamen analyſi, cum quod prolixam nimis operam poſcebant, ſi perſpicuè omnia exequi voluiſſem, tum quod relinquendum aliquid videbatur exercitationi noſtrorum, ſi qui erunt, Lectorum. Vale.*

Dat. Hagæ Com.
27 Apr. 1657.

DE

Digitized by Google

# DE RATIOCINIIS IN LUDO ALEÆ.

ETſi luſionum, quas ſola ſors moderatur, incerti ſolent eſſe eventus, attamen in his, quanto quis ad vincendum quàm perdendum propior ſit, certam ſemper habet determinationem. Ut ſi quis primo jactu unâ teſſerâ ſenarium jacere contendat, incertum quidem an vincet; at quantò veriſimilius ſit eum perdere quàm vincere, reipsâ definitum eſt, calculóque ſubducitur. Ita quoque, ſi cum aliquo certem hâc ratione, ut ternis luſibus conſtet victoria, atque ego jam unum luſum vicerim, incertum adhuc uter noſtrum prior tertii victor ſit evaſurus. Verùm quanti expectatio mea, & contra quanti illius, æſtimari debeat, certiſſimo ratiocinio conſequi licet, atque hinc definire, ſi ludum uti eſt imperfectum linquere inter nos convenerit, quantò major portio ejus quod depoſitum eſt mihi quàm adverſario meo tribuenda eſſet: vel etiam ſi quis in locum ſortemque meam ſuccedere cupiat, quo pretio me eam ipſi vendere æquum ſit. Atque hinc innumeræ quæſtiones exoriri poſſunt inter duos, tres, pluréſve colluſores. Cumque minimè vulgaris ſit hujuſmodi ſupputatio, & ſæpe utiliter adhibeatur, breviter hîc quâ ratione aut methodo expedienda ſit exponam, ac deinde etiam, quæ ad aleam ſive teſſeras propriè pertinent, explicabo.

Hoc autem utrobique utar fundamento: nimirum, in aleæ

ludo tanti æſtimandam eſſe cujuſque ſortem ſeu expectationem ad aliquid obtinendum, quantum ſi habeat, poſſit denuo ad ſimilem ſortem ſive expectationem pervenire, æquâ conditione certans. Ut, exempli gratiâ, ſi quis me inſcio alterâ manu 3 ſolidos occultet, alterâ 7 ſolidos, mihique optionem det ex utra manu ſolidos accipere malim; hoc tantundem mihi valere dico, ac ſi 5 ſolidi mihi dentur. Quoniam quinque ſolidos habens, denuo eò pervenire poſſum, ut æquam expectationem nanciſcar ad 3 vel 7 ſolidos obtinendos: idque æquo luſu contendens.

## Propositio I.

*Si* a *vel* b *expectem, quorum utrumvis æquè facilè mihi obtingere poſſit, expectatio mea dicenda eſt valere* $\frac{a+b}{2}$.

AD hanc regulam non ſolùm demonſtrandam, verùm etiam primitùs eruendam poſito $x$ pro eo quod æquivalet expectationi meæ, oportet me, quum $x$ habeo, rurſus ad ſimilem ſortem pervenire poſſe, æquâ conditione certantem. Ponatur itaque luſus eſſe talis, ut cum altero certem hâc conditione, ut quiſque deponat $x$, ac ut victor victo traditurus ſit $a$. Hic autem luſus juſtus eſt, & patet me hâc ratione æquam habere ſortem ad obtinendum $a$, ſi luſum perdam ſcilicet; aut $2x-a$, ſi vincam: tum enim obtineo $2x$, id nempe quod depoſitum eſt, de quo alteri erogandum eſt $a$. Quòd ſi autem $2x-a$ tantundem valeret atque $b$, æqua mihi ſors obtingeret ad $a$ quàm ad $b$. Pono itaque $2x-a \infty b$, & fit $x \infty \frac{a+b}{2}$, pro valore meæ expectationis. Cujus demonſtratio facilis eſt. Etenim habens $\frac{a+b}{2}$ poſſum cum alio certare, qui etiam $\frac{a+b}{2}$ deponere volet, hâc conditione ut

ut vincens victo ſit traditurus *a*. Quâ ratione ſimilis expectatio mihi obtinget ad obtinendum *a*, ſi perdam, aut ad obtinendum *b*, ſi vincam; tum enim obtineo $a+b$, id nempe quod depoſitum eſt, alterique inde concedo *a*.

In numeris. Si ad 3 vel 7 æqua ſors mihi obtingat, tum expectatio mea per hanc Propoſitionem valet 5; & certum eſt me 5 habentem rurſus ad eandem expectationem pervenire poſſe. Si enim cum alio certans 5 deponam, atque ille ſimiliter 5 deponat, hâc conditione, ut, qui vincit, alteri ſit daturus 3: erit hic luſus omnino juſtus, & patet mihi æquam obtingere ſortem ad obtinendum 3, ſi perdam, aut 7, ſi vincam: quoniam tunc obtineo 10, de quo alteri concedo 3.

## PROPOSITIO II.

*Si* a, b, *vel* c *expectem, quorum unumquodque pari facilitate mihi obtingere poſſit, expectatio mea æſtimanda eſt* $\frac{a+b+c}{3}$.

AD quod rurſus inveniendum, ponatur, ut ante, *x* pro valore expectationis meæ. Oportet ergo me, cùm *x* habeo, ad eandem expectationem pervenire poſſe juſto luſu. Ponatur luſus eſſe talis, ut cum duobus aliis ludam hâc conditione, ut quiſque noſtrum trium deponat *x*, & ut cum uno hoc pactum aggrediar, ſi ipſe victor evadat, mihi ſit daturus *b*, & ego ipſi traditurus ſim *b*, ſi idem mihi obtingat. Cum altero autem hanc ineam conditionem, ut ille ludum vincens mihi traditurus ſit *c*, aut ego ipſi ſim daturus *c*, ſi ego vincam. Et patet hunc ludum juſtum eſſe. Æquam autem hâc ratione ſortem habebo ad obtinendum *b*, ſi nimirum primus vincat, aut *c*, ſi ſecundus vincat, aut etiam $3x-b-c$ ſi ego vincam; tunc enim obtineo $3x$, quod depoſitum eſt, de quo uni concedo *b*, & alteri *c*. Quòd ſi $3x-b-c$ æquale fuerit ipſi *a*, eadem mihi obtingeret expe-

pectatio ad obtinendum $a$, quæ ad $b$, aut ad $c$. Pono itaque $3x - b - c \infty a$, & fit $x \infty \frac{a+b+c}{3}$, pro valore meæ expectationis. Eodem modo invenitur, ſi ad $a, b, c$, aut $d$ æqua ſors mihi obtingat, id tanti valoris eſſe, quanti $\frac{a+b+c+d}{4}$. Atque ita porrò.

## PROPOSITIO III.

*Si numerus caſuum, quibus mihi eveniet* a, *ſit* p, *numerus autem caſuum quibus mihi eveniet* b *ſit* q, *ſumendo omnes caſus æquè in proclivi eſſe: expectatio mea valebit* $\frac{pa+pq}{p+q}$.

AD hanc regulam eruendam, ponatur rurſus $x$ pro valore expectationis meæ: ergo oportet me, cùm $x$ habeo, ad eandem expectationem pervenire poſſe, ut ante, juſto luſu. Ad hoc autem tot colluſores ſumam, ut unà mecum numerum ipſius $p+q$ efficiant, quorum deponat quiſque $x$, ita ut depoſitum ſit $px+qx$, & quiſque ſibi ludat æquâ expectatione ad vincendum. Porrò cum tot ex hiſce colluſoribus, quot indicat numerus $q$, ſigillatim hoc pactum inibo, ut eorum qui vincat mihi ſit daturus $b$, aut ego contra ipſi idem $b$, ſi vincam. Similiter cum reliquis colluſoribus, conſtituentibus $p-1$ ſigillatim hanc conditionem aggrediar, ut eorum quiſque, qui ludum vincit, mihi ſit daturus $a$, & ego tantundem ($a$ ſcilicet) ipſi, ſi ego vincam. Et patet hunc luſum hâc conditione juſtum eſſe, nemine videlicet injuriam patiente. Deinde patet me nunc $q$ expectationis habere ad $b$, & $p-1$ expectationes ad $a$, & 1 expectationem (me nempe vincente) ad $px+qx-bq-ap+a$, tunc enim obtineo $px+qx$, id quod depoſitum eſt, de quo tradere debeo $b$ unicuique $q$ luſorum, & $a$ unicuique $p-1$ luſorum, quæ ſimul conficiunt $bq+pa-a$. Si itaque $qx+bx-bq-ap+a$ æqua-

æquale eſſet ipſi $a$, haberem $p$ expectationes ad $a$, (quandoquidem jam $p-1$ expectationes ad id habebam). & $q$ expectationes ad $b$, & ſic ad priorem meam exſpectationem rurſus perveniſſem. Quocirca porrò $px+qx-bq-ap+a \infty a$, & fit $x \infty \frac{ap+bq}{p+q}$, pro valore expectationis meæ, omnino ut in initio poſitum fuit.

In numeris. Si 3 mihi expectationes forent ad 13, & 2 expectationes ad 8, haberem per hanc regulam tantundem ac 11. Et facile eſt oſtendere, me, ſi 11 habeam, rurſus ad eandem expectationem pervenire poſſe. Ludens enim contra 4 alios, & quiſque noſtrum quinque deponens 11, cum duobus ex illis ſigillatim pactum inibo, ut horum qui vincat mihi ſit daturus 8, aut ego ipſi idem 8, ſi vincam. Similiter cum duobus reliquis, ut eorum quiſque, qui ludum vincit, mihi ſit daturus 13, aut ego ipſi tantundem, ſi ego vincam. Qui quidem luſus juſtus eſt. Et patet me hoc modo duas habere expectationes ad 8, nimirum ſi alteruter eorum, qui mihi 8 promiſerunt, vincat, & 3 expectationes ad 13, nimirum ſi alteruter reliquorum duorum, qui mihi 13 tradere debent, vincat, aut ſi ipſe ludum vincam: ego enim ludum vincens obtineo depoſitum, id eſt, 55, de quo unicuique duorum tradere debeo 13, & unicuique reliquorum duorum 8, ita ut & mihi relinquatur 13.

## PROPOSITIO IV.

*Ut igitur ad primò propoſitam quæſtionem veniamus, nimirum, de facienda diſtributione inter diverſos colluſores, quando eorum ſortes inæquales ſunt, opus eſt ut a facilioribus incipiamus.*

SUmpto itaque me cum aliquo certare, hoc pacto: ut qui priùs ter vicerit, quod depoſitum eſt, lucretur, & me jam bis viciſſe, alterum verò ſemel. Scire cupio, ſi luſum pro-

nunc abſumus. Quomodo autem quæque eſſectæ fuerint, quodque ſunt, eſſe cœperint, id nequaquam humano ingenio excogitari, aut conjecturis attingi poſſe, exiſtimo.

# F I N I S.

Digitized by Google

# CHRISTIANI HUGENII

# OPERA

# MISCELLANEA.

*TOMUS QUARTUS.*

Digitized by Google

## Tomi quarti contenta.

*De* Ratiociniis *in* Ludo Aleæ. 723.

Novus Cyclus Harmonicus. 745.

Varia *de* Optica. 755.

Experimenta Phyſica. 767.

Digitized by Google

# DE
# RATIOCINIIS
# IN
# LUDO ALEÆ
AUCTORE
## CHRISTIANO HUGENIO.



Digitized by Google

Digitized by Google

# CHRISTIANUS HUGENIUS

Clariſſimo Viro,

## D. FRANCISCO SCHOTENIO

*S. D.*

*Cum in editione elegantiſſimorum ingenii tui monumentorum, quam præ manibus nunc habes, Vir Clariſſime, id inter cætera te ſpectare ſciam, ut varietate rerum, quarum tractationem inſtituiſti, oſtendas quam latè ſe protendat divina Analytices ſcientia, facilè intelligo etiam illa plurimùm propoſito tuo inſervire poſſe, quæ de aleæ ratiociniis conſcripſimus; quantò enim minus rationis terminis comprehendi poſſe videbantur, quæ fortuita ſunt atque incerta, tantò admirabilior ars cenſebitur, cui iſta quoque ſubjacent. Quare cum in tui gratiam primùm illa exponenda ſuſceperim, túque digna exiſtimes, quæ ſimul cum ſubtiliſſimis tuis inventis in lucem exeant, adeo tibi non refragabor, ut etiam è re mea eſſe exiſtimem hâc potiſſimùm ratione ipſa in manus hominum pervenire. Quippe cum in re levi ac frivola operam collocaſſe videri alioqui poſſem, non tamen prorſus utilitatis expers ac nullius pretii cenſebitur, quòd tu veluti inter tua*

*adoptaveris, nec ſine multo labore è vernacula lingua noſtra in Latinam converteris. Quanquam, ſi quis penitiùs ea quæ tradimus examinare cœperit, non dubito quin continuò reperturus ſit rem non ut videtur ludicram agi, ſed pulchræ ſubtiliſſimæque contemplationis fundamenta explicari. Et Problemata quidem quæ in hoc genere proponuntur, nihilo minus profundæ indaginis viſum iri confido, quam quæ Diophanti libris continentur, voluptatis autem aliquanto plus habitura, cum non, ſicut illa, in nuda numerorum conſideratione terminentur. Sciendum verò, quod jam pridem inter præſtantiſſimos totâ Galliâ Geometras calculus hic agitatus fuerit, ne quis indebitam mihi primæ inventionis gloriam hac in re tribuat. Cæterùm illi, difficillimis quibuſque quæſtionibus ſe invicem exercere ſoliti, methodum ſuam quiſque occultam retinuêre, adeo ut a primis elementis univerſam hanc materiam evolvere mihi neceſſe fuerit. Quamobrem ignoro etiamnum an eodem mecum principio illi utantur; at in reſolvendis Problematîs pulchrè nobis convenire ſæpenumero expertus ſum. Horum Problematum nonnulla in fine operis addidiſſe me invenies, omiſſa tamen analyſi, cum quod prolixam nimis operam poſcebant, ſi perſpicuè omnia exequi voluiſſem, tum quod relinquendum aliquid videbatur exercitationi noſtrorum, ſi qui erunt, Lectorum. Vale.*

Dat. Hagæ Com.
27 Apr. 1657.

DE

Digitized by Google

# DE RATIOCINIIS IN LUDO ALEÆ.

ETſi luſionum, quas ſola ſors moderatur, incerti ſolent eſſe eventus, attamen in his, quanto quis ad vincendum quàm perdendum propior ſit, certam ſemper habet determinationem. Ut ſi quis primo jactu unâ teſſerâ ſenarium jacere contendat, incertum quidem an vincet; at quantò veriſimilius ſit eum perdere quàm vincere, reipsâ definitum eſt, calculóque ſubducitur. Ita quoque, ſi cum aliquo certem hâc ratione, ut ternis luſibus conſtet victoria, atque ego jam unum luſum vicerim, incertum adhuc uter noſtrum prior tertii victor ſit evaſurus. Verùm quanti expectatio mea, & contra quanti illius, æſtimari debeat, certiſſimo ratiocinio conſequi licet, atque hinc definire, ſi ludum uti eſt imperfectum linquere inter nos convenerit, quantò major portio ejus quod depoſitum eſt mihi quàm adverſario meo tribuenda eſſet: vel etiam ſi quis in locum ſortemque meam ſuccedere cupiat, quo pretio me eam ipſi vendere æquum ſit. Atque hinc innumeræ quæſtiones exoriri poſſunt inter duos, tres, pluréſve colluſores. Cumque minimè vulgaris ſit hujuſmodi ſupputatio, & ſæpe utiliter adhibeatur, breviter hîc quâ ratione aut methodo expedienda ſit exponam, ac deinde etiam, quæ ad aleam ſive teſſeras propriè pertinent, explicabo.

Hoc autem utrobique utar fundamento: nimirum, in aleæ

ludo tanti æſtimandam eſſe cujuſque ſortem ſeu expectationem ad aliquid obtinendum, quantum ſi habeat, poſſit denuo ad ſimilem ſortem ſive expectationem pervenire, æquâ conditione certans. Ut, exempli gratiâ, ſi quis me inſcio alterâ manu 3 ſolidos occultet, alterâ 7 ſolidos, mihique optionem det ex utra manu ſolidos accipere malim; hoc tantundem mihi valere dico, ac ſi 5 ſolidi mihi dentur. Quoniam quinque ſolidos habens, denuo eò pervenire poſſum, ut æquam expectationem nanciſcar ad 3 vel 7 ſolidos obtinendos: idque æquo luſu contendens.

## Propositio I.

*Si* a *vel* b *expectem, quorum utrumvis æquè faciſe mihi obtingere poſſit, expectatio mea dicenda eſt valere* $\frac{a+b}{2}$.

Ad hanc regulam non ſolùm demonſtrandam, verùm etiam primitùs eruendam poſito $x$ pro eo quod æquivalet expectationi meæ, oportet me, quum $x$ habeo, rurſus ad ſimilem ſortem pervenire poſſe, æquâ conditione certantem. Ponatur itaque luſus eſſe talis, ut cum altero certem hâc conditione, ut quiſque deponat $x$, ac ut victor victo traditurus ſit $a$. Hic autem luſus juſtus eſt, & patet me hâc ratione æquam habere ſortem ad obtinendum $a$, ſi luſum perdam ſcilicet; aut $2x-a$, ſi vincam: tum enim obtineo $2x$, id nempe quod depoſitum eſt, de quo alteri erogandum eſt $a$. Quòd ſi autem $2x-a$ tantundem valeret atque $b$, æqua mihi ſors obtingeret ad $a$ quàm ad $b$. Pono itaque $2x-a \infty b$, & fit $x \infty \frac{a+b}{2}$, pro valore meæ expectationis. Cujus demonſtratio facilis eſt. Etenim habens $\frac{a+b}{2}$ poſſum cum alio certare, qui etiam $\frac{a+b}{2}$ deponere volet, hâc conditione ut

ut vincens victo ſit traditurus $a$. Quâ ratione ſimilis expectatio mihi obtinget ad obtinendum $a$, ſi perdam, aut ad obtinendum $b$, ſi vincam; tum enim obtineo $a+b$, id nempe quod depoſitum eſt, alterique inde concedo $a$.

In numeris. Si ad 3 vel 7 æqua ſors mihi obtingat, tum expectatio mea per hanc Propoſitionem valet 5; & certum eſt me 5 habentem rurſus ad eandem expectationem pervenire poſſe. Si enim cum alio certans 5 deponam, atque ille ſimiliter 5 deponat, hâc conditione, ut, qui vincit, alteri ſit daturus 3: erit hic luſus omnino juſtus, & patet mihi æquam obtingere ſortem ad obtinendum 3, ſi perdam, aut 7, ſi vincam: quoniam tunc obtineo 10, de quo alteri concedo 3.

## PROPOSITIO II.

*Si* a, b, *vel* c *expectem, quorum unumquodque pari facilitate mihi obtingere poſſit, expectatio mea æſtimanda eſt* $\frac{a+b+c}{3}$.

AD quod rurſus inveniendum, ponatur, ut ante, $x$ pro valore expectationis meæ. Oportet ergo me, cùm $x$ habeo, ad eandem expectationem pervenire poſſe juſto luſu. Ponatur luſus eſſe talis, ut cum duobus aliis ludam hâc conditione, ut quiſque noſtrum trium deponat $x$, & ut cum uno hoc pactum aggrediar, ſi ipſe victor evadat, mihi ſit daturus $b$, & ego ipſi traditurus ſim $b$, ſi idem mihi obtingat. Cum altero autem hanc ineam conditionem, ut ille ludum vincens mihi traditurus ſit $c$, aut ego ipſi ſim daturus $c$, ſi ego vincam. Et patet hunc ludum juſtum eſſe. Æquam autem hâc ratione ſortem habebo ad obtinendum $b$, ſi nimirum primus vincat, aut $c$, ſi ſecundus vincat, aut etiam $3x-b-c$ ſi ego vincam; tunc enim obtineo $3x$, quod depoſitum eſt, de quo uni concedo $b$, & alteri $c$. Quòd ſi $3x-b-c$ æquale fuerit ipſi $a$, eadem mihi obtingeret expe-

pectatio ad obtinendum *a*, quæ ad *b*, aut ad *c*. Pono itaque $3x-b-c \propto a$, & fit $x \propto \frac{a+b+c}{3}$, pro valore meæ expectationis. Eodem modo invenitur, ſi ad *a*, *b*, *c*, aut *d* æqua ſors mihi obtingat, id tanti valoris eſſe, quanti $\frac{a+b+c+d}{4}$. Atque ita porrò.

## PROPOSITIO III.

*Si numerus caſuum, quibus mihi eveniet* a, *ſit* p, *numerus autem caſuum quibus mihi eveniet* b *ſit* q, *ſumendo omnes caſus æquè in proclivi eſſe: expectatio mea valebit* $\frac{pa+pq}{p+q}$.

AD hanc regulam eruendam, ponatur rurſus *x* pro valore expectationis meæ: ergo oportet me, cùm *x* habeo, ad eandem expectationem pervenire poſſe, ut ante, juſto luſu. Ad hoc autem tot colluſores ſumam, ut unà mecum numerum ipſius $p+q$ efficiant, quorum deponat quiſque *x*, ita ut depoſitum ſit $px+qx$, & quiſque ſibi ludat æquâ expectatione ad vincendum. Porrò cum tot ex hiſce colluſoribus, quot indicat numerus *q*, ſigillatim hoc pactum inibo, ut eorum qui vincat mihi ſit daturus *b*, aut ego contra ipſi idem *b*, ſi vincam. Similiter cum reliquis colluſoribus, conſtituentibus $p-1$ ſigillatim hanc conditionem aggrediar, ut eorum quiſque, qui ludum vincit, mihi ſit daturus *a*, & ego tantundem (*a* ſcilicet) ipſi, ſi ego vincam. Et patet hunc luſum hâc conditione juſtum eſſe, nemine videlicet injuriam patiente. Deinde patet me nunc *q* expectationis habere ad *b*, & $p-1$ expectationes ad *a*, & 1 expectationem (me nempe vincente) ad $px+qx-bq-ap+a$, tunc enim obtineo $px+qx$, id quod depoſitum eſt, de quo tradere debeo *b* unicuique *q* luſorum, & *a* unicuique $p-1$ luſorum, quæ ſimul conficiunt $bq+pa-a$. Si itaque $qx+bx-bq-ap+a$ æqua-

æquale eſſet ipſi $a$, haberem $p$ expectationes ad $a$, (quandoquidem jam $p-1$ expectationes ad id habebam). & $q$ expectationes ad $b$, & ſic ad priorem meam exſpectationem rurſus perveniſſem. Quocirca porrò $px+qx-bq-ap+a \infty a$, & fit $x \infty \frac{ap+bq}{p+q}$, pro valore expectationis meæ, omnino ut in initio poſitum fuit.

In numeris. Si 3 mihi expectationes forent ad 13, & 2 expectationes ad 8, haberem per hanc regulam tantundem ac 11. Et facile eſt oſtendere, me, ſi 11 habeam, rurſus ad eandem expectationem pervenire poſſe. Ludens enim contra 4 alios, & quiſque noſtrum quinque deponens 11, cum duobus ex illis ſigillatim pactum inibo, ut horum qui vincat mihi ſit daturus 8, aut ego ipſi idem 8, ſi vincam. Similiter cum duobus reliquis, ut eorum quiſque, qui ludum vincit, mihi ſit daturus 13, aut ego ipſi tantundem, ſi ego vincam. Qui quidem luſus juſtus eſt. Et patet me hoc modo duas habere expectationes ad 8, nimirum ſi alteruter eorum, qui mihi 8 promiſerunt, vincat, & 3 expectationes ad 13, nimirum ſi alteruter reliquorum duorum, qui mihi 13 tradere debent, vincat, aut ſi ipſe ludum vincam: ego enim ludum vincens obtineo depoſitum, id eſt, 55, de quo unicuique duorum tradere debeo 13, & unicuique reliquorum duorum 8, ita ut & mihi relinquatur 13.

## PROPOSITIO IV.

*Ut igitur ad primò propoſitam quæſtionem veniamus, nimirum, de facienda diſtributione inter diverſos colluſores, quando eorum ſortes inæquales ſunt, opus eſt ut a facilioribus incipiamus.*

SUmpto itaque me cum aliquo certare, hoc pacto: ut qui priùs ter vicerit, quod depoſitum eſt, lucretur, & me jam bis viciſſe, alterum verò ſemel. Scire cupio, ſi luſum pro-

ſequi non velimus, ſed pecuniam, de qua certamus, prout æquum eſt, partiri, quantum ejus mihi obtingeret.

Primò conſiderare oportet luſus, qui utrobique deficiunt. Certum enim eſt, ſi inter nos convenerit, verbi gratiâ, ut quod depoſitum eſt lucretur is, qui priùs vigeſies vicerit, & ego decies & novies vicero, at alter decies & octies, tantò meliorem fore eo caſu ſortem meam quantò hîc melior eſt, ubi à tribus luſibus binos conſequutus ſum, ille verò unum duntaxat: quia nimirum utrobique mihi unus tantummodo luſus ſed ipſi duo deficiunt.

Porrò ad inveniendum quanta pars utrique debeatur, advertendum eſt quid fieret, ſi in luſu pergeremus. Certum enim eſt, ſi primum ludum vincerem, me præſcriptum numerum impleturum & omne depoſitum conſecuturum, id quod vocetur *a*. Quod ſi autem alter primum ludum vinceret, tunc æquata utriuſque ſors foret, (quippe utrique uno adhuc deficiente ludo,) adeoque cederet cuique $\frac{1}{2}a$. Manifeſtum autem eſt me æquam habere ſortem ad primum ludum vincendum aut perdendum, ita ut mihi nunc æqua ſit expectatio ad obtinendum *a* aut $\frac{1}{2}a$: quod ipſum per 1^mam Propoſitionem tantum eſt ac ſi utriuſque ſortis dimidium, id eſt, $\frac{3}{4}a$, haberem; & relinquitur alteri meo colluſori $\frac{1}{4}a$, quæ ipſius portio ſtatim ab initio eodem modo reperiri potuiſſet. Unde patet, eum, qui ludum meum in ſe recipere vellet, mihi $\frac{3}{4}a$ pro eo tradere debere; ac proinde ſemper tria contra unum deponere eum poſſe, qui unum ludum vincere contendat, priuſquam alter duos vincat.

## PROPOSITIO V.

*Ponamus unum mihi deficere ludum & colluſori meo tres luſus. Oportet hîc facere diſtributionem.*

ADvertamus itaque rurſus, in quo eſſemus ſtatu, ſi ego vel ipſe primum vinceret luſum. Si ego vincerem, obtinerem depoſitum, id eſt, *a*; quod ſi autem ille primum ludum vince-

ce-

ceret, deficerent ipſi duo luſus & mihi unus; ac proinde in eodem ſtatu eſſemus, qui in præcedenti Propoſitione poſitus fuit, mihique obtingeret $\frac{3}{4}a$, ut ibi oſtenſum eſt. Itaque pari facilitate vel $a$ mihi obtinget vel $\frac{3}{4}a$, id quod tantum eſt, per $1^{mam}$ Propoſitionem, ac $\frac{7}{8}a$. Et relinquitur $\frac{1}{8}a$ colluſori meo; ita ut mea ſors ad ſortem illius ſe habeat, ſic ut 7 ad 1.

Quemadmodum autem ad hunc calculum requiſitus eſt præcedens, ita rurſus hicce inſervit ſequenti: nimirum, ſi ponamus mihi unum ludum deficere & colluſori meo $4^{or}$ luſus. Et invenitur eodem modo, mihi deberi $\frac{15}{16}$ iſtius quod depoſitum eſt, & ipſi $\frac{1}{16}$.

## PROPOSITIO VI.

*Ponamus mihi deficere duos luſus & colluſori meo tres luſus.*

Fiet itaque primo luſu, vel ut mihi unus luſus deficiat & ipſi tres (unde mihi per præcedentem Propoſitionem obtinget $\frac{7}{8}a$); vel ut cuique noſtrum adhuc duo luſus deficiant, unde mihi debebitur $\frac{1}{2}a$, quandoquidem ſic utrique æqua ſors futura eſt. Eſt mihi autem æqualis facilitas ad primum ludum vincendum aut perdendum; ita ut mihi æqua ſit expectatio ad obtinendum $\frac{7}{8}a$ aut $\frac{1}{2}a$, id quod mihi valet $\frac{11}{16}a$, per $1^{mam}$ Propoſitionem. Et debentur mihi 11 partes ejus quod depoſitum eſt, & colluſori meo 5 partes.

## PROPOSITIO VII.

*Ponamus mihi deficere duos luſus & colluſori meo quatuor.*

Fiet itaque, ut, ſi primum ludum vincam, unum ludum vincere debeam & alter quatuor; vel, ſi eundem perdam, duos & alter tres. Ita ut æqua mihi ſors obtingat ad $\frac{15}{16}a$

aut $\frac{12}{16}a$, id quod tantum valet ac $\frac{13}{16}a$, per 1mam Propoſitionem. Unde patet, eum meliorem habere ſortem, qui duos luſus vincere debet dum alter quatuor, quàm eum, qui unum dum alter duos. In hoc enim poſteriori caſu, nimirum ipſius 1 ad 2, portio mea, per 4tam Propoſitionem, eſt $\frac{3}{4}a$, quæ minor eſt quàm $\frac{13}{16}a$.

## PROPOSITIO VIII.

*Nunc verò ponamus tres eſſe colluſores, quorum primo ut & ſecundo unus luſus deficiat, ſed tertio duo luſus.*

UT igitur inveniatur primi pars, rurſus advertendum eſt, quid ipſi deberetur, ſi vel ipſe vel alter reliquorum duorum primum luſum vinceret. Si ipſe vinceret, haberet depoſitum, id quod ſit $a$. Quòd ſi ſecundus vinceret, primus nihil haberet, quoniam ſecundus ſic luſui finem impoſuiſſet. At ſi tertius vinceret, tunc cuique trium adhuc unus deficeret luſus, ideóque tam primo quàm utrique reliquorum deberetur $\frac{1}{3}a$. Et fit primo una expectatio ad $a$, una ad 0, & una ad $\frac{1}{3}a$, (quandoquidem æquè facilè contingere poteſt cuique trium ut primum ludum vincat,) quod ipſi tantundem valet ac $\frac{4}{9}a$, per 2dam Propoſitionem. Et fit ſimiliter ſecundo $\frac{4}{9}a$, & remanet tertio $\frac{1}{9}a$. Cujus pars ſeparatim etiam inveniri potuerat, atque inde reliquorum partes determinari.

PRO-

## PROPOSITIO IX.

*Ut tot colluſorum, quot quis voluerit, ex quibus uni plures & alii pauciores luſus deficiunt, cujuſque pars inveniatur, conſiderandum eſt, quid illi, cujus partem invenire volumus, deberetur, ſi vel ipſe, vel quiſlibet reliquorum primum ſequentem ludum vinceret. Horum autem partes ſi in unam ſummam colligantur, & aggregatum per numerum colluſorum dividatur, quotiens oſtendet unius quæſitam partem.*

POnamus tres eſſe colluſores A, B, & C, & ipſi A unum ludum deficere, ipſi B duos luſus, & ipſi C ſimiliter duos luſus. Invenire oportet, quid ipſi B, ejus quod depoſitum eſt, debeatur. Id quod vocetur $q$.

Primò examinandum eſt, quid ipſi B deberetur, ſi vel ipſe, vel A, vel C primum ſequentem ludum vinceret.

Si A vinceret, ludo finem impoſuiſſet, ac per conſequens ipſi B deberetur o. Si ipſe B vinceret, deficeret illi adhuc unus luſus, & ipſi A unus luſus, at ipſi C duo luſus. Quocirca ipſi B hoc in caſu deberetur $\frac{4}{9}q$, per 8vam Propoſitionem.

Denique ſi C primum ſequentem ludum vinceret, tunc ipſis A & C ſingulis unus deficeret luſus, ſed ipſi B duo luſus, ac per conſequens ipſi B deberetur $\frac{1}{9}q$, per eandem Propoſitionem 8vam. Nunc autem in unam ſummam colligendum eſt, id quod in tribus hiſce caſibus ipſi B deberetur: nimirum, o, $\frac{4}{9}q$, $\frac{1}{9}q$: quorum ſumma eſt $\frac{5}{9}q$. Quod ipſum diviſum per 3, numerum colluſorum, dat $\frac{5}{27}q$. Quæ ipſius B quæſita pars eſt. Demonſtratio autem hujus patet ex 2da Propoſitione. Quoniam enim B æquam habet ſortem ad obtinendum o, $\frac{4}{9}q$, vel $\frac{1}{9}q$, habet per 2dam Propoſitionem tantundem ac



Digitized by Google

$\frac{0+\frac{1}{3}q+\frac{1}{3}q}{3}$, id eſt, $\frac{2}{9}q$. Et certum eſt, hunc diviſorem 3 eſſe numerum colluſorum.

Ut autem inveniatur, quid cuipiam debeatur in quolibet caſu, videlicet ſi vel ipſe vel aliquis reliquorum primum ſequentem ludum vincat: oportet ſimpliciores caſus primò inveſtigare, & horum medio ſequentes. Nam ſicut hic ultimus caſus ſolvi non potuit priuſquam ille octavæ Propoſitionis calculo ſubductus eſſet, in quo deficientes luſus erant 1, 1, 2, ita etiam cujuſque pars ſupputari nequit in tali caſu, ubi deficientes luſus ſunt 1, 2, 3, quin primùm calculo ſubductus ſit caſus deficientium luſuum 1, 2, 2, quemadmodum jam fecimus, & præterea ille, in quo luſus deficientes ſunt 1, 1, 3; qui ſimiliter per 8vám Propoſitionem ſupputari potuiſſet. Atque hoc quidem pacto conſequenter ſupputare licet caſus omnes, qui in ſequenti tabula comprehenduntur, & infinitos alios.

Tabula pro 3 colluſoribus.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Luſus, qui ipſis deficiunt. | 1 . 1 . 2 | 1 . 2 . 2 | 1 . 1 . 3 | 1 . 2 . 3 |
| Eorum partes. | 4 . 4 . 1 | 17 . 5 . 5 | 13 . 13 . 1 | 19 . 6 . 2 |
| | 9 | 27 | 27 | 27 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Luſus, qui ipſis deficiunt. | 1 . 1 . 4 | 1 . 1 . 5 | 1 . 2 . 4 | 1 . 2 . 5 |
| Eorum partes. | 40 . 40 . 1 | 121 . 121 . 1 | 178 . 58 . 7 | 542 . 179 . 8 |
| | 81 | 243 | 243 | 729 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Luſus, qui ipſis deficiunt. | 1 . 3 . 3 | 1 . 3 . 4 | 1 . 3 . 5 |
| Eorum partes. | 65 . 8 . 8 | 616 . 82 . 31 | 629 . 87 . 13 |
| | 81 | 729 | 729 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Luſus, qui ipſis deficiunt. | 2 . 2 . 3 | 2 . 2 . 4 | 2 . 2 . 5 | 2 . 3 . 3 | 2 . 3 . 4 | 2 . 3 . 5 |
| Eorum partes. | 34 . 34 . 13 | 338 . 338 . 53 | 353 . 353 . 23 | 133 . 55 . 55 | 451 . 195 . 83 | 1433 . 635 . 119 |
| | 81 | 729 | 729 | 243 | 729 | 2187 |

Quod ad teſſeras attinet, de iis hæ quæſtiones proponi poſſunt: videlicet, quotâ vice unâ teſſerâ ſenarium jacere periclitandum ſit, aut aliquod reliquorum punctorum. Item quo-

quotâ vice duos ſenarios duabus teſſeris, aut tres ſenarios tribus teſſeris jacere ſit tentandum. Et plures aliæ hujuſmodi quæſtiones. Ad quas ſolvendas advertendum eſt.

Primò unius teſſeræ ſex eſſe jactus diverſos, quorum quivis æquè facilè eveniat. Sumo enim teſſeram habere figuram cubi perfectam.

Porrò duarum teſſerarum 36 eſſe diverſos jactus, quorum ſimiliter quivis æquè facilè obtingere poteſt. Nam ratione cujuſque jactus unius teſſeræ poteſt unus ſex jactuum alterius teſſeræ ſimul contingere. Et ſexies 6 efficiunt 36 jactus.

Item trium teſſerarum eſſe 216 jactus diverſos. Nam ratione cujuſque 36 jactuum duarum teſſerarum poteſt unus ſex jactuum, qui in 3tia ſunt, evenire. Et ſexies 36 efficiunt 216 jactus.

Eodem modo patet, quatuor teſſerarum jactus eſſe ſexies 216, id eſt, 1296; atque ſic ulteriùs jactus quotlibet teſſerarum ſupputari poſſe, ſumendo ſemper pro acceſſione unius teſſeræ ſexies jactus præcedentis.

Porrò notandum, duarum teſſerarum unum duntaxat eſſe jactum, qui 2 aut 12 puncta efficiat, duos verò jactus, qui 3 aut 11 puncta efficiant. Si enim teſſeras vocemus A & B, patet, ad 3 puncta jacienda in A unum & in B duo, vel in B unum & in A duo puncta reperiri poſſe. Similiter ad 11 puncta jacienda in A quinque & in B ſex, vel in A ſex & in B quinque puncta parêre poſſe. Quatuor punctorum tres ſunt jactus, videlicet, ipſius A 1 & B 3 puncta; vel ipſius A 3 & B 1 punctum; vel ipſius A 2 & B 2 puncta.

Decem punctorum ſimiliter tres ſunt jactus.

Quinque vel novem punctorum 4or ſunt jactus.

Sex vel octo punctorum 5que ſunt jactus.

Septem punctorum 6 ſunt jactus.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| In tribus teſſeris reperiuntur | 3 vel 18 | punctorum | 1 | jactus. |
| | 4 vel 17 | | 3 | |
| | 5 vel 16 | | 6 | |
| | 6 vel 15 | | 10 | |
| | 7 vel 14 | | 15 | |
| | 8 vel 13 | | 21 | |
| | 9 vel 12 | | 25 | |
| | 10 vel 11 | | 27 | |

PRO-

Digitized by Google

## Propositio X.

### *Invenire, quot vicibus ſuſcipere quis poſſit, ut unâ teſſerâ 6 puncta jaciat.*

Si quis primâ vice ſenarium jacere contendat, apparet unum eſſe caſum, quo vincat, habeatque id, quod pignoris loco depoſitum eſt; quinque verò eſſe caſus, quibus perdat, & nihil habeat. Sunt enim 5 jactus contra ipſum, & tantùm unus pro ipſo. Quod autem depoſitum eſt vocetur *a*. Eſt itaque ipſi unica expectatio ad obtinendum *a*, ſed quinque ad obtinendum 0; id quod per 2^dam Propoſitionem tantundem valet ac $\frac{1}{6}a$. Et manet pro eo qui ipſi hunc caſum offert $\frac{5}{6}a$. Ita ut tantummodo 1 contra 5 deponere poſſit, qui primâ vice ſuſcipere velit.

Qui duabus vicibus ſemel ſenarium jacere certet, ſors ejus hoc pacto computatur. Si primâ vice 6 jaciat, obtinet *a*. Si diverſum eveniat, unus ipſi reſtat jactus, qui ex præcedenti tantum valet, quantum $\frac{1}{6}a$. Atqui ut primâ vice 6 jaciat, unus tantùm caſus eſt, & quinque caſus, quibus diverſum eveniat. Itaque ab initio unus caſus eſt, qui det ipſi *a*; & quinque qui dent $\frac{1}{6}a$, id quod per 2^dam Propoſitionem valet $\frac{11}{36}a$. Unde contracertanti luſori cedit reliquum $\frac{25}{36}a$; adeo ut ſors utriuſque ſive æſtimatio expectationis eam ſervet rationem, quam 11 ad 25; id eſt minus quàm 1 ad 2.

Hinc eodem modo calculo ſubducitur, quòd ſors ejus, qui tribus vicibus ſemel ſenarium jacere ſuſcipit, ſit futura $\frac{91}{216}a$; ita ut 91 contra 125 deponere poſſit; id eſt, paulò minus quàm 3 ad 4.

Qui quatuor vicibus idem ſuſcipit, ſors ejus eſt $\frac{671}{1296}a$; ita ut 671 contra 625 deponere poſſit; id eſt, plùs quam 1 ad 1.

Qui quinque vicibus idem ſuſcipit, ſors ejus eſt $\frac{4651}{7776}a$, & poteſt 4651 contra 3125 deponere; id eſt, paulò minus quàm 3 ad 2.

Qui

Qui ſex vicibus idem ſuſcipit, ſors ejus eſt $\frac{31031}{46656}a$, & poteſt 31031 contra 15625 deponere; id eſt, paulò minus quàm 2 ad 1.

Atque ita conſequenter quilibet jactuum numerus inveniri poteſt. Sed licet majori compendio progredi, ut in ſequenti Propoſitione oſtendetur; ſine quo calculus aliàs multò prolixior foret.

## PROPOSITIO XI.

*Invenire, quot vicibus ſuſcipere quis poſſit, ut duabus teſſeris 12 puncta jaciat.*

Si quis primâ vice duos ſenarios jacere contendat, apparet unum eſſe caſum, quo vincat, id eſt, ad obtinendum $a$; & 35 eſſe caſus, quibus perdat ſive nihil habeat, quoniam 36 ſunt jactus. Itaque habet, per 2dam Propoſitionem, $\frac{1}{36}a$.

Qui duabus vicibus idem ſuſcipit, ſi primâ vice duos ſenarios jaciat, obtinebit $a$; ſi verò primâ vice diverſum eveniat, unus ipſi reſtat jactus, id quod ipſi, per illud quod jam dictum eſt, valet $\frac{1}{36}a$.

Atqui ut primâ vice duos ſenarios jaciat, unus tantum eſt caſus, ſed 35 caſus, quibus diverſum eveniat. Itaque ab initio unus caſus eſt, qui det ipſi $a$, & 35 qui dent $\frac{1}{36}a$; id quod per 2dam Propoſitionem valet $\frac{71}{1296}a$. Et remanet contracertanti $\frac{1225}{1296}a$.

Ex his invenire licet, qualis ſit ei ſors aut pars, qui idem ſuſcipit quaternis jactibus, prætereundo caſum eum, cùm quis illud ternis jactibus ſuſcipit.

Etenim, qui 4or vicibus duos ſenarios jacere contendit, ſi illud 1ma aut 2da vice faciat, obtinet $a$; ſin minùs, reſtant ipſi duo jactus, qui per illud quod ſuperiùs dictum eſt, valent $\frac{71}{1296}a$. Sed propter eandem ratio-

tionem habet etiam 71 caſus, ut ex duobus primis jactibus ſemel duos ſenarios jaciat, contra 1225 caſus, quibus diverſum eveniat. Habet itaque ab initio 71 caſus, qui ipſi dent $a$, & 1225 caſus, qui dent ipſi $\frac{71}{1296}a$. Quod ipſi per 2dam Propoſitionem valet $\frac{178991}{1679616}a$. Et remanet contracertanti $\frac{1500625}{1679616}a$. Id quod oſtendit eorum ſortes eſſe ad ſe invicem, ut 178991 ad 1500625.

E quibus porrò eâdem ratione invenitur expectatio ejus, qui 8 vicibus ſemel duos ſenarios jacere certat. Ac inde rurſus expectatio ejus, qui idem ſuſcipit 16 vicibus. Atque ex hujus expectatione, ut etiam ex expectatione illius, qui iſtud 8 vicibus ſuſcipit, invenitur expectatio ejus, qui illud 24 vicibus in ſe recipit. In qua operatione, quoniam præcipuè quæritur in quo numero jactuum æqualis ſors incipiat, inter eum qui id ſuſcipit & eum qui offert, licebit à numeris, qui alioquin in immenſum excreſcerent, poſteriores aliquot characteres auferre. Atque ita quidem reperio ei, qui illud 24 vicibus ſuſcipit, adhuc aliquid deficere; tumque demum eum potiorem conditionem inire, cùm 25 jactibus aggreditur.

## Propositio XII.

### *Invenire quot teſſeris ſuſcipere quis poſſit, ut primâ vice duos ſenarios jaciat.*

HOc autem tantundem eſt, ac ſi quis ſcire velit, quoto jactu quiſpiam unâ teſſerâ ſuſcipere poſſit, ut bis ſenarium jaciat. Quòd ſi quis duobus jactibus ſuſciperet, obtingeret ei, per ea quæ ante oſtenſa ſunt, $\frac{11}{36}a$. Qui illud tribus jactibus in ſe reciperet, ſi primus ejus jactus ſenarius non foret, haberet adhuc duos jactus, quorum uterque ſenarius eſſe deberet, id quod tantundem

dem valere dictum eſt ac $\frac{1}{36}a$. At verò primo ejus jactu exiſtente ſenario; opùs eſt ut ex duobus jactibus non niſi ſemel ſenarium jaciat. Quod per 10 Propoſitionem tantundem valet ac ſi $\frac{11}{36}a$ haberet. Atqui certum eſt ipſum unum habere caſum, quo primâ vice ſenarium jaciat; & quinque caſus quibus diverſum eveniat. Habet itaque ab initio unum caſum ad $\frac{11}{36}a$, & 5 caſus ad $\frac{1}{36}a$, id quod per 2dam Propoſitionem tantundem valet ac $\frac{16}{216}a$ ſeu $\frac{2}{27}a$. Hoc pacto aſſumendo continuè unum jactum ampliùs, invenitur 10 jactibus unâ teſſerâ, aut 10 teſſeris primo jactu ſuſcipi poſſe, ut duo ſenarii jaciantur, idque cum lucro.

## PROPOSITIO XIII.

*Si cum alio ludam duabus teſſeris unum ſolummodo jactum, hâc conditione, ut, ſi ſeptenarius eveniat, ego vincam; at ille, ſi denarius obtingat; ſi vero quidquam aliud accidat, ut tum id quod depoſitum eſt æqualiter dividamus: Invenire qualis iſtius pars cuique noſtrum debeatur.*

QUoniam 36 jactuum, qui duabus teſſeris proveniunt, 6 jactus exiſtunt ſeptem punctorum, & 3 jactus decem punctorum, reſtant adhuc 27 jactus, qui ludum æquare poſſunt; id quod ſi fiat, cuique noſtrum debebitur $\frac{1}{2}a$. Verùm ſi id non obtingat, habebo 6 caſus, quibus vincam, id eſt, ut $a$ habeam; & 3 caſus, quibus diverſum eveniat, nihilque habeam: id quod per 2dam Propoſitionem tantundem eſt ac ſi tali caſu $\frac{2}{3}a$ haberem. Habeo itaque ab initio 27 caſus ad $\frac{1}{2}a$ & 9 caſus ad $\frac{2}{3}a$, id quod, per 2dam Propoſitionem, tantundem eſt ac $\frac{13}{24}a$. Et remanet contracertanti $\frac{11}{24}a$.



Digitized by Google

## PROPOSITIO XIV.

*Si ego & alius duabus teſſeris alternatim jaciamus, hâc conditione, ut ego vincam ſimul atque ſeptenarium jaciam, ille vero quam primum ſenarium jaciat; ita videlicet, ut ipſi primum jactum concedam: invenire rationem meæ ad ipſius ſortem.*

POnatur, ſortem meam valere $x$, & id quod depoſitum eſt vocari $a$; eritque ſors alterius $\infty$ $a-x$. Et patet, quandocunque ipſius vices jaciendi revertuntur, ſortem meam tum rurſus debere eſſe $\infty$ $x$. At quandocunque meæ vices ſunt ut jaciam, ſors mea pluris æſtimanda eſt. Ponatur itaque pro ejus valore $y$. Jam quoniam ex 36 jactibus reperiuntur 5 in 2 teſſeris, qui colluſori meo ſenarium dare luſuſque victorem reddere poſſunt; & 31 jactus, quibus diverſum eveniat, id eſt, qui meas jaciendi vices promovent: habebo, priuſquam jacit, 5 caſus ad obtinendum $o$, & 31 caſus ad obtinendum $y$. id quod per 3tiam Propoſitionem valet $\frac{31\,y}{36}$. Poſuimus autem caſum meum à principio eſſe $\infty$ $x$. Quocirca erit $\frac{31\,y}{36}$ $\infty$ $x$, adeoque $y$ $\infty$ $\frac{36\,x}{31}$. Deinde poſitum fuit, vicibus meis venientibus, ſortem meam valere $y$. Ego verò jacturus, habeo 6 caſus ad obtinendum $a$, quandoquidem 6 jactus reperiuntur 7 punctorum, qui me victorem reddunt; habeoque 30 caſus, quibus vices colluſoris mei revertuntur, id eſt, ut mihi obtineam $x$. id quod per 3tiam Pro-

Propoſitionem valet $\frac{6a + 30x}{36}$. Hoc autem cum ſit $\infty y$, erit, invento, ut ante, $\frac{36x}{31} \infty y$, $\frac{30x + 6a}{36} \infty \frac{36x}{31}$. Unde invenitur $x \infty \frac{31a}{61}$, valor meæ ſortis. Et per conſequens colluſoris mei erit, $\frac{30a}{61}$; ita ut ratio ſortis meæ ad illius ſortem ſit, ut 31 ad 30.

## *Coronidis loco ſubjungantur ſequentia Problemata.*

### PROBLEMA I.

A & B unà ludunt duabus teſſeris, hâc conditione, ut A vincat, ſi ſenarium jaciat, at B ſi ſeptenarium jaciat. A primò unum jactum inſtituet; deinde B duos jactus conſequenter; tum rurſus A duos jactus, atque ſic deinceps, donec hic vel ille victor evadat. Quæritur ratio ſortis ipſius A ad ſortem ipſius B? Reſp. ut 10355 ad 12276.

### PROBLEMA II.

Tres colluſores A, B & C aſſumentes 12 calculos, quorum 4 albi & 8 nigri exiſtunt, ludunt hâc conditione: ut, qui primus ipſorum velatis oculis album calculum elegerit, vincat; & ut prima electio ſit penes A, ſecunda penes B, & tertia penes C, & tum ſequens rurſus penes A, atque ſic deinceps alternatim. Quæritur, quænam futura ſit ratio illorum ſortium?

### PROBLEMA III.

A certat cum B quòd ipſe ex 40 chartis luſoriis, id eſt, 10 cujuſque ſpeciei, 4 chartas extracturus ſit; ita

ut ex unaquaque ſpecie habeat unam. Et invenitur ratio ſortis A ad ſortem B ut 1000 ad 8139.

## PROBLEMA IV.

Aſſumptis, ut ante, 12 calculis, 4 albis & 8 nigris, certat A cum B, quòd velatis oculis 7 calculos ex iis exempturus ſit, inter quos 3 albi erunt. Quæritur ratio ſortis ipſius A ad ſortem ipſius B.

## PROBLEMA V.

A & B aſſumentes ſinguli 12 nummos ludunt tribus teſſeris hâc conditione: ut, ſi 11 puncta jaciantur, A tradat nummum ipſi B; at ſi 14 puncta jaciantur, B tradat nummum ipſi A; & ut ille ludum victurus ſit, qui primùm omnes habuerit nummos. Et invenitur ratio ſortis ipſius A ad ſortem ipſius B, ut 244140625 ad 282429536481.

# FINIS.

Digitized by Google

# CHRISTIANI HUGENII
## NOVUS CYCLUS
# HARMONICUS.

Digitized by Google

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Digitized by Google

# CHRISTIANI HUGENII
## NOVUS CYCLUS
# HARMONICUS.

### *Litteræ D. Hugenii de Cyclo Harmonico.*

NOvam tibi mitto de Muſica obſervationem. Spectat hæc prima Scientiæ illius fundamenta, id eſt, tonorum, qui in cantu & Inſtrumentorum fabrica obſervantur, determinationem. Quicunque licet parum verſati ſint in parte illa Theoriæ, norunt, quid ſit, quod vocatur Temperamentum, quod tonos illos moderatur & quam neceſſarium illud ſit in harmonia tuborum Organi vel chordarum Clavecymbali.

Celebriores auctores, uti Zarlinus & Salinas, illud referunt inter inventa pulcherrima & utiliſſima, quæ in muſicis detegi poſſunt; & uterque contendit ſe primum Temperamentum hoc ad examen revocaſſe, & demonſtrationibus Mathematicis conſtituiſſe. Ante illos experientia & neceſſitas illud quidem aliquo modo jam introduxerant, licet vera menſura & methodus nondum eſſet cognitæ. Inventio hujus Temperamenti in cauſa fuit, ut merito negligerentur omnes veterum Tetrachordarum & Diapaſonorum diviſiones quarum pleræquæ abſurdæ & uſus nullius erant in compoſitione plurimarum partium: hac etiam inventione noſtrum ſyſtema tonorum magis abundat conſonantiis, magiſque eſt juxta naturam cantus, quam illorum erat.



Digitized by Google

Pono notas eſſe proportiones, in quibus conſiſtunt perfectæ conſonantiæ, ſcilicet: Quintam audiri, quando, poſt ſonum editum ex motu chordæ integræ, duæ tertiæ partes ipſius agitantur: vel proportionem, a qua conſonantia hæc pendet, eſſe ut 3 ad 2; Quartæ proportionem eſſe ut 4 ad 3; Tertiæ majoris ut 5 ad 4; Tertiæ minoris ut 6 ad 5; Sextæ majoris ut 5 ad 3; Sextæ minoris ut 8 ad 5. Et quantum ad Temperamentum, iidem autores, quos modo memoravi, nos docent, ut hoc applicetur inſtrumentis, conſonantiam Quintam minuendam eſſe quarta parte *Commatis* ut vocant, quæ adeo exigua eſt diminutio, ut auris hanc difficulter percipiat, & nullam inde capiat moleſtiam; cum *Comma* integrum ſit ratio inter tonum integræ chordæ, & hujus tonum quando parte $\frac{1}{81}$ minuitur. Sequitur inde, Quartam auctam eſſe hac ipſâ exigua quantitate. Tertia minor pariter, eſt diminuta $\frac{1}{4}$ Commatis, & conſequenter Sexta major in tantum aucta; ſed Tertia major perfectionem ſervat, ut & ideo etiam Sexta minor.

Juxta has conſonantiarum menſuras, diſponuntur omnes inſtrumentorum toni, tam Diatonici quam Chromatici, quos addidere Muſici, & pariter toni Enarmonici, quando & hi ut magis completa ſit ſymphonia adjiciuntur.

Obſervatio autem noſtra hæc eſt, ſi dividatur Octava in 31 partes æquales, quod fiet quærendo 30 medias proportionales inter totam chordam (quæ ſumitur pro regula Harmonicâ) & ejus dimidium, dabitur in tonis, quos producunt longitudines hæ, Syſtema parum admodum ab iſto quod modo memoravi ex Temperamento deductum, ita ut nemo auri quantumvis ſubtili præditus differentiam percipiet; quod tamen novum Syſtema toto cælo ab alio differet, novaſque afferet utilitates tum in Theoriam cum in Praxin.

Salinas inventum hoc dividendi octavam in 31 partes æquales memorat ſed ut hoc culpet, & P. Merſennus pariter poſt ipſum hanc rejicit diviſionem, unde mihi facile fides habenda erit, me nihil ex illis autoribus mutuatum eſſe; ſed ſi & hoc feciſſem, ſatis a me præſtitum crederem, ſi præſtantiam

tiam ejus diviſionis ex Geometriæ principiis demonſtraverim, & illam vindicaverim adverſus injuſtum duorum illorum celebrium Scriptorum pronunciatum.

In lib. 3. Muſices Salinæ integrum exſtat caput de hac diviſione, cujus inſcriptio eſt, *De prava conſtitutione cujuſdam inſtrumenti, quod in Italia citra quadraginta annos fabricari cæptum eſt, in quo reperitur omnis tonus in partes quinque diviſus*; Dicit inſtrumentum hoc nominis Archicymbali donatum fuiſſe, illudque fuiſſe *incerti autoris*; Muſicos quoſdam admodum idoneos id magni feciſſe, præcipue quia continebat omnia intervalla, omneſque conſonantias (ut credebant, ait) adſcendendo, & deſcendendo & quia poſt certam periodum rediebatur ad eundem ſonum vel æquipollentem, cum eo a quo initium factum erat; Quia Octava diviſa erat in 31 partes æquales, quas vocabant Dieſas (ſeu tonos perfectos) quarum tonus debebat continere 5; magnus ſemitonus 3; parvus 2; Tertia major 10; Tertia minor 8; Quarta 13; Quinta 18; Sexta minor 21; Sexta major 23. Sed addit, cum tentaſſent tale diſponere inſtrumentum hoc ſonum dediſſe admodum ingratum, & qui inſigniter aures præſentium offendebat, unde concludit, talem diviſionem deviare ab omni ratione harmonica, ſive examinetur ſecundum menſuram juſtarum conſonantiarum ſive Temperamenti. Præter experientiam & aliud affert argumentum deductum ex Methodo in hac diviſione adhibita. P. Merſennus etiam contendit ſe bene illam refutaviſſe. Erravit uterque, quia illos latebat Methodus dividendi Octavam in 31 partes æquales; quod probabiliter & ipſi inventores non potuere; requiritur enim cognitio Logarithmorum, qui nondum illorum nequidem Salinæ tempore erant inventi. Tandem novum hoc Temperamentum, quod adeo repudiant, omnium præſtantiſſimum merito dicitur, omnia habens commoda quæ ipſi tribuebantur; præcipuæ ſimplicitatem quam communicat Theoriæ tonorum, & parum admodum differt ab eo, quo utuntur omnes, ut auris differentiam non percipiat uti computatione probabo.



Digitized by Google

Dico ergo primum, Quintam noſtræ diviſionis non ſuperare Quintas Temperamenti quam $\frac{1}{110}$ Commatis, quæ differentia, auditu nullo modo percipi poteſt; ſed quæ alioquin daret iſtam conſonantiam tanto magis perfectam.

Quartæ conſequenter Temperamenti ordinarii non excedunt noſtras niſi illâ $\frac{1}{110}$ commatis, & hæ tendunt etiam tanto magis ad perfectionem.

Tertiæ minores ſunt minores $\frac{3}{110}$ vel circiter $\frac{1}{37}$ Commatis quàm in temperamento, & Sextæ majores in tantum excedunt Sextas majores Temperamenti; utræque fateor recedunt à perfecta proportione, ſed videmus differentiam $\frac{1}{37}$ Commatis non eſſe ſenſibilem, nec augere ſenſibiliter $\frac{1}{4}$ Commatis, qua conſonantiæ in Temperamento aberrant à veris.

Tandem Tertiæ majores ſuperant Tertias Temperamenti, quæ ſunt perfectæ, $\frac{4}{110}$ vel quaſi $\frac{1}{28}$ Commatis, quæ adeo exigua eſt differentia, ut niſi pro perfectis; non obſtante hoc augmento haberi queant; quid enim facit $\frac{1}{28}$ Commatis, cum $\frac{1}{4}$ adeo facile patiamur.

Deducimus ex exiguis omnibus hiſce differentiis, Organum aut Clavecymbalum conſtitutum juxta Temperamentum ordinarium, etiam diſpoſitum eſſe juxta novam diviſionem, quantum aure poterit diſcerni. Si vero quis ſibi hac in parte magis deſiderat ſatisfacere, & exactiſſime conſtituere inſtrumentum juxta 31 partes æquales Octavæ, tantum dividenda eſt monochorda juxta numeros, qui habentur in ſequenti Tabula, &, poſitâ totâ chordâ, æquiſonâ cum C Clavecymbali aut Organi, diſponere pariter alias chordas vel tubos, cum ſonis, ex memorata diviſione oriundis & qui audiuntur poſito pectine in locis notatis. Quod vero ad Archicymbalum de quo Salinas loquitur, ſpectat, dubito, an non habuerit 31 palmulas in quavis octava; ſed quoniam non poterit ſine confuſione talis abacus adhiberi præ multitudine palmularum, præſtaret meâ ſententiâ diſponere 31 chordas ſimplices pro quavis octavâ, quod poteſt fieri ſine difficultate; & conſtructis palmulis, quæ elevant ſubſilia, omnibus æqualis longitudinis, altitudinis, & latitu-

titudinis, quæ latitudo ſit ; palmulæ vulgaris, deinde ſuperimponendus erit abacus mobilis, cum claviculis in inferiori parte ſingularum palmularum fixis; ſemel ita diſpoſiti hi ut chordæ, quæ in quavis octava adhibentur, ſonent, omnibus transpoſitionibus inſervient. Quæ ergo fient ſine labore per tonos, ſemitonos, &c. uſque ad quintas partes tonorum; & certum eſt, omnes tonos & conſonantias in ſingulis tranſpoſitionibus æque accuratas eſſe, quod utile & amœnum erit. Olim Pariſiis conſtrui curavi, tales abacos mobiles ſuperimponendos abacis vulgaribus Clavecymbalorum tranſpoſitionibus plurimis, licet non omnibus completis, inſervientes; quod inventum approbarunt & imitati ſunt periti in muſicis varii.

Sed ut quis certus ſit de veritate illorum, quæ ſuperius dixi, inſpiciat Tabulam ſequentem cujus contenta ut & uſum explicabo.

| *Diviſio Octavæ in partes 31. æquales.* | | | | *Diviſio Octavæ ſecundum Temperamentum vulgare.* | |
|---|---|---|---|---|---|
| I. | II. | III. | IV. | V. | VI. |
| N 97106450 | | | | | |
| 4,6989700043 | 50000 | UT$^{x}$ | C$^{x}$ | 50000 | 4,6989700043 |
| 4,7086806493 | 51131 | | | | |
| 4,7183912943 | 52278 | | | | |
| 4,7281019393 | 53469 | SI | B$^{x}$. | 53499 | 4,7283474859 |
| 4,7378125843 | 54678 | | | | |
| 4,7475232293 | 55914 | SA | B | 55902 | 4,7474250108 |
| 4,7572338743 | 57179 | * | * | 57243 | 4,7577249674 |
| 4,7669445193 | 58471 | | | | |
| 4,7766551643 | 59794 | LA | A | 59814 | 4,7768024924 |
| 4,7863658093 | 61146 | | | | |
| 4,7960764543 | 62528 | * | * | 62500 | 4,7958800173 |
| 4,8057870993 | 63942 | SOL$^{x}$ | G$^{x}$ | 64000 | 4,8061799740 |
| 4,8154977443 | 65388 | | | | |
| 4,8252083893 | 66866 | SOL | G | 66874 | 4,8252574989 |
| 4,8349190343 | 68378 | | | | |
| 4,8446296793 | 69924 | | | | |
| 4,8543403243 | 71506 | FA$^{x}$ | F$^{x}$ | 71554 | 4,8546349804 |
| 4,8640509693 | 73122 | | | | |
| 4,8737616143 | 74776 | FA | F | 74767 | 4,8737125054 |
| 4,8834722593 | 76467 | | | | |
| 4,8931829043 | 78196 | | | | |
| 4,9028935493 | 79964 | MI | E | 80000 | 4,9030899870 |
| 4,9126041943 | 81772 | | | | |
| 4,9223148393 | 83621 | MA | E$^{b}$ | 83592 | 4,9221675119 |
| 4,9320254843 | 85512 | * | * | 85599 | 4,9324674685 |
| 4,9417361293 | 87445 | | | | |
| 4,9514467743 | 89422 | RE | D | 89443 | 4,9515449935 |
| 4,9611574193 | 91444 | | | | |
| 4,9708680643 | 93512 | * | * | 93459 | 4,9706225184 |
| 4,9805787093 | 95627 | UT$^{x}$ | C$^{x}$ | 95702 | 4,9809224750 |
| 4,9902893543 | 97789 | | | | |
| 4,9999999993 | 100000 | UT | C | 100000 | 5,0000000000 |

Digitized by Google

## *Tabulæ Explicatio.*

Secunda columna continet numeros qui exprimunt longitudines Chordarum; quibus habentur 31 intervalla æqualia ſecundum novam diviſionem; Chorda tota continet partes 100000 & 50000 ejus dimidium dant Octavam.

A latere in 3ª. columna ſunt ſyllabæ, quæ nobis in cantu inſerviunt, & * pro quibuſdam chordis enarmonicis, quarum prope ſol* eſt maxime neceſſaria.

In 4ª. columna ſunt litteræ quæ ordinario inſerviunt ad deſignandos tonos.

Numeri 2æ. columnæ ope numerorum col. 1æ. detecti fuere, hi ſunt illorum Logarithmi reſpectivi, ad quos habendos diviſi logarithmum numeri 2. qui eſt 0, 3010299956 per 31. unde venit numerus N. 97106450, quem addidi continuo Logarithmo num. 50000, qui eſt 4. 6989700043. & hiſce additionibus detegimus omnes Logarithmos hujus columnæ uſque ad maximum 4, 9999999993, qui parum deficiens a 5, 0000000000, (in cujus locum ſubſtitui poteſt) demonſtrat bene ſubductum calculum. Qui Logarithmos intelligunt norunt ita ineundam computationem, ſi quærantur 30 numeri proportionales inter 100000 & 50000.

5ª. columna continet in numeris longitudines chordarum juxta Temperamentum ordinarium, & in 6ª. columna ſunt eorum numerorum Logarithmi.

Poſſem explicare quomodo eos ſupputaverim, & pariter, quomodo id Temperamentum poſſet detegi, ſi nondum eſſet repertum; ſed id foret nimis longum, & ſufficiet, demonſtrare methodum examinandi, & numerorum ἀκρίβειαν, & omnia quæ dixi de nova diviſione & de ratione quam habet cum Temperamento.

Ponamus, determinandum eſſe, an Quinta *Ut*, *Sol*, temperamenti vulgaris, minor ſit ¼ Commatis, quam vera Quinta, cujus ratio eſt trium ad duo. A log. *Ut*, qui eſt 5, 0000000000 ſubſtraho log. *Sol* qui eſt 4, 8252574989, id, quod reſtat

O,

0, 1747425011, exhibet quantitatem Quintæ Temperamenti.

Pariter differentia Logarithmorum 3 & 2 quæ in tabulis Logarithmorum habetur 1760912594, exhibet quantitatem Quintæ perfectæ; hinc ſubſtraho Quintam Temperamenti inventi & reſtat 13487583; id quod debet dare Log. ¼ Commatis; & hoc verum eſt; nam log. Commatis toni id eſt differentia logar. 81 & 80 eſt 53950319, cujus Quarta pars eſt 13487580. Si velimus examinare an Quævis Quinta novæ diviſionis ut *Re*, *La*, differat a vera ¼ minus $\frac{1}{110}$ Commatis, debemus a Log. *Re*, qui eſt 4,9514467743, ſubſtrahere Log. *La*, qui eſt 4,7766551643, reſtat 1747916100, quem ſubtraho a Logarithmo veræ Quintæ qui erat 1760912594, reſtat 12996494, qui minor eſt Log. Quartæ partis Commatis, ſcilicet 13487580; a quo igitur eum ſubtraho & reſtat 491086: Debemus nunc videre, quam partem Commatis hoc faciat; idcirco divido Log. Commatis, ſcilicet 53950319 per 491086, quotiens eſt fere $\frac{1}{110}$. Ita ut pateat, noſtram Quintam non ſuperari ¼ Commatis a Quinta perfecta, ſed $\frac{1}{110}$ Commatis deeſſe. Eodem modo poteſt examinari quidquid ſpectat Temperamentum; nihil enim in computationibus Muſicis inſtituendis Logarithmorum uſui anteponendum.

FINIS.

# CHRISTIANI HUGENII
# VARIA
# DE
# OPTICA.



Digitized by Google

# CHRISTIANI HUGENII VARIA DE OPTICA.

## I.

## *Excerpta ex literis Dni Hugenii, Academiæ Regiæ Scientiarum Socii, ad Autorem Diarii Eruditorum de Catoptrico conſpicillo Dni Newtoni.*

VT deſideras tibi ſententiam meam exponam de Teleſcopio Dni Newtoni. Licet nondum viderim hujus inventi effectum, illud me poſſe aſſerere perſuaſum habeo, pulcrum & ingenioſum eſſe, proſperumque eventum ſortiturum; ſi modo ad ſpecula cava formanda detegi queat, de quo minime deſperandum puto, materia quæ poliri poſſit, ut vivide radios reflectat, ut vitrum. Commoda hujus conſpicilli præ illis, in quibus vitra tantum adhibentur, ſunt, primo quod ſpeculum cavum, licet Sphæricum, multo melius colligat radios parallelos in unum punctum, quam noſtra vitra Sphærica, uti Geometrice poteſt demonſtrari. Unde ſequitur duorum conſpicillorum ejuſdem longitudinis, quorum unum erit novæ illius inventionis, alterum ordinario vitro objectivo inſtructum, primum, magnam habens aperturam, majori copia collecturum radios ab objectis procedentes, licet parvum ſpeculum quoſdam inter-

cipiat, ideoque magis poterit amplificare objecta, quam alterum. Adeo ut Teleſcopium novum dimidiæ aut tertiæ partis longitudinis conſpicilli ordinarii, aut forte etiam minus, æqualem effectum cum hoc præſtabit.

Secunda utilitas eſt, hoc invento vitari incommodum, quod a vitris objectivis ſeparari nequit, mutua nempe duarum ſuperficierum ad ſe inclinatio. Nam licet hæc parva ſit, tamen obeſt radiis, qui vitra ad latera tranſeunt & magis oberit, ſi vellemus uti vitris hyperbolicis vel ellipticis quibus majores concedendæ forent aperturæ.

Tertiam utilitatem cenſeo, reflexione Speculi metallici non perire tot radios quot in vitris, quæ in utraque ſuperficie reflectunt notabilem radiorum quantitatem & multos intercipiunt obſcuritate ſuæ materiæ.

Cum præterea difficulter admodum vitrum detegatur quod longioribus conſpicillis inſerviri queat, quia ſæpe non ubique homogeneum eſt, quartum novi Teleſcopii commodum erit, in metallo nil præter ſuperficiei perfectionem requiri.

Qui viderunt conſpicillum D^ni^ Newtoni, obſervarunt, illud aliquâ difficultate dirigi ad objecta; ſed huic malo occurri poteſt ſatis facile, jungendo huic conſpicillo alterum exacte parallelum, per quod primùm quæretur objectum. Deſiderabitur fateor alter obſervator, ſi conſpicillum catoptricum ſit magnum, quoniam ille, qui obſervat, in illa obſervat extremitate, quæ maxime elevata eſt. Sed ad incommodum hoc non attendendum eſt, ſi ſpectetur utilitas inventi: Si loco ſpeculorum Sphæricorum poſſent obtineri parabolica exacte formata & polita, conſpicilla hæc effectum præſtarent quod de vitris ellipticis vel hyperbolicis ſperavimus; credo autem id in ſpeculis facilius obtineri poſſe.

CON-

Digitized by Google

## II.
## CONSTRUCTIO PROBLEMATIS OPTICI.
### Propoſitio 39 Libri v. Alhazeni, & 22 lib. vi. Vitellionis.

*Puncta B, C, & circulus E K, cujus centrum eſt A, data ſunt in eodem plano; inveniendum eſt punctum K in peripheria circuli, ita ut lineæ B K, C K faciant cum linea A K angulos inter ſe æquales.* TAB. LVI. fig. I.

DUctis AB, AC; fiat AC, AF:: AF, AQ; & AB, AE:: AE, AP: ſint etiam AP, & AQ, bifariam diviſæ in R & S; in angulo BAC ſint perfecta parallelogramma PAQH & ARZS. In RZ producta ſumantur ZY & ZX, utraque æqualis lineæ quæ poteſt differentiam inter quadrata QS & ZS: fiat XV æqualis XY & parallela AB; & lateribus XV & XY deſcribatur hyperbola, quæ tranſibit per puncta Q & H, uti patet per conſtructionem; hyperbola hæc QXH occurret circulo in puncto K, quod quæritur.

Ductis KO & KI parallelis AC & AB, quarum KI occurrit YX in puncto D. Ob hyperbolam rectangulum YDX æquale eſt quadrato KD ordinatæ, vel quadrato OR; & rectangulum YTX æquale eſt quadrato HT, vel quadrato PR; & demto a rectangulo YTX, rectangulum YDX & a quadrato PR, quadratum OR, ſupererit rectangulum RDT vel AIQ, quod æquale erit rectangulo AOP. PO ergo eſt ad AI, vel OK ipſi æqualem, ut QI ad AO, vel IK; & ductis lineis KP, KQ triangula KOP, KIQ erunt ſimilia & ideo æquiangula; idcirco anguli APK, AQK, qui iidem ſunt, vel ſupplementa angulorum æqualium OPK, IQK erunt inter ſe æquales; ſed per conſtructionem AB, AE vel AK, :: AK vel AE, AP; ideo duo triangula BAK, KAP ſunt ſimilia, & ob eandem cauſam duo triangula CAK, KAQ, ſunt etiam ſimilia; ideo angulus BKA eſt æqualis angulo APK, &

angulus CKA æqualis ang. AQK, ſed demonſtravimus angulos APK & AQK eſſe æquales, ergo anguli BKA, CKA erunt inter ſe æquales Q.E.D.

Si punctum H cadat in circumferentiam circuli punctum H erit punctum K, quod quæritur & lineæ HP, KP, KO in unicam HP coaleſcunt; & ſimiliter lineæ HQ, KQ, KI in unam HQ, & quæ ſuperius demonſtrata ſunt & hic locum habent, in quo caſu Hyperbolâ non indigemus.

---

## III.

## ALITER.

### *Dato Speculo Cavo aut Convexo, itemque Oculo & Puncto Rei viſæ, invenire Punctum Reflexionis.*

TAB. LVI. fig. 2. ESto ſpeculum ex ſphæra quæ Centrum habeat A punctum; oculus vero ſit in B, & punctum viſibile in C, Planumque ductum per A, B, C, faciat in ſphæra Circulum D*d*, in quo invenienda ſint Reflexionis Puncta. Per tria Puncta A, B, C, deſcribatur Circuli Circumferentia, cujus ſit Centrum Z; occurrat autem ei producta AE, Perpend. BC, in R; & ſit duabus RA, OA, tertia Proportionalis NA; eritque NM, Parallela BC, altera Aſymptoton. Rurſus ſint Proportionales EA, ½ AO, AI, & ſumma IY æquali IN, ducatur YM Parallela AZ; eaque erit altera Aſymptotos. Denique ſumptis IX, IS, quæ ſingulæ poſſint dimidium quadratum AO, una cum quadrato AI; erunt Puncta X & S in Hyperbola, aut ſectionibus oppoſitis D*d*, ad inventas Aſymptotos deſcribendis, quarum interſectiones cum Circumferentia DO, oſtendent Puncta Reflexionis quæſita. Conſtructio hæc, in omni Caſu, quo Problema ſolidum eſt, locum habet, præterquam in uno, ubi non Hyperbola ſed Parabola deſcribenda eſt; cum nimirum Circumferentia per Puncta A, B, C, deſcripta, tangit Rectam AE.

COM-

## IV.

## COMPENDIUM.

Ductâ lineâ AT, parallelâ CB, eaque biſecta in V, punctum hoc eſt illud, per quod tranſire debet una Hyperbolarum Oppoſitarum, quarum Aſymptoti inventæ fuerunt YM, MN. TAB. LVI. fig. 3.

Sed en Tibi bonam illam Conſtructionem, quæ in omnibus Caſibus obtinet. Sit Circulus datus ED, cujus Centrum eſt A; Puncta data, B & C. TAB. LVI. fig. 4.

Ductis Lineis AB, AC, fiant Proportionales BA (Radius Circuli) & FA: Eodem modo CA, (Radius Circuli) & GA. Tum jungatur FG, eaque biſecetur in H; & per hoc punctum ducantur Lineæ LHK, MHN, ſe invicem interſecantes ad Angulos Rectos, quarumque LHK ſit Parallela ei quæ biſecat Angulum BAC. Hæ ſunt duæ Aſymptoti Hyperbolarum deſcribendarum per puncta F & G, & quarum una tranſibit etiam per Centrum A, quarum Interſectiones cum Circuli Peripheria notabunt puncta Reflexionis quæſita.

## V.

## ALIA SOLUTIO.

*Problema* Alhazeni.] *Dato Circulo, cujus Centrum A, Radius AD, & punctis duobus B, C; invenire punctum H in Circumferentia Circuli dati, unde ductæ HB, HC, faciant ad Circumferentiam Angulos æquales.* TAB. LVI. fig. 5.

Ponatur Inventum, ductaque AM recta, quæ biſariam ſecet Augulum BAC, ducatur ei perpendicularis HF, itemque BM, CL. Jungatur porrò AH, cui perpendicularis ſit HE; rectiſque BH, HC, occurrat AM in punctis K, G.

Sit

| | |
|---|---|
| Sit jam $AM = a$<br>$MB = b$<br>$AL = c$<br>$LC = n$<br>Radius $AD = d$<br>$AF = x$<br>$FH = y$ | Quia ergo æquales Anguli KHE & CHZ, ſive EHG; eſtque EHA angulus rectus; erit ut KE ad EG, ita KA ad AG. Quia verò BM ad MK, ut HF ad FK, erit, ut BM + HF ad HF, ita MF ad FK, i.e. $b+y : y :: a-x : \frac{ay-xy}{b+y}$, add. $FA = x$ fit $KA = \frac{ay+bx}{b+y}$. |

Rurſus, quia CL ad LG, ut HF ad FG, erit permutando & dividendo CL − HF ad HF, ut LF ad FG, $n-y : y :: c-x : \frac{cy-xy}{n-y}$, quâ ablatâ ab $AF = x$, fit $GA = \frac{nx-cy}{n-y}$. Eſt autem $EA = \frac{dd}{x}$, quia Proportionales FA, AH, AE: Ergo EA − GA, hoc eſt, EG, $= \frac{dd}{x} - \frac{nx+cy}{n-y}$. Et KA − EA, hoc eſt, $KE = \frac{ay+bx}{b+y} - \frac{dd}{x}$.

Sed diximus, quod KE ad EG, ut KA ad AG; i.e. $\frac{ay+bx}{b+y} - \frac{dd}{x} : \frac{dd}{x} - \frac{nx+cy}{n-y} :: \frac{ay+bx}{b+y} : \frac{nx-cy}{n-y}$.

Unde invenitur

$$2anxxy + 2bnx^3 - ddbnx - ddnxy = + naddy + bddx$$
$$- 2acxyy - 2bcxxy + ddbcy + ddcyy \quad - addyy - bddxy$$

Eſt autem $\frac{2bbc}{a}x^3 = \frac{2bbcddx}{a} - \frac{2bbcyyx}{a}$, quia $xx = dd - yy$.

Et quia $n = \frac{bc}{a}$, ergo $\frac{-2bbcxyy}{a} - \frac{ddbcyx}{a} - 2acxyy + ddcyy = - addyy - bddxy$:

Et

Et diviſis omnibus per $y$ & ductis in $a$

$$-2bbcxy-ddbcx-2aacxy+ddcay=-aaddy-bddax$$

$$abddx-cbddx+acddy+aaddy=2aacxy+2bbcxy$$

$$\frac{abddx-cbddx+acddy+aaddy}{2aac+2bbc}=xy,$$ quæ æquatio eſt ad Hyperbolam.

Vel quia $bc=na$, $\frac{abddx-anddx+acddy+aaddy}{2aac+2bbc}=xy.$

Sit $\frac{add}{aa+bb}=p$; Ergo $\frac{pbx-pnx+pcy+pay}{2c}=xy.$

Unde porrò non difficulter invenitur ſequens Conſtructio: jungantur BA, AC, & applicato ſeorſim ad utramque Quadrato Radii AD, fiant inde AP, AQ; & juncto PQ, dividatur ipſa bifariam in R, & per punctum R ducantur, RD, RN, ſeſe ad Rectos Angulos ſecantes, quorumque RD, ſit parallela AM, quae dividet bifariam Angulum BAC. Erunt jam RD, RN Aſymptoti oppoſitarum Hyperbolarum, quarum altera per Centrum A tranſire debet, quæque ſecabunt Circumferentiam in punctis H quæſitis. Tranſibunt autem Hyperbolæ per Puncta P, Q. TAB. LVI. fig. 6.

Ratio Conſtructionis apparet, ductis P$\gamma$, & Q$\zeta$, perpendicularibus in AM. Fit enim A$\gamma = \frac{add}{aa+bb}$ ſive $p$; & A$\zeta=\frac{ap}{c}$. Item P$\gamma=\frac{pn}{c}$, & Q$\zeta=\frac{pb}{c}$. Quare AO $=\frac{pc+pa}{2c}$, & OR $=\frac{pb-pn}{2c}$. Unde Cætera facilia.

---

*pag. præced. lin. pen.* lege $-2acxyy$
*lin ult.* lege $-addyy-bddxy$:



Digitized by Google

## VI.

## *Excerpta ex litteris D^ni. Hugenii Acad. Reg. ſcient. Socii, ad auctorem Diarii Paris. de novo Microſcopio ex Hollandia allato.*

Microſcopium hoc ex unico formatur exiguo globulo vitreo, ſimili illis; quibus in Hollandia & Anglia animalcula fuere obſervata in aqua puteali & pluvia, ut & illa in qua piper fuit maceratum, de quibus egiſti in 9. & 11. diario hujus anni (1678); ſed globuli de quibus nunc ago aliis hiſce minores ſunt.

Inter ipſos quos ex Hollandia attuli quidam magnitudine non ſuperant arenæ granulum; alii adeo exigui ſunt ut vix videri queant, quare objecta in immenſum amplificant; eo enim hæc majora apparent quo globuli ſunt minores.

Objectum obſervandum inter vitri laminam & lapidis ſpecularis lamellam includitur; hæc machinæ adaptantur quæ mihi aliis huc uſque uſitatis magis commoda videtur. Exigua guttula aquæ, in qua per duos aut tres dies piper fuit maceratum, ita incluſa, magna videtur natantibus piſciculis bene repleta piſcina.

Quæ pecularia circa aquam hanc obſervavi, ne quæ in diario veſtro ſunt relata iterum memorem, hæc ſunt; ex omni pipere non eadem generantur animalcula; piper quoddam animalcula ceteris majora format, ſive hoc a piperis vetuſtate pendeat, ſive ab alia cauſa, quæ in ſequentibus detegi poterit.

Similia animalcula ex aliis ſeminibus ut ex ſemine coriandri etiam producuntur.

Hoc idem obſervavi in ſucco Betulæ, ubi per quinque aut ſex dies hunc ſervaveram.

Quidam animalcula viderunt in aqua in qua nux aromatica, aut caſia, maceratæ fuere: & probabile admodum eſt in multis aliis rebus ſimilia detegi poſſe.

Quis

Digitized by Google

Quis forte defendet animalcula haec corruptione, aut fermentatione, generari; ſed alia dantur quorum origo ab hac diverſa eſt, talia ſunt quæ in animalium ſemine deteguntur, quæ cum hoc ipſo nata videntur, & tanta copia obſervantur ut totum ſemen quaſi ex hiſce conſtet.

Translucida omnia ſunt, celerrime moventur, & ranis, antequam horum pedes formentur, ſimilia ſunt.

Hæc animalcula in Hollandia primum fuere obſervata, & horum inventio admodum mihi utilis videtur, & quæ opus ſuppeditabit illis qui in animalium geneſin inquirunt.

# FINIS.

Digitized by Google

# CHRISTIANI HUGENII
# EXPERIMENTA
# PHYSICA.

Digitized by Google

Digitized by Google

# CHRISTIANI HUGENII
# EXPERIMENTA
# PHYSICA.

## *Excerpta ex literis Dni Hugenii, Academiæ regiæ ſcientiarum Socii, ad Auctorem Diarii Eruditorum, de Phænomenis aquæ aëre purgatæ.*

ANtequam tibi communicarem quæ obſervavi de ſuſpenſione aquæ in vacuo, altera vice experimenta inſtituere volui, ut de obſervationibus olim a me factis certus eſſem, & ut melius penetrare poſſem in cauſas miri adeo effectus. Primum tibi ipſas referam obſervationes, & dein pergam ad conjecturas de ipſarum cauſa.

Experimenta quæ illuſtris Boyleus anno 1661 publicavit, cum deſcriptione machinæ Pneumaticæ mihi ab eo tempore dederunt occaſionem examinandi hanc materiam; Unum ex experimentis illius eſt, ſi tubo vitreo, 4 pedes longo, aqua repleto, cujus extremitas aperta, everſo tubo, immergitur aqua vitro contento, ſuperimponas recipiens vel vas, unde aër educitur, poſt exhauſtum aërem, quantum ope machinæ fieri poteſt, aqua tubi deſcendet in vitrum, donec ad altitudinem unius tantum pedis ſuſtineatur, ſuperiore tubi parte aquâ & aëre manente vacuâ. Cenſet optime, aquam ad illam altitudinem unius pedis ſupra ſuperficiem aquæ in vitro hæ-

hærere propter aërem in recipiente ſuperſtitem, & qui ope machinæ, non ſatis exactæ, annihilari non potuit.

Similem conſtrui machinam curaveram, & licet nondum mutaveram quæ in ſequentibus correxi, ita tamen omnia adaptaveram, ut inſtituto experimento memorato aqua in tubo ad libellam aquæ in vitro deſcenderit; Quare in inſtituendo experimento non tubo longitudinis memoratæ indigebam. TAB. LVI. fig. 7. Adhibui tubum novem pollicum cum globo cavo in extremitate ut patet in hac figurâ.

Concipiendum eſt vitrum CC in totum aquâ repleri, extremitatemque apertam immergi aquâ in vitro D; utrumque obtegitur vaſe B, cujus os apertum applicatur molli cuidam cimento, quo lamina AA induitur; hæc perforata eſt in medio parvo foramine, per quod exit aër, quando agitatur antlia; ſi adhibita aqua frigida experimentum inſtituatur in totum vas C evacuatur, donec aqua ad libellam aquæ in vitro D deſcendat.

## EXPERIMENTUM I.

### *Aqua, ſublatâ aëris preſſione, hæret in tubo.*

SEd ad finem menſis Decembris ejuſdem anni 1661. cum reliquiſſem aquam illam in vacuo per 24 horas, (quo plane purgatur bullis aëris quas ejicit, quando adhibetur frigida) cumque implevissem vas C, admiratus vidi, licet optime eduxerim aërem ex vaſe B, aquam nullatenus deſcendere ex vaſe, quod plenum remanebat. Non poteram ſuſpicari ullum in machinâ meâ vitium dari, nec vas B non bene fuiſſe obturatum; ſed ut quidquid rei eſſet expiſcarer, detraxi phialam C ex vaſe, & poſtquam in hac admiſi parvam bullulam aëris, repoſui phialam ut ante; & agitatâ machinâ, vidi tandem omnem aquam deſcendiſſe prope ad libellam illius quæ erat in vitro D. Id mihi perſuaſit, non dari vitium in machinâ & aquam aëre purgatam manere ſuſpenſam; licet vas B fuerit plane aëre vacuum vel ad minimum ita, uti erat quando aqua non-

Digitized by Google

nondum aëre purgata deſcendebat ex Phialâ; altera vice ut aqua deſcenderet, effeci immiſſâ in collum Phialæ bullâ adeo parvâ, ut ægre videri poſſet.

## EXPERIMENTUM II.

### *Notabile quid in deſcenſu aquæ aëre purgatæ.*

SEd alio tempore mihi quid valde memorabile contigit. Cum non immiſiſſem bullam aëream, poſt exhauſtum aërem bullam formari obſervavi in inferiori parte colli Phialæ; Hæc bulla, continuo magis magiſque aucta, ubi ad magnitudinem parvi pili pervenit, reliquit vitrum & incepit adſcendere in collo Phialæ, ubi autem pervenit ad altitudinem unius pollicis ſupra ſuperficiem aquæ in vitro D, non ulterius adſcendit, ſed ſubito ſeſe expandit ſuperiora verſus & unico momento occupavit totam Phialam, ex qua eodem tempore aqua deſcendit per parvum id ſpatium, quod reliquum erat inter interiorem colli ſuperficiem & bullam, quæ extenſa erat, omniſque remanſit infra illam altitudinem unius pollicis, ad quam bulla cæpit ſeſe expandere. Omnia hæc porro mihi contigerunt inſtituenti experimenta cum tubis duorum pedum & majoribus, ubi aqua manebat ſuſpenſa eodem modo ut in tubo 9 pollicum.

Communicavi hæc experimenta cum ſocietate regia Anglicana, ſed noluere ſtatim illis fidem dare, mihi autem indicarunt veriſimiliter aquam Phialæ non deſcendiſſe, propter aërem non bene evacuatum: ſed reſpondi, nullam dari rationem illud ſuſpectandi ſi attendamus ad illud quod notavi in fine experimenti fuiſſe obſervatum; & præterea me ex experimentis frequenter repetitis de bona machinæ conditione certiſſimum eſſe. Tandem cum anno 1663 eſſem in Angliâ me præſente in conſeſſu Societatis Regiæ idem experimentum eodemque cum ſucceſſu inſtitutum eſt, licet tubi fuerint quatuor & quinque pedum; dein in mentem venit Dno Boyle idem inſtituere experimentum, non adhibitâ anthâ, cum argento vivo in tubo vitreo, cujus extre-



Digitized by Google

mitas aperta immerſa erat in alio argento vivo; quum primo detexiſſet methodum perfecte Mercurium aëre purgandi per tres vel quatuor dies. Tandem experimentum ſucceſſit, & cum in experimento Torricelliano Mercurius deſcendat ad altitudinem 27 vel 28 pollicum ſupra ſuperficiem Mercurii, in quo impoſitus eſt tubus, ita a D^no Boyle, & eodem etiam tempore a D^no Vicecomite Brounker, Præſide Societatis Regiæ Anglicanæ, fuit inſtitutum, ut primo hæreret ad altitudinem 34 pollicum, dein 52, poſtea 55 & tandem ad altitudinem 75 pollicum, tubo ſemper manente pleno, & huc uſque nondum notum eſt, quænam ſit omnium maxima altitudo poſſibilis. D^us Boyle etiam obſervavit, extracto tubo e Mercurio, in quo aperta ejus extremitas erat impoſita, & retento tubo non clauſo in aëre libero, Mercurium nihilominus non cecidiſſe. Porro in his experimentis, ut in illis quæ cum aquâ inſtituuntur, minimâ aëris bullâ in tubo, ſive ſponte ſive concuſſione formatâ, ſubito Mercurium deprimit ad ordinariam altitudinem 27 vel 28 pollicum.

## EXPERIMENTUM III.

### *Adhibito ſpiritu vini loco aquæ.*

SEd ut ad experimenta noſtra redeam, non ſolum illa iterum cum aqua inſtitui, ſed & cum Spiritu vini rectificato, & inveni, ad purgationem aëris tantum requiri, ut per unam horam in vacuo relinquatur, licet producat plus aëris quam aqua, uti ex hujus operationis circumſtantiis quas referam quæque notabiles ſatis ſunt, æſtimari facillime poteſt. Poſtquam vas B proxime ope antliæ aëre evacuatum eſt, magnæ bullæ ſpiritus vini exeunt & tanta quidem copia, ut pars ejiciatur ſupra oram vitri D, quod pariter accidit in aquâ parumper calefactâ; ſed non in illâ quæ frigida immittitur. Illæ ebullitiones continuo minuuntur, ita ut ex vini Spiritu, tantum majores aëris bullæ ad certa temporis intervalla ſingulatim exeant, & tandem nil omnino emergat.

In-

Digitized by Google

Interim bullæ, quæ aſcenderunt in tubum C, ita dilatantur ut plane impleant globum, ut & totam colli longitudinem, ita ut omnis vini ſpiritus fugatus ſit, & ut pariter emittat multas magnas bullas per aperturam; quod clare indicat, eſſe aërem in lagena, vel aliam materiam elaſticam ut aër, quandoquidem illa fugat ſpiritum vini longe infra ſuperficiem illius qui eſt in vitro D contentus: etiam ſi iterum aërem intrare ſinas in vas B, ſpiritus vini quidem adſcendet in lagenam C, non autem plane illam replebit, ſed ſuperius hærebit ſatis notabilis aëris bulla.

## EXPERIMENTUM IV.

### *Aër, ex Spiritu vini aut aqua exhauſtus, hæc corpora iterum intrat.*

SEd hic notandum, bullam illam ſi ita relinquatur per ſpatium unius vel duarum horarum, ſemper evanuiſſe, & in ſpiritum vini, unde emerſerat, rediiſſe. Expertus etiam fui, ſi immittatur porro bulla veri aëris magnitudine unius piſi, etiam illam periiſſe, poſtquam per unam noctem relicta fuerit. Idem quoque accidit in aqua. Sed multo majus tempus requiritur, ut evaneſcat bulla.

Quod attinet cauſam præcipui noſtri Phænomeni, ſuſpenſionis nempe aquæ & Mercurii, hæc eſt quam mihi perſuadere potui huc uſque omnium veriſimillimam.

Præter preſſionem aëris, quæ ſuſtinet Mercurium ad altitudinem 27 pollicum in experimento Torricelliano, & quam dari ex infinitis aliis effectibus, quos videmus, conſtat, concipio & aliam preſſionem illâ fortiorem materiæ aëre ſubtilioris, quæ haud difficulter penetrat vitrum, aquam, Mercurium, & omnia alia corpora quæ aëri impenetrabilia obſervamus. Hæc preſſio addita ad aëris preſſionem poteſt ſuſtinere 75 pollices Mercurii & forte adhuc plures, quamdiu tantum agit in ſuperficiem inferiorem, vel in ſuperficiem Mercurii, in quem aperta tubi extremitas immergi-

gitur: ſed quam primum materia hæc poteſt agere etiam ad alteram partem (quod evenit ſi tubum concutiendo, vel immittendo parvam aëris bullam, occaſio detur huic materiæ effectum ſuum inchoandi) preſſio illius æqualis erit ab utraque parte, ita ut ſola ſuperſit aëris preſſio quæ ſuſtinet Mercurium ad ordinariam altitudinem 27 pollicum; Eadem de cauſa in experimento aquæ aëre purgatæ, poſt remotam preſſionem aëris evacuando recipiens B, altera illa preſſio ejuſdem materiæ agit etiam ut antea in ſuperficiem aquæ in vitro D, & cohibet ne aqua in Phiala C deſcendat. Sed ubi minima bulla aëris intrat phialam, materia quam dixi tranſire per vitrum & aquam, ſubito inflat bullam, editque preſſionem æqualem illi, quæ agit in ſuperficiem aquæ in vitro D, quare omnis aqua phialæ defluit, & ad libellam cum illa, quæ eſt in vitro ſeſe conſtituit.

Quæret forte quiſpiam cur preſſio ejus materiæ non agat in aquam ſuſpenſam in phiala C, & in Mercurium in tubo D$^{ni}$ Boyle, etiam dum vaſa hæc plena ſunt, quoniam ſuppoſui, illam haud difficulter penetrare vitrum æque ac aquam & Mercurium? Et quare particulæ ejus materiæ non ſe jungant, & incipiant preſſionem, cum continuo in aqua & Mercurio eant & redeant, & vitrum non impediat illarum communicationem cum particulis exterioribus.

Ut huic difficultati fiat ſatis, quæ revera maxima eſt, dicam, licet partes ejus materiæ, quam ſuppoſui, tranſitum inveniant inter illas, ex quibus vitrum aqua & Mercurius formantur, non tamen dari tranſitum ſatis latum ut plures ſimul tranſeant, neque ut ſe moveant vi, quæ requiritur ut diſpergantur partes Mercurii vel aquæ, quæ inter ſe habent quendam nexum. Et ex hoc ipſo nexu ſequitur, (licet ad partem ſuperficiei interioris vitri, quæ tangit aquam vel Mercurium ſuſpenſum, plures partes premantur actione particularum ejus materiæ, cum tamen plurimæ partes aquæ aut Mercurii non premantur, quæ a partibus vitri teguntur,) partes aquæ aut Mercurii ſeſe mutuo ſuſtinere, omneſque ſuſpenſas hærere; quia minor eſt preſſio in ſuperficiem aquæ vel argen-

genti vivi, quæ contingit vitrum, quam in inferiorem, quæ tota expoſita eſt actioni materiæ, a qua ſecunda pendet preſſio. Solutionem hanc fateor non mihi ita ſatisfacere, ut nullus mihi ſuperſit ſcrupulus; nihilominus tamen perſuaſum habeo novam illam dari preſſionem, præter aëris preſſionem, cum ob experimenta ſupra relata tum ob duo alia nunc referenda.

## EXPERIMENTUM V.

### *Laminæ metallicæ arcte inter ſe cohærent in vacuo licet nihil inter has detur.*

QUando duæ laminæ metallicæ vel marmoreæ, quarum ſuperficies ſint perfecte planæ, ad ſe mutuo applicantur, ita cohærent, ut ſuperiore elevatâ inferior eam inſequatur, cujus effectus cauſa tribuitur merito preſſioni aëris in ſuperficies externas; duæ mihi ſunt laminæ, quarum quævis circiter eſt magnitudinis pollicis quadrati, quæ ex materiâ conflatæ ſunt, ex qua olim ſpecula formabantur, & quæ ita junguntur, ut, licet nihil interponas, ſuperior non ſolum alteram ſuſtineat, ſed interdum etiam pondus trium librarum cum inferiori conjunctum; in quo ſtatu perſeverant quamdiu deſideraveris.

Has ita junctas & oneratas tribus libris ſuſpendi in machinæ meæ recipiente, quod aëre evacuavi in tantum, ut ſuperſtes aër non preſſione ſua aquam ad altitudinem unius pollicis ſuſtineret, & nihilominus laminæ meæ ſeparatæ non ſunt.

Idem etiam inſtitui experimentum interpoſito ſpiritu vini inter laminas & inveni quod in recipiente vacuo aëre ſuſtinerent ſine ſeparatione eadem pondera, quæ ſuſtinebant recipiente aëre pleno.

Videtur id mihi manifeſte ſatis indicare magnam ſupereſſe preſſionem in recipiente, poſtquam aëre vacuus eſt, & hanc non magis quam ipſius aëris preſſionem in dubium vocari poſſe; ſed & alia ad illius confirmationem.



Digitized by Google

## EXPERIMENTUM VI.

### *Effectus Siphonis in vacuo.*

NOtum eſt, effectum ſiphonis crurum inæqualium, quo evacuatur aqua vaſis ſupra oram, non amplius tribui fugæ vacui, ſed ponderi aëris, qui premendo in ſuperficiem aquæ in vaſe, illam cogit ut in ſiphonem adſcendat, dum in alio crure illa gravitate ſuâ deſcendit. Inveni methodum qua effici, ut aqua e ſiphone fluxerit, poſtquam recipiens vacuum erat aëre; & obſervavi effectum, ſi aqua purgata fuerit aëre, eodem modo ac extra recipiens procedere.

Breviſſimum ſiphonis crus erat octo pollicum & apertura duarum linearum. Nec dubitari debet quin recipiens aëre bene vacuum fuerit; nam id poſſum affirmare, tum quoniam nullum antliâ aërem ulterius extrahere potui, tum ob alia ſigna certiora.

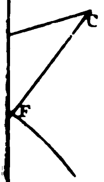
Magis ergo confirmatur noſtra hypotheſis materiam dari prementem aëre ſubtiliorem. Si quis laborem in ſe ſuſcipere vellet quærendi, quanta ſit vis hujus preſſionis quod melius fieri non poteſt niſi proſequendo experimenta cum tubis Mercurio plenis longioribus, quam quibus uſus eſt Dnus Boyle, inveniet forte, vim illam ſatis validam eſſe ad efficiendam unionem partium vitri & aliorum corporum, quæ nimis arcte cohærent, quam ut juncta tantum forent per contiguitatem & quietem uti voluit Carteſius.

# F I N I S.

I N-

Digitized by Google

TAB. LVI.



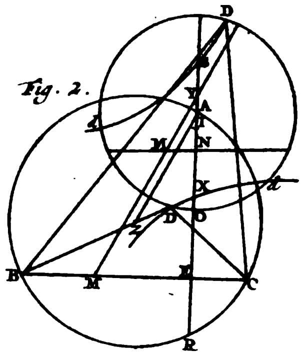


Fig. 2.

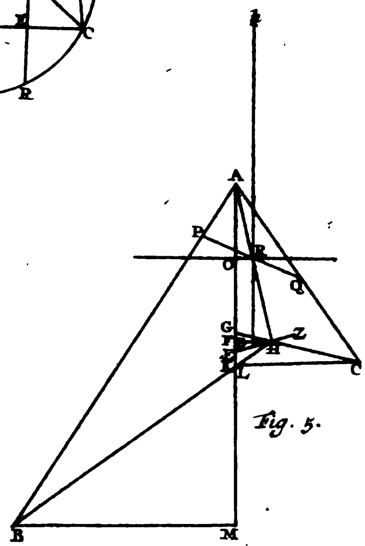


Fig. 5.

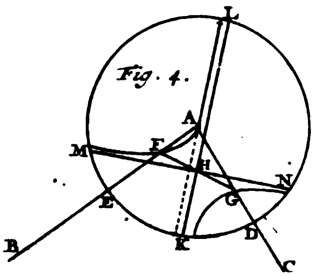


Fig. 4.



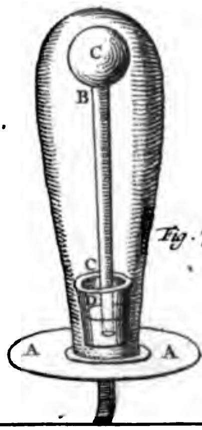


Fig. 7.

Digitized by Google

# INDEX RERUM

*Quatuor Tomis contentarum.*

## TOMUS PRIMUS

## OPERA MECHANICA.

HOROLOGIUM. pag. 1. *Hagæ-Com. ann.* 1658. *in quarto.*

HOROLOGIUM OSCILLATORIUM, ſive de Motu Pendulorum ad Horologia aptato Demonſtrationes Geometricæ. p. 15. *Pariſiis* 1673. *in fol.*

Deſcriptio Horologii. 33.

Tabula Æquationis Dierum. 44.

De Deſcenſu Gravium. 52.

De Deſcenſu ſuper plano inclinato. 62.

*Dato in Cycloide puncto, rectam per illud ducere quæ Cycloidem tangat.* 69.

De Motu in Cycloide. 72.

*In Cycloide cujus axis ad perpendiculum erectus eſt, vertice deorſum ſpectante, tempora deſcenſus quibus mobile, à quocunque in ea puncto dimiſſum, ad punctum imum verticis pervenit, ſunt inter ſe æqualia; habentque ad tempus caſus perpendicularis per totum axem cycloidis eam rationem, quam ſemicircumferentia circuli ad diametrum.* 87.

De Linearum curvarum evolutione & dimenſione. 89.

*Semicycloidis evolutione, à vertice cœpta, alia ſemicyclois deſcribitur evolutæ æqualis & ſimilis, cujus baſis eſt in ea recta quæ cycloidem evolutam in vertice contingit.* 96.

*Cyclois linea ſui axis, ſive diametri circuli genitoris, quadrupla eſt.* 97.

*Cujus lineæ evolutione parabola deſcribatur oſtendere.* 99.

*Rectam lineam invenire æqualem datæ portioni curvæ paraboloidis, ejus nempe in qua quadrata ordinatim applicatarum ad axem, ſunt inter ſe ſicut cubi abſciſſarum ad verticem.* 100.

*Conoidis parabolici ſuperficiei curvæ circulum æqualem invenire.* 102.

*Sphæroidis oblongi ſuperficiei circulum æqualem invenire.* 103.

*Sphæroidis lati ſive compreſſi ſuperficiei circulum æqualem invenire.* Ibid.

*Conoidis hyperbolici ſuperficiei curvæ circulum æqualem invenire.* 104.

*Curvæ parabolicæ æqualem rectam lineam invenire.* 105.

*Lineas curvas exhibere quarum evolutione ellipſes & hyperbolæ deſcribantur, rectaſque invenire iiſdem curvis æquales.* 107.

*Datâ lineâ curvâ, invenire aliam cujus evo-*

Digitized by Google

*evolutione illa deſcribatur; & oſtendere quod ex unaquaque curva geometrica, alia curva itidem geometrica exiſtat, cui recta linea æqualis dari poſſit.* 108.

De Centro Oſcillationis, ſeu Agitationis. 107.

*Ponderibus quotlibet ad eandem partem plani exiſtentibus, ſi à ſingulorum centris gravitatis agantur in planum illud perpendiculares; hæ ſingulæ in ſua pondera ductæ, tantundem ſimul efficient, ac perpendicularis, à centro gravitatis ponderum omnium in planum idem cadens, ducta in pondera omnia.* 123.

*Dato pendulo ex ponderibus quotlibet compoſito, ſi ſingula ducantur in quadrata diſtantiarum ſuarum ab axe oſcillationis, & ſumma productorum dividatur per id quod fit ducendo ponderum ſummam, in diſtantiam centri gravitatis communis omnium ab eodem axe oſcillationis; orietur longitudo penduli ſimplicis compoſito iſochroni, ſive diſtantia inter axem & centrum oſcillationis ipſius penduli compoſiti.* 128.

*Dato pendulo ex quotcunque ponderibus æqualibus compoſito; ſi ſumma quadratorum factorum à diſtantiis, quibus unumquodque pondus abeſt ab axe oſcillationis, applicetur ad diſtantiam centri gravitatis communis ab eodem oſcillationis axe, multiplicem ſecundum ipſorum ponderum numerum, orietur longitudo penduli ſimplicis compoſito iſochroni.* 131.

*Datâ figurâ planâ & in eodem plano lineâ rectâ, quæ vel ſecet figuram vel non, ad quam perpendiculares cadant à particulis ſingulis minimis & æqualibus, in quas figura diviſa intelligitur; invenire ſummam quadratorum ab omnibus iſtis perpendicularibus; ſive planum, cujus multiplex, ſecundum particularum numerum, dictæ quadratorum ſummæ æquale ſit.* 135.

*Datis in plano punctis quotlibet; ſi ex centro gravitatis eorum circulus quilibet deſcribatur; ducantur autem ab omnibus datis punctis, ad punctum aliquod in circuli illius circumferentia lineæ rectæ; erit ſumma quadratorum ab omnibus ſemper eidem plano æqualis.* 138.

*Si figura plana, vel linea in plano exiſtens, aliter atque aliter ſuſpendatur à punctis, quæ, in eodem plano accepta, æqualiter à centro gravitatis ſuæ diſtent; agitata motu in latus, ſibi ipſi iſochrona eſt.* 140.

*Datâ figurâ ſolidâ, & lineâ rectâ interminatâ, quæ vel extra figuram cadat, vel per eam tranſeat; diviſâque figurâ cogitatu in particulas minimas æquales, à quibus omnibus ad datam rectam perpendiculares ductæ intelligantur; invenire ſummam omnium quæ ab ipſis fiunt quadratorum, ſive planum, cujus multiplex ſecundum particularum numerum, dictæ quadratorum ſummæ æquale ſit.* 142.

*Figura quævis, ſive linea fuerit, ſive ſuperficies, ſive ſolidum; ſi aliter atque aliter ſuſpendatur, agiteturque ſuper axibus inter ſe parallelis, quique à centro gravitatis figuræ æqualiter diſtent, ſibi ipſi iſochrona eſt.* 148.

*Dato plano, cujus multiplex per numerum particularum, in quas ſuſpenſa figura diviſa intelligitur, æquetur qua-*

Digitized by Google

*quadratis omnium diſtantiarum ab axe oſcillationis; ſi illud applicetur ad rectam, æqualem diſtantiæ inter axem oſcillationis & centrum gravitatis ſuſpenſæ magnitudinis, orietur longitudo penduli ſimplicis ipſi iſochroni.* 149.

*Si ſpatium planum, cujus multiplex ſecundum numerum particularum ſuſpenſæ magnitudinis, æquetur quadratis diſtantiarum ab axe gravitatis, axi oſcillationis parallelo; id, inquam, ſpatium ſi applicetur ad rectam, æqualem diſtantiæ inter utrumque dictorum axium, orietur recta æqualis intervallo, quo centrum oſcillationis inferius eſt centro gravitatis ejuſdem magnitudinis.* 150.

*Si magnitudo eadem, nunc brevius nunc longius ſuſpenſa, agitetur; erunt, ſicut diſtantiæ axium oſcillationis à centro gravitatis inter ſe, ita contraria ratione diſtantiæ centrorum oſcillationis ab eodem gravitatis centro.* 153.

*Centrum oſcillationis & punctum ſuſpenſionis inter ſe convertuntur.* 154.

*Quomodo in figuris planis centra oſcillationis inveniantur.* 154.

*Centrum oſcillationis Circuli.* 157. *Rectanguli.* Ibid. *Trianguli iſoſcelis.* 158. *Parabolæ.* Ibid. *Sectoris circuli.* Ibid. *Circuli, aliter quam ſupra.* 160. *Peripheriæ circuli.* Ibid. *Polygonorum ordinatorum.* 161.

*Quomodo, in ſolidis figuris, oſcillationis centra inveniantur.* 165.

*Centrum oſcillationis in Pyramide.* 166. *Coni.* 167. *Sphæræ.* Ibid. *Cylindri.* 168. *Conoidis Parabolici.* Ibid. *Conoidis Hyperbolici.* 169. *dimidii Coni.* Ibid.

*Horologiorum motum temperare addito pondere exiguo ſecundario, quod ſuper virga penduli, certa ratione diviſa, ſurſum deorſumque moveri poſſit.* 172.

*Centri oſcillationis rationem haberi non poſſe, in pendulis inter Cycloides ſuſpenſis; & quomodo hinc orta difficultas tollatur.* 177.

*De menſuræ univerſalis, & perpetuæ, conſtituendæ ratione.* 178.

*Spatium definire, quod gravia, perpendiculariter cadentia, dato tempore percurrunt.* 182.

Secundi Horologii Conſtructio è circulari pendulorum motu deducta. 185.

De Vi Centrifuga ex motu circulari, Theoremata. 188.

Brevis Institutio de Usu Horologiorum ad Inveniendas Longitudines. 193. *Hagæ-Com.* Belgice edita.

*Reducere horologia ad rectam dierum menſuram vel cognoſcere quanto citius vel tardius ſpatio 24 horarum moveantur.* 196.

Tabula Æquationis Dierum. 198.

*Ope Horologiorum mari invenire longitudinem loci in quo verſaris.* 202.

*Mari invenire horam diei.* 204.

*Quomodo ex obſervatione ortus & occaſus Solis & ex hora horologiorum longitudo mari inveniri queat.* 205.

Excerpta ex literis de ſucceſſu horologiorum datis Londini $\frac{11}{21}$ Januarii 1665. 211.

Experimentum circa pendula. 213. *Journal des Sçavans* 23. Fevr. 1665.

De Hugeniana Centri oscillationis Determinatione controversia. 215.

Obſervationes Abbatis Catalani in propoſitionem, quæ fundamentum eſt

eſt 4æ. partis tractatus de Pendulis, Hugenii 217. *Journal des Sçavans* 1682. in initio.

Domini Abbatis Catalani Examen Mathematicum Centri Oſcillationis. 219. *ibid.*

Excerpta ex literis Domini Hugenii, quibus reſpondet obſervationi Abbatis Catelani in 4am. propoſitionem Tractatus de Centris oſcillationis. 222. *ibid.* 29. Junii 1682.

Exceptio Abbatis Catalani ad reſponſionem Hugenii. 225. *ibid.* 20. Julii 1682.

Objectio Abbatis Catalani contra motum Pendulorum in Cycloidibus. 227 *ibid.* 7. Sept. 1682.

Reſponſio ad objectiones Hugenii adverſus methodum Abbatis Catalani de determinando Centro Oſcillationis. 228. *ibid.* 14. Sept. 1682.

Excerpta ex litteris D. Bernoullii datis Baſileæ ad Autorem Diarii Pariſienſis, de Controverſia, inter Abbatem Catalanum & Hugenium, de Centro oſcillationis. 230. *ibid.* 24. April. 1684.

Excerpta ex literis Dni. Hugenii ad Auctores Diarii Pariſienſis, datis Hagæ 8. Junii 1684. quæ continent ejus reſponſionem ad exceptionem Dni. Abbatis Catalani, de centro Oſcillationis. 232. *ibid.* 3. Julii 1684.

Reſponſio Dni. Abbatis Catalani ad Literas Dni. Bernoulli de Controverſia ſua cum Dno. Hugenio de centro Oſcillationis. 235. *ibid.* 11. Sept. 1684.

Dni. Bernoulli narratio controverſiæ inter Dnos. Hugenium & Abbatem Catalanum agitatæ de centro Oſcillationis, quæ loco Animadverſionis eſſe poterit in Reſponſionem Dni. Catalani. 237. *Acta eruditorum Lipſ.* menſis Julii. 1686.

Litteræ Dni. Marchionis de l' Hôpital ad Dum. Hugenium, in quibus contendit, ſe regulam hujus Auctoris de Centro Oſcillationis penduli compoſiti demonſtrare per cauſam Phyſicam, & reſpondere ſimul Dno. Bernoulli. 242. *Hiſtoire des ouvrages des Sçavans.* menſis Junii. 1690.

Obſervationes Dni. Hugenii in literas præcedentes & in relationem Dni. Bernoulli, cujus in iis fit mentio. 246. *ibid.*

MACHINÆ QUÆDAM ET VARIA CIRCA MECHANICAM. 249.

Excerpta ex Litteris Domini Hugenii, novam quandam Inventionem Horologiorum exactiſſimorum ac portatilium concernentibus. 253. *Journal des Sçavans.* 25. Febr. 1675.

Nova Libella, Teleſcopio inſtructa, propriam ſecum ferens probationem & quæ in unica ſtatione verificatur, & rectificatur. 254. *ibid.* 9. Jan. 1680.

Rectificationis Libellæ Demonſtratio. 258. *ibid.* 26. Feb. 1680.

Aſtroſcopia Compendiaria, Tubi Optici molimine liberata. 261. *Hagæ. Com.* 1684. *in quarto.*

Auctarium. 273. *ibid.*

Excerpta ex literis Dni. Hugenii de novâ methodo conſtruendi Barometrum. 276. *Journal des Sçavans* 12. Dec. 1672.

Nova via movens mediante pulvere

ni-

Digitized by Google

nitrato & aëre. 280. *Divers ouvrages de Mathmatique & de Phiſique de Mrs. de l' Academie Rojale des ſciences.* p. 320.

Demonſtratio Æquilibrii Bilancis. 282. *ibid.* p. 113.

*Si ſuper planum Horizontale quod imponitur lineæ rectæ, quæ id dividit in duas partes, applicetur pondus, vis, quam illud pondus habebit ad deflectendum planum partem verſus ad quam applicatur erit major, quam ſi poſitum ſit prope dictam lineam.* 283.

*Si planum Horizontale; oneratum plurimis ponderibus, maneat in æquilibrio, impoſitum lineæ rectæ, quæ id ſecat in duas partes, centrum gravitatis plani ſic onerati erit in ipſa lineâ rectâ.* 284.

*Duo gravia commenſurabilia appenſa ad extremitates brachiorum Libræ erunt in æquilibrio, ſi brachia ſint in ratione reciproca gravium.* 284.

De potentiis fila funesve trahentibus. 287. *ibid.* p. 317.

*Datis poſitione quotlibet punctis; ſive in eodem plano fuerint, ſive non: ſi à puncto quod eorum commune eſt gravitatis centrum, ad unumquodque datorum fila extendantur, eaque ſingula trahantur à potentiis quæ ſint inter ſe ut filorum longitudines, fiet æquilibrium manente nodo communi in dicto gravitatis centro.* 288.

Solutio problematis a G G. Leibnitio propoſiti. 290 *Nouvelles de la republique des lettres Menſis Oct.* 1687.

*Detegere lineam juxta quam ſi corpus deſcendat temporibus æqualibus æqualiter tellurem verſus accedat.* 290.

Chriſtiani Hugenii, Solutio Problematis de linea in quam flexile ſe pondere proprio curvat, 291. *Acta Erud. Lips.* menſis Junii 1691.

Hugenii Annotationes in Librum Pariſiis 1689. editum, de Manuaria Nautica. 292. *Bibliotheque Univerſelle.* menſis Sept. 1693.

Reſponſum Dni. Renaldi ad Dominum Hugenium. 296. *Journal des Sçavans* 16. & 27. Maji. 1695.

Exceptio Dni. Hugenii ad Reſponſum Dni. Renaldi. 305. *Hiſtoire des ouvrages des Sçavans.* menſis April. 1694.

## TOMUS SECUNDUS.

## OPERA GEOMETRICA.

CHRISTIANI HUGENII THEOREMATA DE QUADRATURA HYPERBOLES, ELLIPSIS ET CIRCULI, EX DATO PORTIONUM GRAVITATIS CENTRO 309. *Lugd. Bat.* 1651. *in quarto.*

*Omnis hyperboles portio ad triangulum inſcriptum, eandem cum ipſa Baſin habentem eandemque altitudinem, hanc habet rationem; quam ſubſeſquialtera duarum, lateris tranſverſi & diametri portionis, ad eam quæ ex centro ſectionis ducitur ad portionis centrum gravitatis.* 323.

*Omnis ellipſis vel circuli portio ad triangulum inſcriptum, eandem cum ipſa Ba-*

*Baſin habentem eandemque altitudinem, hinc habet rationem; quam ſubſeſquialtera diametri portionis reliquæ, ad eam quæ ex figuræ centro ducitur ad centrum gravitatis in portione* 324.

*In Semicirculo & quolibet circuli ſectore, habet arcus ad duas tertias rectæ ſibi ſubtenſæ hanc rationem, quam ſemidiameter ad eam, quæ ex centro ducitur ad ſectoris centrum gravitatis.* 326.

ἘΞΈΤΑΣΙΣ CYCLOMETRIÆ Clariſſimi Viri Gregorii à S. Vincentio, S. J. editæ Anno 1647. 328. *ibid.*

Chriſtianii Hugenii ad C. V. Franc. Xaverium Ainſcom. S. J. EPISTOLA, qua diluuntur ea quibus Ἐξέτασις Cyclometriæ Gregorii à Sto. Vincentio impugnata fuit. 341. *Hagæ. Com.* 1656. *in quarto.*

*Epiſtola Carteſii.* 347.

CHRISTIANI HUGENII DE CIRCULI MAGNITUDINE INVENTA. Accedunt ejuſdem Problematum quorundam illuſtrium Conſtructiones. 351. *Lugd. Bat.* 1654 *in quarto.*

*Omnis circulus major eſt polygono æqualium laterum ſibi inſcripto & triente exceſſus quo id polygonum ſuperat aliud inſcriptum ſubduplo laterum numero.* 361.

*Omnis circulus minor eſt duabus tertiis polygoni æqualium laterum ſibi circumſcripti & triente polygoni ſimilis inſcripti.* 361.

*Omnis circuli circumferentia major eſt perimetro polygoni æqualium laterum ſibi inſcripti, & triente exceſſus quo perimeter eadem ſuperat perimetrum alterius polygoni inſcripti ſubduplo laterum numero.* 362.

*Circulo dato, ſi ad diametri terminum contingens ducatur, ducatur autem & ab oppoſito diametri termino quæ circumferentiam ſecet occurratque tangenti ductæ: erunt interceptæ tangentis duæ tertiæ cum triente ejus quæ ab interſectionis puncto diametro ad angulos rectos incidit, ſimul arcu abſciſſo adjacente majores.* 364.

*Omnis circuli circumferentia minor eſt duabus tertiis perimetri polygoni æqualium laterum ſibi inſcripti & triente perimetri polygoni ſimilis circumſcripti.* 365.

*Peripheriæ ad diametrum rationem invenire quamlibet veræ propinquam.* 366.

*Rectam ſumere peripheriæ dati circuli æqualem.* 368.

*Dato arcui cuicunque rectam æqualem ſumere.* 370.

*Omnis circuli circumferentia minor eſt minore duarum mediarum proportionalium inter perimetros polygonorum ſimilium, quorum alterum ordinate circulo inſcriptum ſit, alterum circumſcriptum. Et circulus minor eſt polygono iſtis ſimili cujus ambitus majori mediarum æquetur.* 373.

*Si inter productam circuli diametrum & circumferentiam recta aptetur radio æqualis, & producta circulum ſecet, occurratque tangenti circulum ad alterum diametri terminum: Intercipiet ea partem tangentis arcu adjacente abſciſſo majorem.* 376.

*Si diametro circuli ſemidiameter in directum adjiciatur, & ab adjectæ termino recta ducatur quæ circulum ſecet, occurratque tangenti circulum ad terminum*



Digitized by Google

*num diametri oppoſitum: Intercipiet ea partem tangentis arcu adjacente abſciſſo minorem.* 377.

*Portionis circuli centrum gravitatis diametrum portionis ita dividit, ut pars quæ ad verticem reliquâ major ſit, minor autem quam ejuſdem ſeſquialtera:* 378.

*Circuli portio ſemicirculo minor ad inſcriptum triangulum maximum majorem rationem habet quam ſeſquitertiam, minorem vero quam diameter portionis reliquæ tripla ſeſquitertia ad circuli diametrum cum tripla ea, quæ à centro circuli pertingit ad portionis baſin.* 380.

*Arcus quilibet ſemicircumferentiâ minor, major eſt ſuâ ſubtenſâ ſimul & triente differentiæ quâ ſubtenſa ſinum excedit. Idem verò minor quam ſubtenſa ſimul cum ea quæ ad dictum trientem ſeſe habeat, ut quadrupla ſubtenſa juncta ſinui ad ſubtenſam duplam cum ſinu triplo.* 382.

*Circumferentiæ ad diametrum rationem inveſtigare; & ex datis inſcriptis in dato circulo invenire longitudinem arcuum quibus illæ ſubtenduntur* 384.

CHRISTIANI HUGENII ILLUSTRIUM QUORUNDAM PROBLEMATUM CONSTRUCTIONES. 388 Ibid.

*Datam ſphæram plano ſecare, ut portiones inter ſe rationem habeant datam* 388.

*Cubum invenire dati cubi duplum.* 391.

*Datis duabus rectis duas medias proportionales invenire.* 393.

*Quadrato dato & uno latere producto, aptare ſub angulo exteriori rectam magnitudine datam quæ ad angulum oppoſitum pertineat.* 396.

*Dato quadrato, & duobus contiguis lateribus productis, aptare ſub angulo interiori rectam magnitudine datam quæ per angulum oppoſitum tranſeat. Oportet autem non minorem eſſe datam quam ſit quadrati diameter dupla.* 397.

*Rhombo dato, & uno latere producto, aptare ſub angulo exteriori lineam magnitudine datam quæ ad oppoſitum angulum pertineat.* 397.

*Rhombo dato & duobus contiguis lateribus productis, aptare ſub angulo interiori rectam magnitudine datam quæ per oppoſitum angulum tranſeat. Oportet autem datam non minorem eſſe quam duplam diametri quæ reliquos duos rhombi angulos conjungit.* 399.

*In Conchoide linea invenire confinia flexus contrarii.* 403.

CONTROVERSIA DE CIRCULI ET HYPERBOLÆ QUADRATURA. 405.

Vera Circuli & Hyperbolæ Quadratura Authore *Jocobo Gregorio.* 407. *Patavii* 1668. *in quarto.*

*Serierum terminationes invenire.* 423. & 426.

*Ex data quantitate, eodem modo compoſita a duobus terminis convergentibus cujuſcunque ſeriei convergentis, quo componitur ex terminis convergentibus ejuſdem ſeriei immediate ſequentibus; ſeriei propoſitæ terminationem invenire.* 427.

*Sectorem circuli, ellipſeos, vel hyperbolæ, non eſſe compoſitum analyticè à triangulo ad centrum inſcripto & trapezio circumſcripto.* 429.

*Dato circulo æquale invenire quadratum.* 446.

*Ex dato ſinu invenire arcum.* 448.



Digitized by Google

*Ex dato arcu invenire ſinum.* 448.

*Invenire quadratum æquale ſpatio hyperbolico contento à curva hyperbolica, uno aſymptoto & duabus rectis alteri aſymptoto parallelis; quod ſpatium æquale eſt ſectori hyperbolico cujus baſis eſt eadem curva.* 449.

*Propoſiti cujuſcunque numeri logarithmum invenire.* 452.

*Ex dato logarithmo invenire ejus numerum.* 459.

*Rectâ per datum punctum in diametro ductâ, ſemicirculum in ratione data dividere.* 460.

Hugenii Obſervationes in Librum Jacobi Gregorii, de Vera Circuli & Hyperbolæ Quadratura. 463. *Journal des Sçavans* 2. Julii. 1668.

*Invenire per logarithmos dimenſionem Spatii Hyperbolici contenti inter Curvam & unam ex Aſymptotis & duas lineas parallelas ad alteram Aſympton.* 465.

Domini Gregorii Reſponſum ad Animadverſiones Domini Hugenii, in ejus Librum, de Vera Circuli & Hyperbolæ Quadratura. 466. *Philoſophical Tranſactions.* n. 37.

Excerpta ex Literis Dni. Hugenii de Reſponſo, quod Dnus. Gregorius dedit ad Examen Libri, cui Titulus eſt, Vera Circuli & Hyperbolæ Quadratura. 472. *Journal des Sçavans* 12. Nov. 1668.

Excerpta ex Epiſtola D. Jacobi Gregorii, continente quaſdam ejus Conſiderationes, ſuper Epiſtola D. Hugenii, impreſſa in Vindicationem Examinis ſui Libri, de Vera Circuli & Hyperbolæ Quadratura. 476. *Philoſophical Tranſactions.* n. 44.

CHRISTIANI HUGENII GEOMETRICA VARIA. 483.

Conſtructio Loci ad Hyperbolam per Aſymptotos. 485. *Divers ouvrages de Math. & de Ph. de Mrs. de l'Acad. R.* p. 322.

Demonſtratio Regulæ de Maximis & Minimis. 490. *ibid.* p. 326.

Regula ad inveniendas Tangentes linearum curvarum. 498. *ibid.* p. 330.

Chriſtiani Hugenii Epiſtola de Curvis quibuſdam peculiaribus. 507. *Hiſtoire des ouvrages des Sçavans.* menſis Febr. 1693.

*Invenire lineam rectam æqualem datæ portioni lineæ logarithmicæ.* Ibid.

*Alia curva cujus longitudo ope ipſius curvæ menſuratur.* 508.

*Quadratura Hyperboles adhibita curva illa.* 508.

*Curvæ ejuſdem deſcriptio mechanica.* 509.

*Varia de catinaria.* 511.

*Quadratura curvæ cujus æquatio eſt* $x^3 + y^3 = xyn$. 514.

Problema ab Eruditis ſolvendum: a Johanne Bernoullio in Actis Lipſienſibus menſis Maji Ann. 1693. propoſitum. 515.

C. H. Z. De Problemate Bernoulliano in Actis Lipſienſibus propoſito. 516. *Acta Erud. Lips.* menſis Oct. 1693.

C. H. Z. Conſtructio univerſalis Problematis a Clariſſimo Viro Joh. Bernoullio propoſiti. 518. *ibid.* Sept. 1694.



Digitized by Google

# INDEX RERUM.

# TOMUS TERTIUS.

# OPERA ASTRONOMICA.

CHRISTIANI HUGENII DE SATURNI LUNA OBSERVATIO NOVA. 521. *Hagæ-Com.* 1656.

CHRISTIANI HUGENII ZULICHEMII, SYSTEMA SATURNIUM, ſive de Cauſis mirandorum Saturni Phænomenon; & Comite ejus Planeta novo. 527. *Hagæ Com.* 1659.

*Teleſcopiorum noſtrorum Deſcriptio.* 537.

*Quædam circa planetas & fixas obſervata.* 539.

*In Jovis diſco zonæ candicantes.* 539.

*In Marte zona obſcura.* 540.

*Fixarum diametri nulla latitudine.* 540.

*Phænomenon in Orione novum.* 540.

*Circa Saturnum obſervationes.* 541.

*Saturnus brachiorum expers inventus.* 544.

*Brachia Saturno renata.* 545.

*Brachia Saturni in anſas mutari cœpta.* 546.

*Anſæ Saturni amplius patefactæ.* 547.

*Comes infra Saturnum tranſire viſus* 548.

*Idem ſupra Saturnum tranſitus.* 548.

*Lunæ Saturniæ periodus.* 548.

*Eadem periodus accuratius ſupputata.* 549.

*Menſis Saturnicolarum vera longitudo.* 551.

*Tabula motus æqualis Lunæ Saturniæ in orbita ſua reſpectu fixarum.* 552.

*Locus Lunæ Saturniæ quomodo ſupputetur.* 553.

*Non eſſe alteram anſarum quandoque altera minorem.* 559.

*Non etiam unam quam alteram citius ad medium Saturni Corpus applicari.* 559.

*Hevelii hypotheſis circa anſas examinatur.* 560.

*Cauſæ phænomenôn Saturni à Robervallio excogitatæ.* 561.

*Hodiernæ Siculi circa eadem phænomena opinio.* 562.

*Noſtra hypotheſis qua ratione excogitata.* 564.

*Annulo Saturnum cingi.* 565.

*Eum ad Eclipticæ planum obliquè poſitum eſſe.* 565.

*Occurritur iis quæ de annulo objici poſſent.* 566.

*Saturnii major diameter Æquatori parallela oſtenditur.* 567.

*Hevelii de inclinatione anſarum contraria opinio.* 569.

*Ricciolus ſibi contrarius Lib. 7. Almag. novi.* 570.

*Ulterior hypotheſeos noſtræ explanatio.* 570.

*Cauſa phaſeos anſarum latiſſimarum.* 571.

*Clarior Saturnus propter anſas cernitur.* 572.

*Lunæ Saturniæ motus apparens ellipticus.* 572.

*Quomodo anſarum latitudo contrahatur.* 573.

*Quomodo patulæ videri anſæ deſinant.* 573.

*Majorem Saturni diametrum neceſſario Æquatori parallelam ſemper videri.* 574.

Ro-

*Rotundæ phaſeos cauſæ.* 575.
*Quid ſit in Saturni diſco Zona nigricans.* 576.
*Saturnus quando neceſſario rotundus ſpectari debeat.* 578.
*Quænam Saturnicolis ſint loca æquinoctiorum* 580.
*Saturnus brachiorum expers futurus quo modo cognoſcatur.* 585.
*Quibus temporibus rotunda phaſis reverſura ſit prædicitur.* 587.
*Quando latiſſimæ omnium anſæ apparituræ ſint.* 588.
*De Saturni magnitudine & à terris diſtantia.* 589.
*Planetarum diametri.* 589. & ſeq.
*Diametri Solis ad Planetarum diametros ratio.* 591.
*Ratio obſervandi Planetarum diametros apparentes accuratiſſima.* 593.
*Diametri Veneris obſervatio.* 594.
EUSTACHII DE DIVINIS SEPTEMPEDANI BREVIS ANNOTATIO IN SYSTEMA SATURNIUM CHRISTIANI HUGENII ad Sereniſſimum Principem Leopoldum Magni Ducis Hetruriæ fratrem. 597. *Hagæ-Com.* 1660.
*Honorati Fabri, S. J. de Saturno Sententia.* 610.
CHRISTIANI HUGENII ZULICHEMII BREVIS ASSERTIO SYSTEMATIS SATURNII SUI, ad Sereniſſimum Principem Leopoldum ab Hetruria. 619. *Hagæ-Com.* 1660.
*Fabriani Syſtematis examen.* 632.
CHRISTIANI HUGENII DE SATURNI ANNULO OBSERVATIONES. 635
Obſervationes in Saturnum Pariſiis habitæ in Bibliotheca Regia. 637. *Journal des Sçavans* 11. Febr. 1669.
*Vera annuli inclinatio.* 637.
*Phaſis rotunda.* 638.
Excerpta ex literis D. Hugenii, Academiæ Regiæ Scientiarum Socii, ad Auctorem Diarii Eruditorum de figura Planetæ Saturni. 638. *ibid.* 12. Dec. 1672.
*Brachia Saturno renata.* 638.
*Umbra in diſco Saturni.* 638.
*Saturnus rotundus.* 639.
*Linea æquinoctialis annuli.* 640.
CHRISTIANI HUGENII ΚΟΣΜΟΘΕΩΡΟΣ, SIVE DE TERRIS COELESTIBUS, EARUMQUE ORNATU, CONJECTURÆ. 641. *Hagæ-Com.* 1698.
*Fuiſſe qui Planetis incolas tribuerint, ſed nihil præterea de iis inquiſiviſſe.* 646.
*Conjecturas haſce S. Scripturis non adverſari.* 647.
*Conjecturas non eſſe vanas, quia non plane certæ.* 649.
*Ad ſapientiam & pietatem facere quæ hic tractantur.* 649.
*Copernici Syſtema exponitur.* 650.
*Copernici doctrinam quæ rationes confirment.* 650.
*Planetarum magnitudinis inter ſe & ad Solem ratio.* 651.
*Micrometris præſtare lamellas virgulaſve tenues.* 652.
*Tellurem Planetis, & hos Telluri recte aſſimilari.* 652.
*Ex ſimilitudine in hiſce recte argumenta peti* 652.
*Planetas ſolidos eſſe & gravitate pollere.* 653.
*Nec deeſſe illis animalia.* 653.
*Ut nec plantas.* 654
*Non nimiam in hiſce fingendam diſſimilitudinem.* 655.
*Aquas a Planetis non abeſſe.* 656.
*Noſtræ tamen non prorſus ſimiles.* 657.
*Nec*

*Nec alia ratione illic neſci & propagari ſtirpes quam apud nos.* 657.
*Idem & de animalibus verum eſſe.* 658.
*Summam animalium varietatem eſſe in Planetis.* 660.
*Idem in ſtirpibus locum habere.* 660.
*In Planetis eſſe animantia, quæ ratione utantur.* 661.
*Non obſtare hominum vitia quo minus decorem terræ concilient.* 662.
*Nec rationem in Planetarum incolis à noſtra diverſam eſſe.* 663.
*Nec deeſſe illis ſenſus.* 664. & ſeq.
*Nec horum ſenſus longe alios eſſe ac noſtratium.* 667.
*Ignem quoque Planetis communem eſſe.* 669.
*Magnitudinem corporum in Planetis exiſtentium ex Planetarum magnitudine non recte conjici.* 670.
*In Planetis ut in Terra varia eſſe animalia quibus ratio competat.* 670.
*Et inter ea Hominibus ſimilia.* 670.
*Planetarum incolas ſcientias excolere, & inter eas, Aſtronomiam.* 672.
*Et quæ ei inſerviunt artes mechanicas.* 673.
*Ut & Geometriam, Arithmeticam.* 674.
*Et ſcribendi artem.* 674.
*Opticam.* 674.
*Has ſcientias homini præter naturam non eſſe.* 675.
*Planeticolas manus habere.* 676.
*Et pedes.* 677.
*Erectos oculos, vultumque.* 677.
*Nec tamen hinc ſequi eorum formam noſtræ plane ſimilem.* 678.
*Planeticolas nobis vel æquales vel majores eſſe.* 679.
*Eos in ſocietate vivere.* 680.
*Colloquiorum jucunditate frui.* 680.
*Domos adverſus pluviam exſtruere.* 681.
*Navigare, adeoque & artes, quæ eo faciunt excolere.* 682.
*Muſicam.* 683.
*Quæ tamen à noſtra diverſa eſſe poſſet.* 684.
*Cur conſonantia diapente poſt aliam ſimilem vitioſe ponatur?* 685.
*Demonſtratio temperamenti in tono vocis adhibendi.* 685.
*Recenſentur commoda quæ ad nos perveniunt ex animalibus, herbis, arboribus.* 686.
*Ex Metallis.* 688.
*Ex aqua, & aëre, variiſque artificiis.* 689.
*Ex iis, quæ noſtra ætate inventa ſunt.* 689.
*Illa omnia veriſimiliter non extare in Planetis, ſed aliis æque dignis rependi.* 690.
Chriſtiani Hugenii Coſmotheoros, Liber II. 691.
*Kircheri iter extaticum examinatur.* 691.
*Apparens qualis ſit conſtitutio Solis & Planetarum in Mercurio.* 694.
*Qualis in Venere.* 695.
*In Marte.* 696.
*Jovem & Saturnum reliquis Planetis longe præſtare, tam magnitudine, quam Lunarum multitudine:* 697.
*Proportio diametrorum tum Jovis, tum orbitarum ſatellitum ejus, ad orbitam Lunæ circa Terram.* 698.
*Tempora periodorum comitum Jovialium.* 699.
*Quænam ſit Solis apparens magnitudo & lux in Jove, & qui cognoſci queat.* 700.
*Itidem in Saturno.* 700.

*In Jove dies eſſe horarum quinque.* 700.
*Et perpetuum æquinoctium.* 701.
*Planeticolis ſtellas fixas eodem modo apparere, ac nobis.* 702.
*Qualis ſit Planetarum aſpectus, dierum ratio in Saturno.* 702.
*Qualis ſit Annuli aſpectus in Saturno.* 703.
*De Luna pauciora conjici poſſe.* 704.
*Satellitum Saturni & Jovis eandem ac Lunæ rationem eſſe.* 705.
*Lunam montibus & vallibus diſtinctam eſſe.* 705.
*Carere vero mari.* 705.
*Fluviis.* 706.
*Nubibus.* 706.
*Aëre & aqua.* 706.
*Hinc de animantibus & ſtirpibus incertiorem conjecturam eſſe.* 707.
*Jovis ac Saturni Lunas, non ſecus ac noſtram Telluri, eandem partem ſuo Planetæ obvertere.* 707.
*Lunæ incolis ſi qui ſint, qualis apparitura ſit cælorum conſtitutio, dierum ratio, &c.* 708.
*Quod ad Jovis & Saturni Lunas facile transferre eſt.* 709.
*Solaris mundi ſecundum veram proportionem deſcriptio.* 710.
*Immenſitas intervallorum inter Solem & Planetas illuſtratur comparatione cum motu globi è tormento emiſſi.* 711.
*In Sole omnem conjecturam deficere.* 712.
*Faculas Solares incertas videri.* 712.
*Propter calorem nulla illic vivere corpora noſtris ſimilia.* 712.
*Stellas fixas totidem eſſe Soles.* 713.
*Eas ſpargi per vaſta cæli ſpatia, & alias ab aliis, ut proximas à Sole removeri.* 714.
*Nec Solem præ cæteris eminere contra Keplerum notatur.* 714.
*Nihil impedire, quo minus credamus circa unamquamque ex fixis, ut circa Solem, eſſe Planetas.* 715.
*Modus probabiliter inveſtigandi diſtantiam fixarum à Sole.* 717.
*Unumquemque Solem vortice cingi, ſed Carteſianis multum diſſimili; contra quem pluribus diſputatur.* 719.

# TOMUS QUARTUS
# OPERA MISCELLANEA.

DE RATIOCINIIS IN LUDDO ALEÆ 723. *Ad calcem Exercitationum Math. Schotenii.*
*Si* a *vel* b *expectem, quorum utrumvis æquè facilè mihi obtingere poſſit, expectatio mea dicenda eſt valere* $\frac{a+b}{2}$. 728.
*Si* a, b, *vel* c, *expectem, quorum unumquodque pari facilitate mihi obtingere poſſit, expectatio mea æſtimanda eſt* $\frac{a+b+c}{3}$. 729.
*Si numerus caſuum, quibus mihi eveniet* a, *ſit* p; *numerus autem caſuum quibus mihi eveniet* b, *ſit* q; *ſumendo omnes caſus æquè in proclivi eſſe: expectatio mea valebit* $\frac{pa+bq}{p+q}$. 730.
*De facienda diſtributione inter diverſos col-*

*colluſores, quando eorum ſortes inæquales ſunt.* 731.

*De facienda diſtributione, ſi unus mihi deficiat luſus & colluſori meo tres luſus.* 732.

*Item, ſi mihi deficiant duo luſus & colluſori meo tres luſus.* 733.

*Item, ſi mihi deficiant duo luſus, & colluſori meo quatuor.* 733.

*Item, poſitis tribus colluſoribus, quorum primo ut & ſecundo unus luſus deficiat, ſed tertio duo luſus.* 734.

*Item, poſitis tot colluſoribus, quot quis voluerit, ex quibus uni plures & alii pauciores luſus deficiunt.* 735.

*Tabula pro 3 colluſoribus.* 736.

*Invenire, quot vicibus ſuſcipere quis poſſit, ut unâ teſſerâ 6 puncta jaciat.* 738.

*Invenire, quot vicibus ſuſcipere quis poſſit, ut duabus teſſeris 12 puncta jaciat.* 739.

*Invenire quot teſſeris ſuſcipere quis poſſit, ut primâ vice duos ſenarios jaciat.* 740.

*Si cum alio ludam duabus teſſeris unum ſolummodo jactum, hâc conditione, ut, ſi ſeptenarius eveniat, ego vincam; at ille, ſi denarius obtingat; ſi vero quidquam aliud accidat, ut tum id quod depoſitum eſt æqualiter dividamus: Invenire qualis iſtius pars cuique noſtrum debeatur.* 741.

*Si ego & alius duabus teſſeris alternatim jaciamus, hâc conditione, ut ego vincam ſimul atque ſeptenarium jaciam, ille vero quam primum ſenarium jaciat; ita videlicet, ut ipſi primum jactum concedam: invenire rationem meæ ad ipſius ſortem.* 742.

Coronidis loco ſubjungantur V. Problemata. 743.

NOVUS CYCLUS HARMONICUS. 745. *Hiſtoire des ouvrages des Sçavans.* Oct. 1691.

Tabula Diviſionis octavæ in partes 31. æquales, & diviſionis Octavæ ſecundum Temperamentum vulgare. 752.

VARIA DE OPTICA. 755.

Excerpta ex literis Dni. Hugenii, Academiæ Regiæ Scientiarum Socii, ad Autorem Diarii Eruditorum de Catoptrico conſpicillo Dni. Newtoni. 757. *Journal des Sçavans* 29. Febr. 1672.

Conſtructio Problematis optici. Propoſitio 39 Libri V. Alhazeni, & 22. Lib. VI. Vitellionis. 759.

*Datis in eodem plano duobus punctis & circulo; inveniendum eſt punctum in peripheria circuli, ita ut lineæ ex puncto invento ad puncta data faciant cum radio circuli, per punctum inventum ductum, angulos inter ſe æquales.* 759. Ouvrages de Mrs. de l'Acad. Roj. pag. 376.

Aliter. *Dato Speculo Cavo aut Convexo, itemque Oculo & Puncto Rei viſæ, invenire Punctum Reflexionis.* 760. Philoſophical Tranſactions. n. 97.

*Compendium.* 761. Ibid. n. 98.

Alia ſolutio. 761.

*Problema* Alhazeni.] *Dato Circulo, & punctis duobus, invenire punctum in Circumferentia Circuli dati, unde ductæ lineæ ad puncta data faciant ad Circumferentiam Angulos æquales.* 761. Ibid. n. 98.

Excerpta ex litteris Dni. Hugenii, Acad. Reg. Scient. Socii, ad Auctorem



Digitized by Google

rem Diarii Paris. de novo Microſcopio ex Hollandia allato. 764. *Journal des Sçavans.* 15. Aug. 1678.

Experimenta Physica. 767.

Excerpta ex literis Dni. Hugenii, Academiæ Regiæ Scientiarum Socii, ad Auctorem Diarii Eruditorum, de Phænomenis aquæ aëre purgatæ. 769. *ibid.* 25. Jull. 1672.

Experimentum I. *Aqua, ſublatâ aëris preſſione, hæret in tubo.* 770.

Experimentum II. *Notabile quid in deſcenſu aquæ aëre purgatæ.* 771.

Experimentum III. *Adbibito ſpiritu vini loco aquæ.* 772.

Experimentum IV. *Aër, ex Spiritu vini aut aqua exhauſtus, hæc corpora iterum intrat.* 773.

Experimentum V. *Laminæ metallicæ arcte inter ſe cohærent in vacuo licet nihil inter has detur.* 775.

Experimentum VI. *Effectus Siphonis in vacuo.* 776.

# FINIS.

Digitized by Google

# CATALOGUS QUORUNDAM LIBRORUM,

## Qui apud JANSSONIOS VAN DER AA, Bibliopolas Lugduni Batavorum, venales proſtant.

*Abregé de l'Hiſtoire generale des Turcs, par Vanel,* 12°. 4 *voll. avec fig.*
Admiranda rerum admirabilium Encomia, 12°.
Æſchinis Socratici Dialogi tres, per Horreum, 8°. Gr. & Lat.
*Alaric ou Rome vaincuë, Poëme Heroïque, par Monſr. de Scudery* 12°. *avec fig.*
AMINTAS HERDERSPEL VAN T. TASSO, DOOR WELLEKENS, 8°.
*Andry de la Generation des Vers dans le Corps de l'Homme* 12°.
*Annales de la Cour & de Paris, pour les Années* 1697 & 1698. 12°.
Annus Sacer Poëticus, ſive ſelecta de Divis Cœleſtibus Epigrammata 12°. 2 Tomis.
Antonii Jus feudale, cum additamentis Strykii, 4°.
*Apologie pour leurs Sereniſſ. Majeſtés Britanniques, contre un infame Libelle intitulé le vray Portrait de Guillaume Henry de Nauſſau, nouvel Abſçalom, nouvel Herode, nouveau Cromwel, nouveau Neron,* 12°.
— *pour les Proteſtans, ou l'Auteur juſtifié pleinement leur conduite & leur ſeparation de la Communion de Rome.* 12°.
Athanaſii Opera, Gr. Lat. fol. 2 Voll.
Aurea Bulla Caroli V. Imp. de jure & ordine ſuccedendi in ducatum Mediolanenſem, &c. 4°.
Bauhuſii & Cabillavi Epigrammata, 24°.
*Bellefontaine Medicine Dogmatique Mechanique, avec la Pharmacopée Rationelle,* 12°. 2 voll.
BELLOSTE CHIRURGIEN D'HÔPITAL, 12°. avec fig.
Biblia Græca LXX. Interpretum, curâ L. Bos, 4°.
Bidermanni Acroamatum Academicorum Libri III. 12°.
Biſſchop Chorus Muſarum, ſive Poëmata, 8°.
Blancardi Opera Medica, Theoretica, Practica & Chirurgica, 4°.
*Blegny Art de guerir les Maladies Veneriennes,* 12°. 3 Tomes *avec fig.*
Boleſlavii Homo bene moriens 12°.
— Gemmeum monile Animæ Chriſtianæ, 12°.
Bontekoe Metaphyſica, OEconomia Animalis & Geulinx Phyſica vera, 8°.
Borgeſii Enodatio Juris Naturæ, 8°.
*Breſmal Circulation des Eaux ou l'Hydrographie des Minerales d'Aix & de Spa,* 8°.
*Brugnier Reponſe au Livre intitulé le Renverſement de la Morale de Jeſu-Chriſt, par les Erreurs des Calveniſtes.* 12°.



Digitized by Google

Burgundius ad Conſuetudines Flandriæ aliarumque Gentium, 12°.
Camerarii Symbola ac Emblemata Ethico Politica, 8°.
Catalogus Librorum Manuſcriptorum Angliæ & Hiberniæ, fol.
*Cherubin Effets de la Force de la Contiguité des Corps*, 12°.
*Choix des bons Mots*, 12°.
Claubergii Opera Omnia Philoſophica, curâ Schalbruchii, 4°.
Clos de Aquis Mineralibus Galliæ & de Mixtis naturalibus, 12°.
*Crebilon Oeuvres*, 12°.
*Defence de la Monarchie de Sicile contre les Entrepriſes de la Cour de Rome*, 12°.
*Deſcription du Chateau de Verſailles*, 12°. avec fig.
DIVORCE CELESTE PAR PALLAVICIN, 12°.
Donkers Idea Febris petechialis, 8°.
Douſæ Poëmata, 8°.
EEUWIGDUURENDE LIEFDES ALMANAK, 8°.
Epiſtolæ Præſtantium ac Eruditorum Virorum, fol. Charta Maj.
Flâviſſæ Poëticæ ſive Electorum Poëticorum Theſaurus Sacro-Profanus, 8°.
Fleetwood Inſcriptionum Antiquarum Sylloge, 8°.
*Gaſſendi Abregé de la Philoſophie*, 12°. 7 Voll.
GOBART TRACTATUS PHILOSOPHICUS DE BAROMETRO, 12°. cum fig
*Guide, ou nouvelle Deſcription d'Amſterdam*, 8°.
Hartmanni Praxis Chymiatrica, 8°.
*Hartſoeker Principes de Phyſique*, 4°.
HAVERCAMP DE NUMMIS ALEXANDRI MAGNI, 4°. cum fig.
Herbinius de Cataractis in Genere, 4°. cum fig.
Heucheri novi Proventus Horti Medici Acad. Vitembergenſis, 4°.
Hildani Obſervationes & Epiſtolæ Chirurgico-Medicæ, 4°. 2 Voll.
Hippocratis Aphoriſmi per Almeloveen, 24°.
—— Metrica paraphraſi tranſlati ab H. v. Poot. 24°.
HISTOIRE DES INDES ORIENTALES PAR Mr. SOUCHU DE RENNEFORT, 12°.
—— *des Iles Antilles de l'Amerique* 4°. avec fig.
*Homere Iliade & Odyſſée, par Mad. Dacier*, 12°. 6 Tomes, avec fig.
—— *Iliade Poëme avec un diſcours ſur Homere, par Mr. de la Motte*. 12°.
Huetius de Interpretatione, 8°.
*Huygens Traité de la Lumiere*. 4°.
Jablonski Diſquiſitio de Lingua Lycaonica, 4°.
*Jean danſe mieux que Pierre, Pierre danſe mieux que Jean*. 12°. 5 Voll.
*Inſtruction pour reunir les Egliſes pretendues Reformees a l'Egliſe Romaine, par Mr. Comiere*. 12°.
*Jurieu Juſtification de la Morale des Reformez, contre les Accuſations de Mr. Arnaud*, 8° 2 Tomes.
Jus Auſtriacum in ſucceſſione Regnorum Hiſpaniæ vindicatum, 4°.

Knib-

Digitized by Google

Knibbe Manuductio ad Oratoriam Sacram, 8°. 2 Voll.
*Lamy Elemens de Mathematique, ou traité de la Grandeur en General,* 12°.
*Leti Critique Hiſtorique, Politique, Morale, Economique & Comique, ſur les Loteries Anciennes & Modernes,* &c. 12°.
*Letres Provinciales par Louis Montalte* 8°. 3 Voll.
— *de Fr. Rabelais, avec des Obſervations,* 8°.
— *du Cardinal Bentivoglio, Ital. franc.* 12°.
Lipenii Bibliotheca Juridica, Struvii, fol.
*Logique par Mrs. de Port Rojal,* 12°.
— *courte & facile par le Sr. Du Boisverd.* 8°.
Lyk-Predikatie over de Dood van d' Hr. Mitsen, door J. de Hartogh, 4°.
Machiavelli Hiſtoria Florentina, 12°.
*Malvezzi Opere Hiſtoriſche e Politiſche,* 12°.
— *Il Tarquino Superbo,* 12°.
*Manzini Opere,* 12°.
— *furori della Gioventu Eſercitii Rhetorici,* 12°.
*Marechal Francois,* 12°.
Maſcampi Epitome Hiſtoriæ Civilis, 8°.
Medulla Juſtinianea, 12°.
*Melanges Hiſtoriques,* 12°.
*Menken de la Charlatanerie des Savans,* 8°.
*Moïens de reunir les Proteſtans avec l'Egliſe Romaine.* 12°.
Mollenbroccius de Arthritide, 8°.
Monavii Bronchotomia, quæ eſt gutturis aperiendi artificioſa ratio, 8°.
Mort Idea Actionis Corporum 12°.
Mundi Opera Omnia Medico-Physica, 8°.
*Oeuvres de Mr. Le Noble* 12°. 19 Voll.
Oudini Commentarius de Scriptoribus Eccleſiæ Antiquis, fol. 3 Voll.
Pacii Analyſis & Iſagoge 8°. 2 Voll.
Parladorii Opera Juridica, 4°. 2 voll.
*Paſſe partout Galant,* 12°.
Pastor fido, 32°. Appreſſo P. Mortier.
*Petau Hiſtoire Univerſelle,* 12°. Paris 5 Tomes.
*Pilpay Conſeils & Maximes,* 8°.
Plazzonus de Partibus Generationis inſervientibus, 12°.
Pluimers Gedichten 4°. tweede deel.
*Pourtraits des plus Celebres Profeſſeurs de Leide,* 4°.
*Preparations pour la Ste. Cene, avec le Voyage de Bethel,* 12°.
*Rochefoucault Reflexions ou Sentences & Maximes morales,* 12°.
Schiere Doctrina Teſtamentorum & Fœderum omnium Divinorum, 4°.

Se-

Digitized by Google

CATALOGUS LIBRORUM.

Senecæ & Syri Mimi Sententiæ, cum Notis Diverſorum & Gruteri, 8°.
SERRE DOLCI PENSIERI SOPRA LA MORTE, 8°.
THEATRE ET AUTRES POESIES DE MADEM: BARBIER, 12°. avec fig.
VARIOLARUM METHODUS PER TRANSPLANTATIONEM, 8°.
Veſlingii Syntagma Anatomicum, ſive Anatomia, 4°. cum fig.
VIEUSSENS NOVUM VASORUM CORPORIS HUMANI SYSTEMA, 8°.
VIGNOLE REGLE DES CINQ ORDRES D'ARCHITECTURE, 4°. avec fig.
*Voyage de Groenland, par le Pere Cordelier Pierre de Meſange*, 12°. 2 Voll.
— *aux Côtes de Guinée & en Amerique*, 12°.
— *Le Prudent Voyageur, par L. du May*, 12°. 3 Voll.
WECHWYSER DER EENVULDIGEN, DOOR J. DE HARTOGH, 8°.
Weſtenberg ad Pandectas, 8°.
*Dictionaire Engliſch and Frenſch & Frenſch and Englich of Miege* 8°.
— Italiaanſch en Nederduyts, door Moſes Giron, 4°.
— Antiquitatum Romanarum & Græcar. per Danetum, in Uſum Delphini, 4°.
*Grammaire Franceiſe d'un tour nouveau, compoſée en faveur de ceux qui preferent la Pratique a la Theorie, par Mr. Derbaud*, 12°. avec fig.

Multi etiam alii apud Eoſdem reperiuntur.

---

## AVIS AU RELIEUR.

LE Relieur prendra garde que le papier qui eſt à côté des Figures doit être conſervé pour faire deborder les Figures hors du Livre, & les placer ſuivant la page marquée ſur chaque planche.

## *BERIGT AAN DEN BOEK-BINDER.*

*DEn Boek-binder zy gewaarſchout het papier ter zyde de Figuren niet af te ſnyden; maar zodanig in te ſetten, dat de Figuren buyten het Boek uitſlaan: dezelven moeten geplaaſt werden volgens de paginaas op yder Tabel genoteert.*

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google